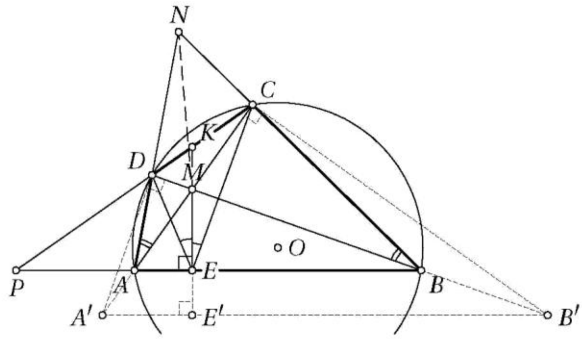
БМО 2018

1. Четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница k, при што $\overline{AB} > \overline{CD}$ и правата AB не е паралелна со правата CD. Точката M е пресек на дијагоналите AC и BD, а подножјето на нормалата од M на AB е точката E. Ако EM е симетрала на $\measuredangle CED$, докажи дека AB е дијаметар на кружницата k.

   Решение. *Прв начин.* Нека претпоставиме дека AB не е дијаметар на кружницата и да избереме точка A' на полуправата CA и точка B' на полуправата DB такви што $\measuredangle A'DB = \measuredangle B'CA = 90^\circ$.



   Четириаголникот $A'B'CD$ е тетивен, па затоа $\measuredangle B'A'C = \measuredangle B'DC = \measuredangle BAC$, а оттука следува $A'B' \| AB$ и $ME \perp A'B'$. Нека правата ME ја сече $A'B'$ во точката E'. Од тетивните четириагоници $A'E'MD$ и $B'E'MC$ следува $\measuredangle DE'E = \measuredangle DA'M = \measuredangle CB'M = \measuredangle CE'E$, па како $\measuredangle DEE' = \measuredangle CEE'$, заклучуваме дека триаголниците CEE' и DEE' се складни. Затоа $\overline{CE} = \overline{DE}$. Конечно, симетралата EM на $\measuredangle CED$ е нормална на CD, па затоа $AB \| CD$, што противречи на условот на задачата.

   Втор начин. Нека правите AD и BC се сечат во точката N, а правите AB и CD се сечат во точката P. Правата MN е полара на точката P во однос на кружницата k, па затоа $MN \perp OP$, каде O е центар на кружницата k. Со K да го означиме пресекот на правите MN и CD, а со E' пресекот на правите MN и AB. Бидејќи EK и EP се соодветно внатрешната и надворешната симетрала на $\measuredangle CED$, заклучуваме дека четворката $(C, D; P, K)$ е хармониска. Со проектирање од M следува дека четворката $(A, B; P, E)$ е хармониска. Од друга страна, од четириаголникот $ABCD$ следува дека четворката $(A, B; P, E')$ е хармониска, па затоа $E' \equiv E$ и оттука $MN \perp AB$. Според тоа, O припаѓа на правата AB, т.е. AB е дијаметар на кружницата k.

2. Нека q е позитивен рационален број. Две мравки на почетокот се наоѓаат во иста точка X во рамнината. Во $n-$тата минута $(n = 1, 2, ...)$ секоја од нив из-

бира дали ќе се движи на север, исток, југ или запад, и притоа минува растојание од q^n метри. По цел број минути тие повторно се наоѓаат во иста точка во рамнината (не задолжително во точката X), а дотогаш изминатите патеки не им се потполно идентични. Определи ги сите можни вредности на бројот q.

