XX РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

IV одделение

Задача 1. Во книжарницата биле донесени 8450 тетратки. Првиот ден продале половина од нив, а вториот ден 437 тетратки помалку. Колку тетратки останале непродадени?

Решение. Првиот ден се продале $8450:2=4225$ тетратки, а вториот ден $4225-437=3788$ тетратки. Непродадени останале

$$8450-(4225+3788)=437$$

тетратки.

Задача 2. Лозарот Петре во буре има 15l вино. Помогнете му на Петре како на својот пријател да му даде 8l вино ако има само 2 сада кои собираат 5l и 9l.

Решение. Лозарот Петре ќе го наполни садот од 9l, а потоа ќе претури 5l во помалиот сад со што во поголемиот сад ќе му останат 4l. Виното што е во садот од 5l ќе го врати во бурето и остатокот од 4l што е во поголемиот сад ќе го претури во празниот сад од 5l. Повторно ќе го наполни поголемиот сад со 9l и ќе го дополни од него помалиот сад со еден литар, со што во поголемиот сад ќе останат 8l вино што ќе му ги продаде на пријателот.

Задача 3. Должината на страната на еден квадрат е три пати поголема од должината на страната на друг квадрат. Нивните периметри се разликуваат за 32 cm. Определи ги должините на страните на двата квадрати.

Решение. Нека L_1 е периметарот на првиот, а L на вториот квадрат. Ако $L_1=4a$, тогаш $L=4\cdot 3a$. Бидејќи $32=L-L_1=12a-4a=8a$, се добива дека должината на страната на првиот квадрат е $4\,cm$, а на другиот квадрат е $12\,cm$.

Задача 4 Ако од даден број се одземе 23, па добиената разлика се подели со 11 и добиениот количник се помножи со 5, ќе се добие број кој е за 5 поголем од најмалиот двоцифрен број. Кој е тој број?

Решение. Задачата ќе ја решиме со враќање наназад. По извршените операции ќе добиеме $5+10=15$, по делење со 5 имаме $15:5=3$, по множење со 11 имаме $3\cdot 11=33$ и по собирање со 23, го добиваме бројот $23+33=56$.

V одделение

Задача 1. Секој од членовите на една екипа игра фудбал или тенис. Колку луѓе има во екипата, ако е познато дека 18 од нив играат и фудбал и тенис, 23 играат фудбал, а 21 играат тенис.

Решение. Нека E е множеството од сите членови на екипата, F е множеството од членови на екипата кои играат фудбал, а T е множеството од членови на екипата кои играат тенис. Тогаш,

$$\delta F=23,\ \delta T=21,\ \delta(F\cap T)=18.\ \ \delta E=18+(23-18)+(21-18)=26.$$

Задача 2. Збирот на два броја е 1181. Ако поголемиот број се подели со помалиот се добива количник 4 и остаток 1. Кои се тие броеви?

Решение. Ако збирот се намали за 1, т.е. поголемиот број се намали за 1, тогаш поголемиот број ќе биде делив со помалиот, и тогаш тој ќе биде 4 пати поголем од помалиот. Значи, помалиот број е $(1181-1):5=236$, а поголемиот е $1181-236=945$.

Задача 3. Колку најмногу еднакви букети можат да се направат од 252 ружи, 288 лалиња и 972 каранфили и по колку вкупно цветови има во секој букет?

Решение. Бидејќи $NZD(252,288,972)=36$, можат да се направат 36 еднакви букети во кои ќе има по $252:36=7$ ружи, $288:36=8$ лалиња и $972:36=27$ каранфили.

Задача 4. Плоштината на еден двор, што има форма на правоаголник е 10 ари. Должината на едната страна е 25 метри. Да се огради дворот потребно е на секои 5 метри да се постави по еден столб. Пресметај колку столбови се потребни за оградување на дворот и по колку столбови ќе има секоја страна?

Решение. Нека $a=25m$ е ширина, а $b=1000:25=40m$ е должината на дворот. Периметарот на дворот е $L=2(25+40)m=130m$. За оградување на целиот двор потребни се $130:5=26$ столбови. На поголемата страна има 9 столбови, а на помалата има 6 столбови.

