XXXIII олимпијада

1. Определи ги сите природни броеви a, b, c такви што

$$1 < a < b < c \text{ и } (a-1)(b-1)(c-1) \mid (abc-1).$$

Решение. Нека $R(a,b,c) = \frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$, $1 < a < b < c$, каде a, b и c се цели броеви. Горниот израз може да се запише во обликот

$$R(a,b,c) = 1 + \frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{(a-1)(b-1)} + \frac{1}{(b-1)(c-1)} + \frac{1}{(c-1)(a-1)}.$$

Од овде се гледа дека $R(a,b,c) > 1$ и ако $a \ge a' > 1, b \ge b' > 1, c \ge c' > 1$, тогаш $R(a,b,c) \le R(a',b',c')$.

Понатаму, да забележиме дека ако a, b и c се непарни, $abc-1$ е парен , а ако a, b и c се парни, $(a-1)(b-1)(c-1)$ е непарен. Како $R(a,b,c)$ прима целобројни вредности, тоа значи дека сите a, b, c се или парни или непарни.

Ако $a \ge 4$, тогаш $1 < R(a,b,c) \le R(4,6,8) = \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 - 1}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{191}{105} < 2$, па во овој случај $R(a,b,c)$ не може да биде цел број, т.е. во овој случај задачата нема решение.

За $a = 3$, имаме $1 < R(3,b,c) \le R(3,5,7) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 - 1}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{104}{48} < 3$. Сега

$$R(3,b,c) = \frac{3bc-1}{2(b-1)(c-1)} = 2,$$

па се добива дека $(b-4)(c-4) = 11$ и $b = 5$, $c = 15$.

За $a = 2$, имаме $1 < R(2,b,c) \le R(2,4,6) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 - 1}{1 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{47}{15} < 4$, па се добива дека $R(2,b,c) = 2$ или $R(2,b,c) = 3$. Во првиот случај $2bc - 1 = 2(b-1)(c-1)$, што не е можно бидејќи левата страна е непарен, а десната парен број. Во вториот случај $2bc - 1 = 3(b-1)(c-1)$, т.е. $(b-3)(c-3) = 5$ и тогаш $b = 4$, $c = 8$, бидејќи 5 е прост број и $4 \le b < c$.

Значи, постојат две решенија и тие се (3,5,15) и (2,4,8).

2. Определи ги сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2, \text{ за секои } x, y \in \mathbb{R}.$$

Решение. *Прв начин.* Нека

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2, \text{ за секои } x, y \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Нека $s = f(0)$. Од (1) за $x = 0$ добиваме

$$f(f(y)) = y + s^2, \text{ за секој } y \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

Во (1) ставаме $y = 0$ и добиваме

$$f(x^2 + s) = (f(x))^2, \text{ за секој } x \in \mathbb{R} \qquad (3)$$

Ако во (3) ставиме $x = 0$ добиваме

$$f(s)=s^2, \tag{4}$$

и сега од (3) и (4) следува

$$s^2+f(x^2+s)=(f(x))^2+f(s).$$

Од (1), (2) и (4) со примена на функцијата f на двете страни добиваме

$$x^2+s+s^4=s+(x+s^2)^2,$$

од каде што следува дека

$$s=0 \tag{5}$$

Користејќи го (5), од (2) и (3) следува

$$f(f(y))=y, \text{ за секој } y\in\mathbb{R} \tag{6}$$

$$f(x^2)=(f(x))^2, \text{ за секој } x\in\mathbb{R} \tag{7}$$

Од (7) следува

$$f(x)\geq 0, \quad x\geq 0 \tag{8}$$

Ако $f(x)=0$ за некој x, тогаш

$$0=(f(x))^2=f(x^2)=f(x^2+f(x))=x+(f(x))^2=x,$$

па затоа

$$f(x)>0, \quad x>0 \tag{9}$$

Ако во (1) замениме y со $f(y)$, користејќи (6) добиваме

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \quad x\geq 0, y\in\mathbb{R} \tag{10}$$

За $x>y$, од (10) имаме

$$f(x)=f((x-y)+y)=f(x-y)+f(y)>f(y) \tag{11}$$

бидејќи според (9) имаме $f(x-y)>0$.