Решение. Со a_n да го означиме збирот на x и y координатата на првата мравка, а со b_n збирот на координатите на втората мравка по n минути. Од условот на задачата следува $|a_n - a_{n-1}| = |b_n - b_{n-1}| = q^n$, па затоа

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i q^i \text{ и } b_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i q^i$$

за некои коефициенти $\varepsilon_i, \eta_i \in \{-1,1\}$. Ако мравките се сретнале по n минути, тогаш

$$0 = \frac{a_n - b_n}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i - \eta_i}{2} q^i = P(q)$$

при што коефициентите $\frac{\varepsilon_i - \eta_i}{2}$ на поиномот $P(q)$ се целобројни и припаѓаат на множеството $\{-1,0,1\}$. Според тоа, ако $q = \frac{a}{b}, a,b \in \mathbb{N}$, тогаш $a|1, b|1$ и затоа $q=1$. Вредноста $q=1$ очигледно е можна, на пример, ако првата мравка оди на исток па на запад, а втората на север па на југ.

Втор начин. Ги разгледуваме позициите на мравките α_k и β_k по k чекори во комплексната рамнина, сметајќи дека појдовната точка е координатниот почеток и дека чекорите се паралелни на координатните оски. Знаеме дека $\alpha_k - \alpha_{k-1} = a_k q^k$ и $\beta_k - \beta_{k-1} = b_k q^k$, каде $a_k, b_k \in \{1,-1,i,-i\}$. АКо $\alpha_n = \beta n$ за некој $n > 0$, тогаш

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) q^k = 0 \text{, каде } a_k - b_k \in \{0, \pm 1 \pm i, \pm 2 \pm 2i\}.$$

Да забележиме дека коефициентот $a_k - b_k$ секогаш е делив со $1+i$ во прстенот $\mathbb{Z}[i]$. Навистина

$$c_k = \frac{a_k - b_k}{1+i} \in \{0, \pm 1, \pm i, \pm 1 \pm i\}.$$

Со скратување со $1+i$ добиваме $\sum_{k=1}^{n} c_k q^k = 0$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $c_1, c_n \neq 0$. Ако сега $q = \frac{a}{b}, (a,b \in \mathbb{N})$, тогаш $a | c_1$ и $b | c_n$ во $\mathbb{Z}[i]$, што е можно само за $a = b = 1$. Според тоа, $q = 1$.

3. Ана и Бојан ја играат следнава игра. Пред нив се наоѓаат две непразни купчиња монети. Наизменично, прва почнува Ана, секој избира купче во кое има

парен број монети и половина од монетите ги преместува од тоа купче во другото купче. Играта завршува ако играчот кој е на потез не може да одигра потез, во кој случај победува другиот играч. Определи ги сите парови (a,b) природни броеви такви што ако купчињата на почетокот имаат a и b монети, тогаш Бојан има победничка стратегија.

Решение. Со $v_2(n)$ да го означиме најголемиот ненегативен цел број r таков што $2^r \mid n$. За позицијата (a,b), т.е. две купчиња со a и b монети, ќе велиме дека е $k-$среќна ако $v_2(a)=v_2(b)=k$ за некој цел број $k \geq 0$, и $k-$несреќна ако $\min\{v_2(a),v_2(b)\}=k<\max\{v_2(a),v_2(b)\}$. Ќе докажеме дека Бојан има победничка стратегија ако и само ако почетната позиција е $k-$среќна за некој парен број k.

- Во случај на 0-среќна позиција играчот кој е на потез одма губи.
- Ако е дадена $k-$среќна позиција (a,b) со $k \geq 1$, играчот кој е на потез ја менува во една од позициите $(a+\frac{1}{2}b,\frac{1}{2}b)$ и $(b+\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a)$, при што и двете се $(k-1)$-среќни бидејќи $v_2(a+\frac{1}{2}b)=v_2(\frac{1}{2}b)=v_2(b+\frac{1}{2}a)=v_2(\frac{1}{2}a)=k-1$.

Според тоа, ако почетната позиција е $k-$среќна, по k потези се доаѓа до конечна 0-среќна позиција, при што Бојан ќе победи ако и само ако k е парен број.