VI одделение

Задача 1. Определи ги $x\in\mathbb{Z}$ и $y\in\mathbb{Z}$ ако $|xy|=6$

Решение. Од $|xy|=6$ следува $(i)\ xy=6$ или $(ii)\ xy=-6$. Од (i) следува дека

$$(x,y)\in\{(1,6);(-1,-6);(2,3);(-2,-3);(6,1);(-6,-1);(3,2);(-3,-2)\},$$

а од (ii) следува дека

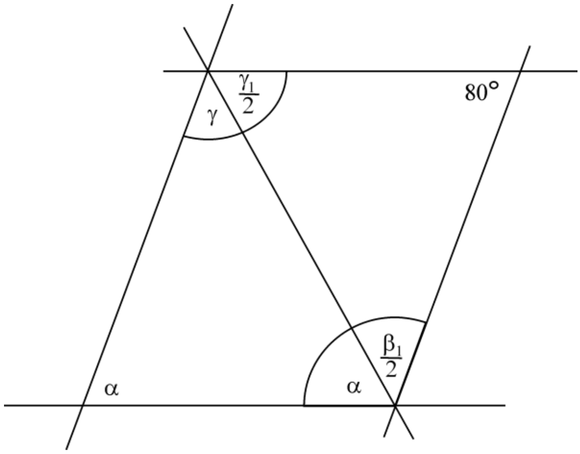
$$(x,y)\in\{(-1,6);(1,-6);(2,-3);(-2,3);(6,-1);(-6,1);(-3,2);(3,-2)\}.$$

Решение е унијата на овие две множества.

Задача 2. Симетралата на надворешниот агол при основата на еден рамнокрак триаголник ја сече симетралата на надворешниот агол при врвот од истиот триаголник под агол од 80°. Одреди ги аглите на триаголникот.

Решение. Од својствата на внатрешни и надворешни агли во триаголникот следува

$$\gamma_1=2\alpha,\beta_1=180-\alpha.$$



Од $\triangle CBD$ следува:

$$\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\beta_1}{2}+80^\circ=180^\circ;$$

$$\alpha+90^\circ-\frac{\alpha}{2}=100^\circ;$$

$$\frac{\alpha}{2}=10^\circ;\ \ \alpha=20^\circ;$$

а $\gamma=180^\circ-2\alpha=140^\circ$.

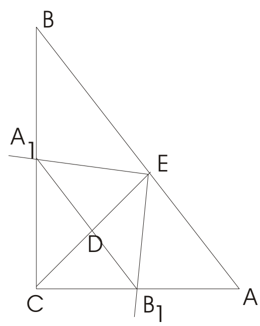
Задача 3. Одејќи Петре на училиште, откога изминал 1 km и половина од преостанатиот дел од патот, го сретнал чичко Стојан кој го прашал Петре уште колку километри има додека стигне до училиштето. Петре му одговорил дека има да оди уште 1 km и третина од вкупната должина на патот. Колкав пат поминува Петре одејќи на училиште?

Решение. *Прв начин.* Кога Петре поминал $1km$ и половина од преостанатиот дел од патот нему му останала втората половина од преостанатиот дел од патот. Втората половина од преостанатиот дел од патот претставува $\frac{1}{3}$ од вкупната должина на патот и уште $1km$. Значи, откако изминал $1km$ на почетокот, на Петре му преостанува $\frac{2}{3}$ од вкупната должина на патот и уште $2km$. Преостанатиот дел е за $1km$ помал од должината на целиот пат. Според тоа, $\frac{1}{3}$ од вкупната должина на патот изнесува $2km+1km=3km$, а вкупната должина на патот е $9km$.

Втор начин. $1+\frac{x-1}{2}+\frac{x}{3}+1=x; \quad x=9km.$

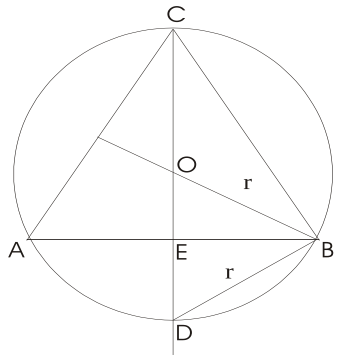
Задача 4. Докажи дека подножјето на висината кон хипотенузата на правоаголен триаголник $ABC, (\measuredangle C=90°)$ е теме на прав агол чии краци минуваат низ средините на катетите.

