Наумка Србиноска
Охрид

КАКО ВО МАТЕМАТИКАТА СЕ ГРЕШИ?

Често пати можеме да ја слушнеме старата поговорка: *Кој работи, тој и греши.* Тоа укажува дека, природно е и учениците да грешат. Но, занимливо е дека грешки правеле и најпознатите светски научници, меѓу кои ќе ги спомниме Њутн, Ферма, Декарт, Лаплас, Ојлер и многу други. Така Ферма, еден од најпознатите творци во теоријата на броеви, тврдел дека броевите од видот $2^{2^n}+1,\ n\in\mathbb{N}$ се прости, но Ојлер докажал дека бројот $2^{32}+1$ е делив со 641. Исто така, Ојлер тврдел дека броевите $232\cdot 57^2+1$ и $232\cdot 117^2+1$ се прости, но тие всушност се сложени. Првиот е делив со 179, а вториот со 271.

Како што рековме, сосема разбирливо е учениците да грешат. Притоа, кај учениците се јавуваат таканаречените типизирани грешки и тие се резултат на недоволно научување на материјалот. Такви грешки се, на пример:

а) вадењето корен на следниов начин

$$\sqrt{a^2+b^2}=a+b,$$

иако знаеме дека точно е

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2}=\sqrt{(a+b)^2}=|a+b|.$$

б) недопустливото кратење на дропките како што е

$$\frac{a+b}{a+c}=\frac{b}{c}.$$

в) решение на равенката $ax=b,\ a\neq 0$ е $x=\frac{a}{b}$ или $x=b-a$, итн.

Типични грешки кои можат да се појават се таканаречените *сугерирани грешки*, т.е. кога со сугестивни прашања се наведува некој да згрешки. На пример, прашуваме колку прсти има на една рака и притоа покажуваме отворена дланка. Јасно, одговорот е 5. Потоа заедно ги покажуваме двете раце и прашуваме колку прсти имаат две раце. Одговорот с 10. И сега ако ги спуштиме двете раце, тогаш на прашањето колку прсти имаат 10 раце, често пати ќе добиеме одговор 100, бидејќи под сугестија на претходното прашање ученикот множи $10\cdot 10$, наместо $10\cdot 5$.

Сугестијата е причина и за грешката која може да се јави при рагледување на следнава задача. Во еден ресторан, на кафе наминале тројца другари и секој платил по 100 денари. Сопственикот на ресторантот, од непознати причини решил да им даде попуст, па затоа од примените 300 денари, на келнерот му дал да им врати 50 денари. Но, келнерот за себе задржал 20 денари, а на секој од патниците му вратил по 10 денари. И сега заклучуваме на следниов начин: Секој гостин платил по 90 денари, што вкупно изнесува $3\cdot 90=270$ денари. Кај келнерот останале 20 денари, и тоа е вкупно $270+20=290$ денари. Каде се оние 10 денари, кои недостасуваат до 300 денари? Каде е грешката? Имено, ние сугестивно ги собравме оние 20 денари со 270 денари иако овие две суми не спаѓаат на исто место. Имено, гостите платиле 270 денари и тоа е сумата која се добива со собирање на 250 денари кои се наоѓаат кај сопственикот на ресторантот и 20 денари кои се наоѓаат кај келнерот.

1) Грешна постапка, а точен резултат. Во математиката чести се случаите кога ако се гледа само резултатот, тогаш се е во ред, но до самиот резултат е дојдено на погрешен начин. Еден од наједноставните примери е следниов:

$$\frac{26}{65}=\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5}=\frac{2}{5},$$

т.е. едноставно сме скратиле со 6, па иако постапката е грешна, сепак резултатот е сосема точен, бидејќи

$$\frac{26}{65}=\frac{2\cdot 13}{5\cdot 13}=\frac{2}{5}.$$

Истото го имаме и кај следнива дропки

$$\frac{2}{5}=\frac{266}{665}=\frac{2666}{6665}=\frac{26666}{66665}=\ldots \text{ или } \frac{1}{4}=\frac{16}{64}=\frac{166}{664}=\frac{1666}{6664}=\ldots.$$

Друг пример е кога без никакво образложение пишуваме:

$$\sqrt{5\frac{5}{24}}=5\sqrt{\frac{5}{24}},$$

$$\sqrt{12\frac{12}{143}}=12\sqrt{\frac{12}{143}},$$

$$\sqrt[3]{2\frac{2}{7}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{7}},$$

$$\sqrt[4]{4\frac{4}{63}}=4\sqrt[4]{\frac{4}{63}},$$

па така изгледа дека броевите 5 и 12 сме ги извадиле пред квадратниот корен, бројот 2 сме го извадиле пред третиот корен и бројот 4 сме го извадиле пред четвртиот корен. Јасно, во случајов имаме грешна постапка, но резултатите се сосема точни, бидејќи наведените случаи се содржат во следнава постапка:

$$\sqrt[n]{a+\frac{a}{a^n-1}}=\sqrt[n]{\frac{a(a^n-1)+a}{a^n-1}}=\sqrt[n]{\frac{a^{n+1}-a+a}{a^n-1}}=\sqrt[n]{\frac{a^{n+1}}{a^n-1}}=\sqrt[n]{\frac{a^n\cdot a}{a^n-1}}=a\cdot\sqrt[n]{\frac{a}{a^n-1}}\,.$$

2) Погрешно, а се изгледа точно. а) Тргнуваме од точното равенство

$$a^2-a^2=a^2-a^2\,.$$

Ако на левата страна пред заграда извадиме a, а десната страна ја запишеме како разлика на квадрати, добиваме

$$a(a-a)=(a-a)(a+a)\,.$$

Понатаму, двете страни на последното равенство ги делиме со $a-a$ и добиваме

$$a=a+a,\text{ т.е. } a=2a\,,$$

што значи дека секој број е еднаков на бројот кој е двапати поголем од него. Јасно, ова не е можно, што значи дека во претходната постапка има грешка. Навистина, ние двете страни на равенството ги поделивме со $a-a=0$, а со нула не смее да се дели.