Ако $f(x)>x$ тогаш $x=f(f(x))>f(x)$, заради (11) и (6). Понатаму, ако $f(x)<x$ на истиот начин се заклучува дека $f(x)>x$.

Конечно, $f(x)=x$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

Втор начин. Прво ќе докажеме дека функцијата f е биекција. Нека $b\in\mathbb{R}$. Заменувајќи $y=b-(f(x))^2$ добиваме $f(x^2+f(y))=b$, што значи дека функцијата е сурјекција. Нека $f(y_1)=f(y_2)$. Тогаш последователно добиваме

$$x^2+f(y_1)=x^2+f(y_2),$$
$$f(x^2+f(y_1))=f(x^2+f(y_2)),$$
$$y_1+f(x)^2=y_2+f(x)^2,$$
$$y_1=y_2,$$

т.е. f е инјекција, па затоа е биекција.

Нека $f(x) < x$ за некој x. Тогаш постои y таков што $x = f(x) + y^2$, од каде што следува $f(x) = f(f(x) + y^2) = x + f(y)^2 \geq x$, што е противречност.

Нека $f(x) > x$ за некој x. Тогаш, бидејќи f е биекција постои број y таков што $f(x) = x + (f(y))^2$. Од последното равенство следува

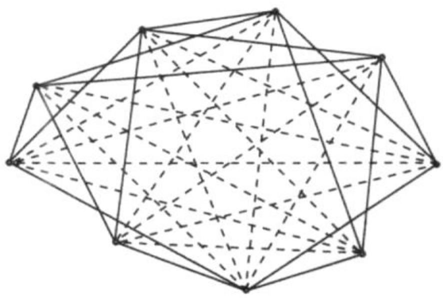
$$f(x) = x + (f(y))^2 = f(y^2 + f(x)),$$

па како f е биекција добиваме $x = y^2 + f(x) \geq f(x)$, што е противречност.

Конечно, од претходните разгледувања следува $f(x) = x$, за секој $x \in \mathbb{R}$.

3. Во просторот се дадени девет точки, такви што било кои четири не лежат во иста рамнина. Секои две точки се поврзани со отсечка и секоја од нив е обоена со сина или со црвена боја или не е обоена. Определи го најмалиот број n таков што при било какво боење на избраните n отсечки, меѓу нив постојат три еднакво обоени кои се страни на триаголник.

Решение. Ако $n = 32$, тогаш може да се изберат и обојат отсечките така да не постои ниту еден триаголник, обоен со иста боја, како што е покажано на цртежот десно. Притоа со полна линија се претставени отсечките обоени со сина боја, а со испрекинаталинија се претставени отсечките обоени со црвена боја.



Меѓу деветте точки има $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ отсечки. Да претпоставиме дека сме избрале 33 обоени отсечки. Тогаш, само три отсечки се необоени.

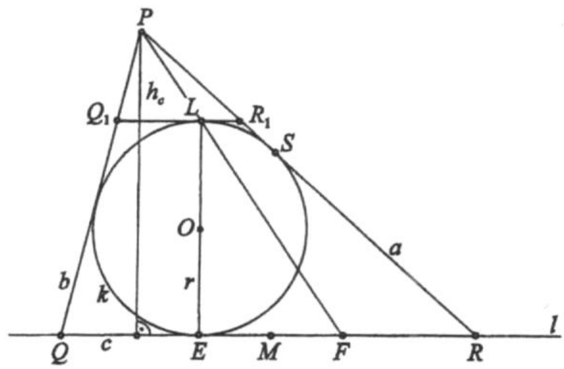
Сека можеме да отстраниме 3 темиња така што преостанатите 6 бидат поврзани сите со обоени отсечки. Да земеме некое теме, на пример A_1. Тоа е поврзано со останатите 5 точки со обоени отсечки, па затоа постојат три исто обоени отсечки, на пример сини отсечки $\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}$. Ако ниту еден од триаголниците $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$ и $A_1A_3A_4$ не е обоен во сина боја, тогаш триаголникот $A_2A_3A_4$ е обоен во црвена боја.