Решение. Нека во правоаголниот триаголник ABC, A_1 и B_1 се средини на катетите BC и CA соодветно, и нека е E подножјето на висината кон хипотенузата. Тогаш, $A_1B_1 \parallel AB$, па ако $\{D\}=A_1B_1 \cap CE$ тогаш $\overline{CD}=\overline{DE}; CD \perp A_1B_1$ па $\measuredangle CDA_1=\measuredangle EDA_1$. Од $\triangle CDA_1 \cong \triangle EDA_1$, (САС), следува дека $\overline{CA_1}=\overline{A_1E}$. Слично, од $\triangle CDB_1 \cong \triangle EDB_1$, (САС), следува дека $\overline{CB_1}=\overline{B_1E}$. Конечно, $\triangle A_1B_1C \cong \triangle A_1B_1E$, (ССС), па $90°=\measuredangle B_1CA_1=\measuredangle A_1EB_1$.



VII одделение

Заадача 1. Одреди го растојанието на секоја од страните на впишаниот рамностран триаголник ABC до центарот на кружницата во која тој е впишан, ако радиусот $r=6$.



Решение. Нека CD е дијаметар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ со центар во точката O и нека $\{E\}=OD\cap AB$. Од

$$\overline{OD}=r=\overline{OB} \text{ и } 60^\circ=\measuredangle DOB=\frac{1}{2}\measuredangle AOB,$$

следува $\triangle DBO$ е рамностран. BE е висина во $\triangle DBO$, па $\overline{OE}=\frac{1}{2}\overline{OD}=\frac{r}{2}=3$.

Задача 2. Една третина од вкупната количина на некоја стока е продадена со 10 % заработувачка, а половина од истата стока е продадена со 15% загуба. За колку треба да се зголеми цената на останатиот дел од стоката за да се надополни загубата?

Решение. Нека x е количината на стоката, тогаш 10% од $\frac{1}{3}x$ е заработувачка, 15% од $\frac{1}{2}x$ е загуба, а $p\%$ од $x-(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x)=\frac{1}{6}x$ која треба да се продаде за да се покрие загубата. Според условот имаме:

$$\frac{15}{100}\,\frac{1}{2}x-\frac{10}{100}\,\frac{1}{3}x=\frac{p}{100}\,\frac{1}{6}x.$$

Оттука следува : $p=25$.

Задача 3. Низа од броеви се формира на следниот начин: прв е бројот 7, понатаму секој следен член се добива од збирот на цифрите на неговиот квадрат зголемен за 1. Така, на второто место е бројот 14, бидејќи

$$7^2=49,\ 4+9+1=14;$$

на третото место е бројот 17, бидејќи

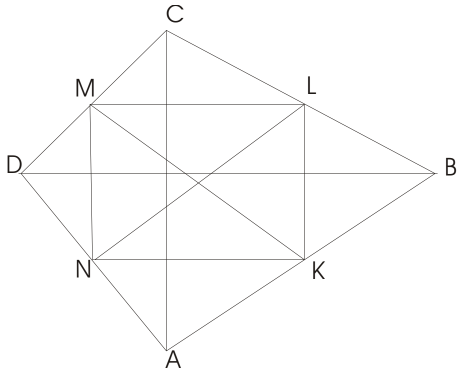
$$14^2=196, 1+9+6+1=17 \text{ итн.}$$

Кој број се наоѓа на 2002-то место?

Решение. Првите некоку члена на низата се : 7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5, 8, 11,…. Значи по првите четири члена, периодично се повторува тројката 5, 8, 11, па имаме: $2002-4=1998=3\cdot 666$, што значи дека на 2002-то место е бројот 11.

Задача 4. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Докажи дека ако отсечките кои ги сврзуваат средините на спротивните страни се еднакви меѓу себе, тогаш дијагоналите AC и BD се заемно нормални.

Решение. Нека K,L,M,N се средини на страните AB,BC,CD,DA соодветно.