- Ако е дадена $k-$несреќна позиција (a,b) со непарен k и $v_2(a)=k<v_2(b)=l$, Ана може да ја промени во позиција $(b+\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a)$. Бидејќи $v_2(b+\frac{1}{2}a)=v_2(\frac{1}{2}a)=k-1$, новата позиција е $(k-1)-$среќна и $2 \mid k-1$, па така Ана ќе победи.
- Ако е дадена $k-$несреќна позиција (a,b) со парен k и $v_2(a)=k<v_2(b)=l$, Ана не смее да одигра во позиција $(b+\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a)$, бидејќи таа е $(k-1)-$среќна и Бојан ќе победи. На Ана и останува потез за позицијата $(a+\frac{1}{2}b,\frac{1}{2}b)$. Добиената позиција е исто така $k-$несреќна, бидејќи за $l>k+1$ имаме $v_2(a+\frac{1}{2}b)=k<v_2(\frac{1}{2}b)=l-1$, а додека за $l=k+1$ имаме $v_2(a+\frac{1}{2}b)>v_2(\frac{1}{2}b)=k$.

Според тоа, ако почетната позиција е $k-$ несреќна, тогаш Ана победува ако е k непарен, а нема победник ако е k парен број.

4. Определи ги сите прости броеви p такви што $3p^{q-1}+1$ е делител на 11^p+17^p.

Решение. За $p=2$ непосредно се проверува дека задачата нема решение. Понатаму, нека $p>2$.

Бидејќи $N=11^p+17^p\equiv 4(\mathrm{mod}\,8)$, следува дека $8\nmid 3p^{q-1}+1>4$. Да разгледаме некој непарен прост делител r на бројот $3p^{q-1}+1$. Јасно, $r\notin\{3,11,17\}$. Ако $n\in\mathbb{Z}$ е таков што $17n\equiv -1(\mathrm{mod}\,r)$, тогаш $r\mid n^pN\equiv m^p-1(\mathrm{mod}\,r)$, каде $m=11n$. Значи, редот на бројот m по модул r е делител на p, т.е. $\mathrm{ord}_r(m)\in\{1,p\}$. Притоа, ако $\mathrm{ord}_r(m)=1$, имаме $r\mid m-1\equiv(11+17)n(\mathrm{mod}\,r)$, што како единствена можност дава $r=7$. Од друга страна, ако $\mathrm{ord}_r(m)=p$, тогаш $p\mid r-1$. Според тоа, канониската факторизација на бројот $3p^{q-1}+1$ има облик

$$3p^{q-1}+1=2^a7^b\,p_1^{c_1}p_2^{c_2}...p_k^{c_k}\,, \qquad (*)$$

каде $p_i\notin\{2,7\}$ се прости броеви такви што $p_i\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$.

Видовме дека $a\leq 2$. Според тоа, ако $p=7$, тогаш $b=0$, а во спротивно

$$\tfrac{11^p+17^p}{28}=11^{p-1}-11^{p-2}17+11^{p-3}17^2-...+17^{p-1}\equiv 4^{p-1}p(\mathrm{mod}\,7)\,,$$

па 11^p+17^p не е делив со 7^2. Во двата случаја е $b\leq 1$.

За $q=2$ од (*) добиваме

$$3p+1=2^a7^b\,p_1^{c_1}p_2^{c_2}...p_k^{c_k}\,,$$

па како важи $p_i\geq 2p+1$ ова е можно само ако $c_i=0$ за секој i, т.е. $3p+1=2^a7^b\in\{2,4,14,28\}$. Од овде не добиваме ниту едно решение.

Останува случајот $q>2$, а тогаш имаме $4\mid 3p^{q-1}+1$, т.е. $a=2$. Сега во (*) десната страна е конгруентна со 4 или 28 по модул p, од каде што следува $p=3$. Во овој случај $3^q+1\mid 6244$, што важи само за $q=3$. Навистина, парот $(p,q)=(3,3)$ е решение на задачата.