Једна двојна неједнакост за правоугли троугао

Драгољуб Милошевић, **Горњи Милановац**

Нека су s_α и s_β дужине симетрала оштрих углова правоуглог троугла ABC, h дужина висине на хипотенузу и P површина троугла. Тада важи следећа двострука неједнакост:

$$\frac{1}{4P}(2+\sqrt{2}) \leqslant \frac{1}{s_\alpha^2} + \frac{1}{s_\beta^2} \leqslant \frac{1}{4h^2}(2+\sqrt{2}).$$

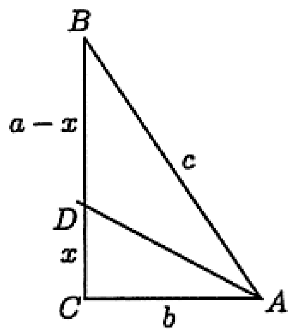
Коришћењем теореме о симетрали унутрашњег угла троугла добијамо (видети слику 1):

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} \text{ или } \frac{x}{a-x} = \frac{b}{c}.$$

Одавде је $x = \dfrac{ab}{b+c}$. Применом Питагорине теореме на правоугли троугао ADC, имамо $s_\alpha^2 = b^2 + \left(\dfrac{ab}{b+c}\right)^2$, односно:

$$s_\alpha^2 = \frac{b^2(b^2+2bc+c^2+a^2)}{(b+c)^2}.$$

Отуда, због $a^2+b^2=c^2$, следи $s_\alpha^2 = \dfrac{2b^2c}{b+c}$. Аналогно добијамо $s_\beta^2 = \dfrac{2a^2c}{a+c}$.



Слика 1.

На основу последње две једнакости имамо:

(1) $$\frac{1}{s_\alpha^2} + \frac{1}{s_\beta^2} = \frac{b+c}{2b^2c} + \frac{a+c}{2a^2c} = \frac{ab(a+b)+c(a^2+b^2)}{2a^2b^2c}.$$

Сада, прва од постављених неједнакости постаје:

$$\frac{ab(a+b)+c(a^2+b^2)}{2a^2b^2c} \geqslant \frac{1}{2ab}(2+\sqrt{2}),$$

или еквивалентно $ab(a+b)+c(a^2+b^2) \geqslant abc(2+\sqrt{2})$, односно

$$c(a-b)^2 \geqslant (c\sqrt{2}-a-b)ab = \frac{ab(2c^2-(a+b)^2)}{c\sqrt{2}+a+b} = \frac{ab(a-b)^2}{c\sqrt{2}+a+b}$$

Разликујемо два случаја: $a=b$ и $a \neq b$.

Ако је $a=b$, последња неједнакост је очигледно испуњена (јер заправо постаје једнакост).

Ако је $a \neq b$, последња неједнакост је еквивалентна са $(c\sqrt{2}+a+b)c \geqslant ab$. Ово је тачно, због $(c\sqrt{2}+a+b)c \geqslant c^2$ и $c^2 \geqslant ab$. Овим је доказана прва тражена неједнакост.

Из једнакости (1), због $ab = ch(= 2P)$ и $a^2 + b^2 = c^2$, произлази

$$\frac{1}{s_\alpha^2} + \frac{1}{s_\beta^2} = \frac{ch(a+b) + c \cdot c^2}{2c^2h^2c} = \frac{h(a+b) + c^2}{2c^2h^2}. \tag{2}$$

С обзиром на то да је $h \leqslant \dfrac{c}{2}$ и $a + b \leqslant c\sqrt{2}$, из (2) следи

$$\frac{1}{s_\alpha^2} + \frac{1}{s_\beta^2} \leqslant \frac{1}{2c^2h^2\left(\frac{c}{2} \cdot c\sqrt{2} + c^2\right)} = \frac{1}{4h^2}(2 + \sqrt{2}),$$

тј. важи и друга неједнакост.

Задаци

1. Користећи наведене ознаке, доказати да је:
   а) $s_\alpha^2 + s_\beta^2 \geqslant 8P(2 - \sqrt{2})$; б) $s_\alpha s_\beta \geqslant 4P(2 - \sqrt{2})$.

2. Може ли се упоредити $s_\alpha^2 + s_\beta^2$ и $s_\alpha s_\beta$?

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2014/15 година