Статијата прв пат е објавена во списанието Математичко-физички лист на ДМФА на Хрватска во 1959 година

Diskusija rešenja jednačina prvog stepena sa jednim promenljivim parametrom

Dr. DANILO MIHNJEVIĆ, Zrenjanin

Svako rešenje jednačine prvog stepena koje sadrži u sebi promenljivi parametar može se diskutovati, prvo po egzistenciji: t. j. za koje vrednosti promenljivog parametra rešenja postoje, za koje vrednosti ne postoje, dalje za koje vrednosti parametra rešenja su neodređena. Zatim se diskusija može voditi i o znaku rešenja u zavisnosti od promene parametra, naime: kada će rešenja biti pozitivna, kada negativna, a kada neće imati znak. Dalje diskusija se može voditi o celobrojnosti rešenja: kada su rešenja celi brojevi, a kada su razlomci. Dalje kada će se rešenja nalaziti u unapred zadatom intervalu i to da li će u njemu biti monotono rastuća ili opadajuća i t. d.

Mi ćemo se u ovom članku ograničiti samo na diskusiju rešenja po egzistenciji i znaku. I pokazaćemo na primerima kako se može obraditi ova, za učenika, prilično teška partija.

I. Zadatak. Diskutovati egzistenciju i znak rešenja jednačine:

$$ax - 3 = 3a + 2x$$

gde je »a« realan parametar.

Rešenje: Pošto u datoj jednačini razdvojimo članove i svaku stranu rastavimo na faktore dobićemo:

$$(a - 2)\, x = 3\,(a + 1)$$

Da bismo došli do traženog rešenja ostaje nam sada da podelimo obe strane poslednje jednačine sa $(a - 2)$. Međutim za $a = 2$ izraz $a - 2 = 0$, te zbog toga deljenje je nemoguće. Prema tome, u slučaju kada je $a = 2$ data se jednačina ne može rešiti — ona nema rešenja za $a = 2$.

Pretpostavimo li da je: $a \neq 2$ dobijamo rešenje date jednačine:

$$x = \frac{3\,(a + 1)}{a - 2}\,.$$

Da bismo ga diskutovali po znaku dovoljno je ispitati znak razlomka: $x = \frac{a + 1}{a - 2}$ (faktor 3 otpada, pošto je uvek pozitivan). Množeći ovaj razlomak sa $(a - 2)^2$ svodimo pomenuto ispitivanje na ispitivanje znaka kvadratnog trinoma:

$$\frac{a + 1}{a - 2}\,(a - 2)^2 = (a + 1)\,(a - 2) = a^2 - a - 2.$$

Pošto je koeficijent uz a^2 pozitivan, trinom će biti negativan u intervalu, a pozitivan van intervala.

Prema tome, $x < 0$ kad je $-1 < a < 2$
$x > 0$ kad je $a < -1; a > 2$.

Napominjemo da čitalac može doći do istog rezultata i rješavanjem nejednačine:

$$x = \frac{3(a+1)}{a-2} > 0, \text{ odnosno } x = \frac{3(a+1)}{a-2} < 0.$$

Celu diskusiju korisno je svesti u sledeću tablicu:

a	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	∞	$+$	$+$

Iz koje čitamo: 1) kad je: $-\infty < a < -1$, rešenje je pozitivno. 2) Kad je $a = -1$ $x = 0$ — rešenje nema znaka. 3) Kad se »a« menja od -1 do 2, rešenje je negativno. 4) Za $a = 2$ data jednačina nema rešenja. 5) Kad »a« raste od 2 do koliko god hoćemo velikog broja rešenje je opet pozitivno.

Uočimo sada jednačinu koja će imati sve vrste rešenja.