б) Имаме

$$16-36=25-45,$$

што е точно. Ако на левата и десната страна на последното равенство додадеме $\frac{81}{4}$ последователно добиваме

$$16-36+\tfrac{81}{4}=25-45+\tfrac{81}{4},$$
$$(4-\tfrac{9}{2})^2=(5-\tfrac{9}{2})^2.$$

Ако на двете страни на последното равенство извадиме квадратен корен последователно добиваме

$$4-\tfrac{9}{2}=5-\tfrac{9}{2},$$
$$4=5,$$

што секако е грешно. Во случајов грешка се јавува затоа што не зедовме во предвид дека $\sqrt{a^2}=|a|$, па така ќе добиеме

$$\sqrt{(4-\tfrac{9}{2})^2}=\sqrt{(5-\tfrac{9}{2})^2}$$
$$|4-\tfrac{9}{2}|=|5-\tfrac{9}{2}|$$
$$|-\tfrac{1}{2}|=|\tfrac{1}{2}|$$

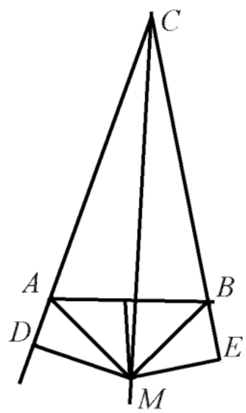
$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

в) На крајот од нашите разгледувања ќе се задржиме на еден пример од геометрија.

Во разностран триаголник ABC ($\overline{AC}>\overline{BC}$) ги повлекуваме симетралата на страната AB и симетралата на аголот во темето C. Понатаму, бидејќи триаголникот е разностран овие симетрали се сечат во некоја точка M (ако триаголникот е рамнокрак, тогаш овие две симетрали ќе се совпаѓаат). Од точката M повлекуваме нормали MD и ME на страните CA и CD, соодветно, и ја поврзуваме точката M со точките A и B, види цртеж 1 на кој имаме само скица.

Сега, ќе докажеме дека триаголниците MDA и MEB се складни. Навистина:

1. $\measuredangle ADM=\measuredangle MEB=90^0$,
2. $\overline{MD}=\overline{ME}$, бидејќи точката M лежи на симетралата на аголот, и
3. $\overline{MB}=\overline{MA}$, бидејќи точката M лежи на симетралата на страната AB,



Цртеж 1

Па од признакот САС следува дека $\Delta MDA\cong\Delta MEB$. Според тоа,

$$\overline{AD}=\overline{BE}.$$

Понатаму, бидејќи точката M лежи на симетралата на аголот добиваме

$$\overline{CD}=\overline{CE}.$$

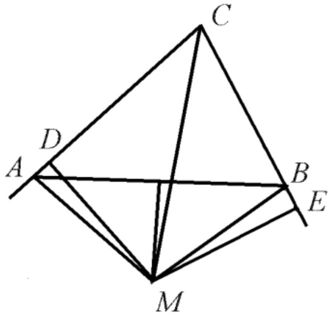
Ако ги одземеме последните две равенства добиваме

$$\overline{CD}-\overline{AD}=\overline{CE}-\overline{BE},$$

т.е.

$$\overline{CA}=\overline{CB},$$

што противречи на нашата претпоставка дека $\overline{AC}>\overline{BC}$.



Цртеж 2

Каде е грешката?

Од $\overline{AD}=\overline{BE}$ и $\overline{CD}=\overline{CE}$ изведовме дека $\overline{CA}=\overline{CB}$, а тоа го направивме бидејќи на цртеж 1 точките D и E и двете се наоѓаат на продолженијата на страните CA и CB, па затоа сметаме дека правилно сме постапиле. Но, на точниот цртеж 2, кој е прецизно нацртан, гледаме дека точката D лежи меѓу точките A и C, т.е. на страната AC, а точката E лежи на продолжението на страната BC. Според тоа,

$$\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{DC}=\overline{BE}+\overline{DC}=\overline{BE}+\overline{CE}$$
$$=\overline{BE}+(\overline{CB}+\overline{BE})=\overline{CB}+2\overline{BE},$$

па затоа должината $2\overline{BE}$ покажува, колку страната AC е подолга од страната BC.

Според та, грешката е во тоа што ако $\overline{AC}>\overline{BC}$, тогаш точката D лежи меѓу точките A и C, е не на продолжението на страната AC.

Забелешка. Последниот пример укажува на потребата при решавањето на геометриските задачи да не се користиме со непрецизни скици, бидејќи како што видовме истите може да не наведат на погрешни заклучоци.

Статијата прв пат е објавена во списанието НУМЕРУС на СММ