Според тоа, ако избереме 33 обоени отсечки, секогаш ќе постои триаголник така што сите негови страни се обоени со иста боја. Значи, најмалата вредност за n со бараните својства е $n = 33$.

4. Нека t е тангента на кружницата k и точката M припаѓа на t. Определи го геометриското место на точки P за кои постојат точки Q и R на t такви

што M е средина на отсечката QR, а кружницата k е впишана во триаголникот PQR

Решение. Нека E е допирната точка на тангентата t со кружницата k, чијшто центар е O, а EL е дијаметарот на кружницата.
Земаме точка P и соодветно точки Q и R на тангентите, така да кружницата биде впишана во триаголникот PQR. Триаголниците PFR и PLR_1 се хомотетични со коефициент на хомотетија



$$k = \frac{h_c}{h_c - 2r} = \frac{\frac{2P}{c}}{\frac{2P}{c} - \frac{2P}{s}} = \frac{s}{s-c},$$

(P е плоштината на триаголникот PQR, $s = \frac{a+b+c}{2}$, r е радиусот на кружницата впишана во триаголникот PQR) и $\overline{QE} = s - a$.
Правата PL ја сече тангентата во точка F, па имаме

$$\overline{FR} = k\overline{LR_1} = k\overline{R_1S} = k(\overline{PR} - \overline{PR_1} - \overline{SR}) = k\overline{PR} - \overline{PR} - k(s-b)$$
$$= (k-1)\overline{PR} - k(s-b) = \frac{c}{s-c}a - \frac{s}{s-c}(s-b) = s - a = \overline{QE}$$

Значи, важи $\overline{QE} = \overline{FR}$. Точката P припаѓа на бараното множество ако и само ако M е средина на отсечкта EF, т.е. ако и само ако точката F е симетрична со точката E во однос на точката M. Бараното множество точки е полуправата LP.

5. Нека O_{xyz} е правоаголен координатен систем во просторот, S е конечно множество точки во него, а S_x, S_y и S_z се множествата ортогонални проекции на точките од S на рамнините O_{yz}, O_{zx}, O_{xy}, соодветно. Докажи дека

$$|S|^2 \leq |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|.$$

Решение. *Прв начин*. Нека $|S_x| = a, |S_y| = b, |S_z| = c$. Доказот ќе го дадеме со индукција по $|S|$.

За едноелементно множество S тврдењето важи.

Да претпоставиме дека тврдењето важи за секое S, такво што $|S| < n$.

Да го разгледаме множеството S за кое $|S|=n$. Постои рамнина паралелна со некоја координатна рамнина која не содржи ниту една точка од S и која го дели тоа множество на две непразни подмножества S_1 и S_2, така да $n=|S_1|+|S_2|, |S_1|<n, |S_2|<n$. Од индуктивната претпоставка следува

$$|S_1|^2 \le a_1b_1c_1, \quad |S_2|^2 \le a_2b_2c_2.$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека таа рамнина е паралелна со xy -рамнината. Тогаш

$$a_1+a_2=a, \quad b_1+b_2=b, \quad c_1 \le c, \quad c_2 \le c.$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува дека

$$|S|^2=(|S_1|+|S_2|)^2 \le (\sqrt{a_1b_1c_1}+\sqrt{a_2b_2c_2})^2 \le (\sqrt{a_1b_1}\cdot\sqrt{c}+\sqrt{a_2b_2}\cdot\sqrt{c})^2$$
$$=c(\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2})^2 \le c(a_1+a_2)(b_1+b_2)=abc$$

со што е докажана точноста на даденото неравенство.

Втор начин. Да означиме

$$S(x)=\{(y,z)\,|\,(x,y,z)\in S\},$$
$$S_y(x)=\{z\,|\,(x,z)\in S_y\},$$
$$S_z(x)=\{y\,|\,(x,y)\in S_z\}.$$