Zadatak: Diskutovati egzistenciju i znak rešenja jednačine:

$$m^3x - mx + m - 4 = m^3 - 4m^2 - 5m^2x + 5x$$

gde je »m« realan parametar

Rešenje:

$$m^3x - mx + 5m^2x - 5x = m^3 - 4m^2 - m + 4$$
$$mx(m^2 - 1) + 5x(m^2 - 1) = m^2(m - 4) - (m - 4)$$
$$x(m^2 - 1)(m + 5) = (m^2 - 1)(m - 4)$$
$$x = \frac{(m^2 - 1)(m - 4)}{(m^2 - 1)(m + 5)}.$$

Diskusija po egzistenciji rešenja: 1) Kad je $m = -5$ imenilac rešenja je nula, a brojilac je različit od nule. Delenje je nemoguće — data jednačina nema rešenja.

2) Kad je $m = \pm 1$, $x = \frac{0}{0}$ — rešenje je neodređeno.

3) Za $m \neq -5$ i $m \neq \pm 1$, posmatrana jednačina ima rešenje.

Diskusija po znaku: Za $m = \pm 1$, $x = \frac{0}{0}$. Ali je prava vrednost:

$$x = \frac{(m^2 - 1)(m - 4)}{(m^2 - 1)(m + 5)} = \frac{m - 4}{m + 5}.$$

Prema tome, za $m = 1$, $x = -\frac{1}{2}$, a za $m = -1$ $x = -\frac{5}{4}$, t. j. oba slučaja rešenja su negativna.

Dalje, pošto faktor $m^2 - 1$ ulazi u brojilac i imenilac rešenja u istom stepenu, njegov znak ne utiče na znak rešenja. Prema tome, dovoljno je ispitati znak razlomka: $x = \frac{m - 4}{m + 5}$.

Ovo ispitivanje svodimo na ispitivanje znaka kvadratnog trinoma:

$$\frac{m - 4}{m + 5}(m + 5)^2 = (m - 4)(m + 5).$$

Vidimo da je trinom negativan u intervalu, a pozitivan van njega.

Prema tome, $x < 0$ kad je $-5 < m < 4$
$x > 0$ kad je $m < -5; m > 4$.

(Do istog rezultata se može doći i rešavanjem nejednačina: $x = \frac{m - 4}{m + 5} \lessgtr 0$.

Celu diskusiju svodimo u tablicu:

m	$-\infty$		-5		-1		0		1		4		$+\infty$
x	$+$	$+$	∞	$-$	$\frac{0}{0}$	$-$	$-$	$-$	$\frac{0}{0}$	$-$	0	$+$	$+$

II. Pređimo sad na diskusiju rešenja sistema dve jednačine prvog stepena sa dve nepoznate.

$$(a+1)\,x+(a+1)\,y=7$$
$$(a+1)\,x-(a+1)\,y=2a-1$$

gde je »a« realan parametar.

Rešenje: Sabiranjem i oduzimanjem datih jednačina dobijemo traženo rešenje u obliku: $x=\dfrac{a+3}{a+1}$ i $y=\dfrac{4-a}{a+1}$.

Za $a=-1$ nema rešenja te je dati sistem nemoguć. Za $a\neq-1$ sistem ima rešenja t. j. saglasan je.

Da bismo diskutovali rešenja po znaku, ispitaćemo znake razlomaka:

$$x=\frac{a+3}{a+1}\quad \text{i}\quad y=\frac{4-a}{a+1}.$$

Ovo ispitavnje svodimo na ispitivanje znaka kvadratnih trinoma:

$$(a+3)\ (a+1)=a^2+4a+3 \quad i$$
$$(4-a)\ (a+1)=-a^2+3a+4.$$

Pošto je prvi trinom negativan u intervalu, a pozitivan van njega, sledi:

$$x<0 \text{ kad je } -3<a<-1$$
$$x>0 \text{ kad je } a<-3;\ a>-1$$

Pošto je drugi trinom negativan van intervala, a pozitivan u intervalu, sledi:

$$y<0 \text{ kad je } a<-1;\ a>4$$
$$y>0 \text{ kad je } -1<a<4.$$

Napominjemo, da do istog rezultata mogli bi se doći i rešavanjem odgovarajućih nejednačina: $x=\dfrac{a+3}{a+1}\gtrless 0$ i $y=\dfrac{4-a}{a+1}\gtrless 0$.