Отсечката KL е средна линија на $\triangle ACB$, па затгоа $KL \| AC$; NM е средна линија на $\triangle ACD$, па затоа $NM \| AC$ од каде следува дека $KL \| NM$. Аналогно се докажува дека $ML \| NK$. Од условот $\overline{MK} = \overline{NL}$ следува дека $KLMN$ е паралеограм со еднакви дијагонали т.е. $KLMN$ е правоаголник. Бидејќи $KL \| AC$ и $LM \| BD$, а $KL \perp LM$ следува дека $AC \perp BD$.

VIII одделение

Задаќа 1. Дадени се изразите со променлива

$$A(x) = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{6},\; B(x) = \tfrac{7}{2} - \tfrac{5}{2}x \text{ и } C(x) = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{6}.$$

Определи го x, така што

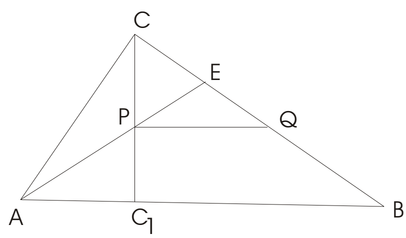
$$3A(x) - 2B(x) - 4C(x) = \tfrac{14}{3}.$$

Решение. Имаме

$$3A(x) - 2B(x) - 4C(x) \equiv \tfrac{3}{2}x - \tfrac{5}{2} + 5x - 7 - 2x + \tfrac{2}{3} = \tfrac{14}{3}$$

од каде следува дека $27x = 81$ т.е. $x = 3$.

Задача 2. Висината повлечена кон хипотенузата на правоаголниот триаголник $ABC, (\measuredangle C = 90°)$ ја дели хипотенузата на две отсечки со должини $\overline{AC_1} = 9cm$ и $\overline{C_1B} = 16cm$. Од темето A на триаголникот повлечена е права што минува низ средината на висината CC_1. Одреди ја должината на оној дел од правата што се наоѓа во триаголникот.



Решение. Висината е геометриска средина на деловите од хипотенузата т.е. $h^2 = 9 \cdot 16;\quad h = 12cm$. Од $\triangle AC_1P$ имаме

$$\overline{AP}^2 = \overline{AC_1}^2 + \overline{C_1P}^2;$$

$$\overline{AP}^2 = 9^2 + (\tfrac{1}{2} \cdot 12)^2; \overline{AP} = 3\sqrt{13}$$

Нека PQ е средна линија на $\triangle CC_1B$.

Бидејќи $\triangle ABE \sim \triangle PQE$ (имаат еднакви агли), добиваме

$$\overline{AE}:\overline{PE}=\overline{AB}:\overline{PQ};(3\sqrt{3}+\overline{PE}):\overline{PE}=25:8;\overline{PE}=\frac{24\sqrt{13}}{17};\overline{AE}=\frac{75\sqrt{13}}{17}.$$

Задача 3. Стрелките на часовникот се преклопени во 12 часот. По колку часа стрелките на часовникот повторно ќе бидат преклопени?

Решение. Стрелката што ги покажува минутите ротира 12 пати побрзо од стрелката што ги покажува часовите. Ако со x го означиме аголот меѓу две преклопувања изразен во $\frac{1}{60}$ - тиот дел од цел круг (агол кој го ротира минутарникот за 1 минута), тогаш важи $x=\frac{60+x}{12}; x=\frac{60}{11}=5+\frac{5}{11}$. Значи, наредното преклопување ќе се случи за $1\frac{1}{11}$ часа.

Задача 4. Во I клас на едно средно училиште се запишани вкупно 110 ученици. Секој од нив од претходно познава барем 11 ученици. Докажи дека секој ученик од I клас има два познаника на кои тој не им е единствен заеднички познаник.

Решение. Нека постои ученик A кој има 11 познаника меѓу кои не постојат два кои имаат уште еден заеднички познаник, освен ученикот A. Тогаш, секој од нив познава по 11 различни ученика. Меѓутоа, тоа не е можно, бидејќи тогаш вкупниот број на ученици би бил 1+11·11=122 што противречи на условот на задачата.