Ако го искористиме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и инклузиите $S(x)\subseteq S_x$ и $S(x)\subseteq S_z(x)\times S_y(x)$ добиваме

$$\begin{aligned}|S|&=\sum_x|S(x)|\le\sum_x\sqrt{|S_x|\cdot|S_y(x)|\cdot|S_z(x)|}\\ &\le\sqrt{|S_x|}\cdot\sum_x\sqrt{|S_y(x)|\cdot|S_z(x)|}\\ &\le\sqrt{|S_x|}\cdot\sqrt{\sum_x|S_y(x)|}\cdot\sqrt{\sum_x|S_z(x)|}\\ &=\sqrt{|S_x|}\cdot\sqrt{|S_y|}\cdot\sqrt{|S_z|}\\ &=\sqrt{|S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|}.\end{aligned}$$

6. За секој природен број n со $S(n)$ да го означиме најголемиот природен број со својството: за секој природен број k, $1<k<S(n)$, бројот n^2 може да се претстави како збир од k квадрати на природни броеви.

а) Докажи дека $S(n)\le n^2-14$, за секој $n>14$.

б) Најди природен број n за кој $S(n)=n^2-14$.

в) Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $S(n)=n^2-14$.

Решение. а) Бројот n^2 можеме да го запишеме како

$$n^2 = 1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2 .$$

Ако групираме четири единици добиваме 2^2 и со тоа бројот на квадратите се намалува за 3. Со групирање на 9 единици добиваме 3^2 и бројот на квадратите се намалува за 8. Ако k пати групираме по 4 единици и l пати по 9 единици, тогаш бројот на квадратите се намалува за $3k + 8l$. На опишаниот начин бројот на квадратите може да се намали за 3,6,8,9,11,12, но не и за 13. Тоа е затоа што Диофантовата равенка $3k + 8l = 13$ нема позитивни решенија. (општото решение е $k = -1 + 8m, l = 2 - 3m, m \in \mathbb{Z}$). Затоа $S(n) \le n^2 - 14$.

б) Ако $S(n) = n^2 - 14, n \ge 4$, тогаш $S(n) \ge 2$. Бројот n^2 мора да биде еднаков на збирот на два квадрати. Може да биде $n = 5,10,13,\ldots$. За $n = 5$ и $n = 10$, $S(n) = 2$. Најмалиот можен број n за кој $S(n) = n^2 - 14$ е $n = 13$. Треба да докажеме дека бројот $169 = 13^2$ е еднаков на збирот од k квадрати за секој $k \le 13^2 - 14 = 155$.

Ако n^2 е збир од k квадрати од кои еден е парен, на пример $(2r)^2$, кој можеме да го запишеме како $r^2 + r^2 + r^2 + r^2$, добиваме дека n^2 е збир од $k + 3$ квадрати. Од $169 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 3^2$, следува дека бројот 169 може да се запише како збир од $2 + 3t$ квадрати за $1 \le t \le 53$. Ако 3^2 го запишеме како $2^2 + 2^2 + 1^2$, бројот 169 може да се прикаже како збир од $1 + 3t$ квадрати за $1 \le t \le 54$ (за $t = 1, 169 = 10^2 + 8^2 + 2^2 + 1^2$). За $k = 153, 169 = 3^2 + 3^2 + 151 \cdot 1^2$.

Групирајќи 4 единици во 2^2, четири 2^2 во 4^2 и четири 4^2 во 8^2 се добива запис на 169 со помош на $k = 153 - 3t$ квадрати, за $1 \le t \le 48$. За $t = 49$, имаме $169 = 6^2 + 6^2 + 6^2 + 6^2 + 4^2 + 3^2$, а за $t = 50$, $169 = 12^2 + 4^2 + 3^2$.

Со тоа го добивме прикажувањето на бројот $13^2 = 169$ како збир од k квадрати за секој $k \le 155$.

в) Доволно е да докажеме дека за секој $n = 2^k \cdot 13,$ важи $S(n) = (2^k \cdot 13)^2 - 14.$ Тоа може да се направи со разгледување на

$$(2^k \cdot 13)^2 = (2^k \cdot 8)^2 + (2^k \cdot 8)^2 + (2^k \cdot 4)^2 + (2^k \cdot 4)^2 + (2^k \cdot 3)^2 \quad \text{и}$$

$$(2^k \cdot 13)^2 = 3^2 + 3^2 + [(2^k \cdot 13)^2 - 18] \cdot 1^2$$

и групирање така да се добиваат збирови на квадрати.