Rezultat diskusije je korisno svesti u sledeću tablicu:

a	$-\infty$		-3		-1		0		4		$+\infty$
x	$+$	$+$	0	$-$	∞	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
y	$-$	$-$	$-$	$-$	∞	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$

Iz tablice se čita: 1) Kad je $-\infty<a<-3$, $x>0$; $y<0$. 2) Kad je $a=-3$, $x=0$; $y<0$. 3) Ako je $-3<a<-1$, $x<0$; $y<0$. 4) Kad je $a=-1$ sistem nema rešenja. 5 Ako je $-1<a<4, x>0; y>0$. 6) Kad je $a=4$, $x>0$; $y=0$. 7) Ako je $a>4$, $x>0$; $y<0$.

Posmatrajmo sada sistem koji će imati sve vrste rešenja.

Zadatak. Diskutovati egzistenciju i znak rešenja sistema:

$$m^2x+y=3\,m$$
$$x+y=3$$

gde je »m« realan parametar.

Rešenje: Oduzimanje druge jednačine od prve dobijemo:

$$m^2x-x=3\,m-3$$

$$x\,(m^2-1)=3\,(m-1)\qquad \text{ili}\qquad x=\frac{3\,(m-1)}{m^2-1}.$$

Zamenimo li dobivenu vrednost od x u drugu jednačinu sistema imamo:

$$\frac{3\,(m-1)}{m^2-1}+y=3, \quad y=3-\frac{3m-3}{m^2-1}=\frac{3m^2-3-3m+3}{m^2-1}=\frac{3m^2-3m}{m^2-1}$$

$$y=\frac{3m\,(m-1)}{m^2-1}.$$

Vidimo: 1) Da za $m=-1$ sistem je nemoguć, jer je tada imenilac $m^2-1=0$, dok brojioci: $3\,(m-1)$ i $3\,m\,(m-1)$ to nisu. 2) Za $m=1$, $x=1$, $x=\frac{0}{0}$; $y=\frac{0}{0}$ t. j sistem je neodređen i 3) Za $m \neq \pm 1$ dati sistem ima rešenja te je saglasan.

Da bismo izveli diskusiju po znaku, ispitajmo prvo znak od x i od y za $m=1$:

$$x=\frac{3\,(m-1)}{m^2-1}=\frac{3}{m+1}, \quad y=\frac{3m\,(m-1)}{m^2-1}=\frac{3m}{m+1}.$$

Prema tome: za $m=1$, $x=\frac{3}{2}>0$ i $y=\frac{3}{2}>0$.

Pošto znak binoma $m-1$ ne utiče na znake od x i od y, dovoljno je ispitati znake razlomaka: $x=\frac{3}{m+1}$ i $y=\frac{3m}{m+1}$. Ovo ispitivanje vršimo na taj način što ispitujemo prvo znak binoma $m+1$ i znak kvadratnog trinoma: $m\,(m+1)$.

Iz prvog sledi:

$$x<0 \text{ za } m<-1$$
$$x>0 \text{ za } m>-1$$

Iz drugog se dobije:

$$y<0 \text{ kad je } -1<m<0$$
$$y>0 \text{ kad je } m<-1;\ m>0.$$

Rezultat diskusije svodimo u sledeću tablicu:

m	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x	$-$	$-$	∞	$+$		$+$	$\frac{0}{0}$	$+$	$+$
y	$+$	$+$	∞	$-$	0	$+$	$\frac{0}{0}$	$+$	$+$

Po sebi se razume da se na slični način može vršiti i diskusija rešenja za sistem od više jednačina.