Primjena metode simetričnih polinoma u rješavanju nekih zadataka

Petar Vranjković, Zadar

Na jednom stručno-metodičkom skupu za učitelje i nastavnike matematike, između ostalog, bilo je govora o metodama koje se koriste za rješavanje raznih zadataka. Točnije, bio je prezentiran jedan popis manje-više poznatih metoda. Palo mi je, odmah, napamet da bi u popis valjalo uvrstiti i metodu simetričnih polinoma. Eto, to je bio neposredni povod za ovaj članak. Razloga ima, dakako, više. Recimo samo jedan, rad s nadarenim učenicima.

Metoda simetrije

Općenito se može reći da je načelo simetrije jedno od osnovnih načela na kojima se temelje mnoge pojave. Stoga valja razvijati osjećaj za primjenu simetričnih formula, u bilo kojoj mogućoj situaciji, ali svakako čuvati mjeru kako se ne bi prešlo u formalizam. Korist od ove metode ćemo pokazati na određen način i u ovome članku, a lijepo se može vidjeti i zašto se njome služiti.

Polinom $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, od n varijabli $x_1, \ldots, x_n$, je simetričan ako se njegova vrijednost ne mijenja bilo kojom permutacijom njegovih varijabli. Npr. $P(x_1, x_2) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2$ je simetričan polinom jer je $P(x_1, x_2) = P(x_2, x_1)$. Također je simetričan polinom $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1x_2x_3$, jer vrijedi $P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1, x_3, x_2) = P(x_2, x_1, x_3) = P(x_2, x_3, x_1) = P(x_3, x_1, x_2) = P(x_3, x_2, x_1)$. Ali $P(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2$ nije simetričan polinom jer postoje x_1, $x_2 \in \mathbf{R}$ takvi da je $P(x_1, x_2) \neq P(x_2, x_1)$. Ni polinom $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2 + x_2x_3^2$ nije simetričan, jer može biti $P(x_1, x_2, x_3) \neq P(x_2, x_1, x_3)$.

U teoriji, kao i u primjenama, posebnu važnu ulogu imaju osnovni simetrični polinomi, a to su:

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \\ p_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\ p_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n, \\ &\ \vdots \\ p_n &= x_1x_2 \ldots x_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Ako u (1) uvrstimo $n = 2$, imamo:

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \\ p_1 &= x_1 + x_2, \\ p_2 &= x_1 x_2, \end{aligned} \tag{1'}$$

a to su Vièteove formule, i pripadna kvadratna jednadžba glasi $x^2 - p_1 x + p_2 = 0$.

Sasvim slično dobijemo i algebarsku jednadžbu n-tog stupnja

$$x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n p_n = 0. \tag{2}$$

Osim ovih osnovnih simetričnih polinoma, promatramo i ove simetrične polinome:

$$\begin{aligned} s_0 &= n, \\ s_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\ s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \\ &\vdots \\ s_k &= x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k. \end{aligned} \tag{3}$$

Ti se polinomi nazivaju zbrojevi potencija ili Newtonovi polinomi. Naglasimo da je svaki polinom $P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ kojem su varijable osnovni simetrični polinomi $p_1, \ldots, p_n$ također simetričan polinom.

Što mi želimo?

Želimo ispitati da li postoji veza među tim simetričnim polinomima.

U ovome članku ćemo se ograničiti na polinome s dvije odnosno tri varijable.

Najprije postavljamo pitanje da li se Newtonovi polinomi mogu izraziti u funkciji osnovnih simetričnih polinoma. Prvo ćemo razmotriti Newtonove polinome $s_k = x_1^k + x_2^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ i osnovne simetrične polinome $p_1 = x_1 + x_2$ i $p_1 = x_1 x_2$. Evo jednog primjera.

Primjer 1. Newtonove polinome s_1 i s_2 napišimo pomoću osnovnih simetričnih polinoma.

Rješenje.

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 = p_1, \\ s_2 &= x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = p_1^2 - 2p_2. \end{aligned}$$

Ovaj primjer nije iznimka. Vrijedi naime

Poučak 1. *Za Newtonove polinome $s_k = x_1^k + x_2^k$, $k \in \mathbf{N}_0$ vrijedi Newtonova formula*

$$s_k = p_1 s_{k-1} - p_2 s_{k-2}, \quad k \geqslant 3. \tag{4}$$

Dokaz. Za svaki $k \geqslant 3$ imamo

$$s_{k-1} = x_1^{k-1} + x_2^{k-1}. \tag{5}$$

Sada (5) pomnožimo s p_1, pa dobijemo:

$$\begin{aligned} p_1 s_{k-1} &= p_1 x_1^{k-1} + p_1 x_2^{k-1} = (x_1 + x_2) x_1^{k-1} + (x_1 + x_2) x_2^{k-1} \\ &= x_1^k + x_2^k + x_1 x_2 (x_1^{k-2} + x_2^{k-2}) = s_k + p_2 s_{k-2}. \end{aligned}$$

Odavde neposredno dobijemo (4).

Poučak 2. (osnovni poučak za Newtonove polinome) *Za svaki Newtonov polinom $s_k(x_1, x_2)$ postoji polinom $P(p_1, p_2)$ takav da vrijedi*

$$s_k(x_1, x_2) = P(p_1, p_2).$$

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Baza indukcije. U primjeru 1 smo pokazali da je tvrdnja istinita za $k = 1$ i $k = 2$.

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za polinome s_{k-2} i s_{k-1}, tj. postoje polinomi $P_1(p_1, p_2)$ i $P_2(p_1, p_2)$ takvi da je $s_{k-2} = P_1(p_1, p_2)$ i $s_{k-1} = P_2(p_1, p_2)$. Prema formuli (4) vrijedi

$$s_k = p_1 P_2(p_1, p_2) - p_2 P_1(p_1, p_2)$$

iz čega je očito da je desna strana polinom u varijablama p_1 i p_2. Time je dokaz završen.

Primijetimo međutim, da pomoću formule (4) možemo s_k izraziti pomoću p_1 i p_2 za bilo koji $k \geqslant 3$. Tako je za $k = 3$

$$s_3 = p_1 s_2 - p_2 s_1 = p_1(p_1^2 - 2p_2) - p_2 p_1 = p_1^3 - 3p_1 p_2. \tag{6}$$

Slično dobijemo za $k = 4$ i $k = 5$

$$s_4 = p_1^4 - 4p_1^2 p_2 + 2p_2^2, \tag{7}$$

$$s_5 = p_1^5 - 5p_1^3 p_2 + 5p_1 p_2^2. \tag{8}$$

I tako dalje.

Sada se prirodno postavlja pitanje prikaza bilo kojeg simetričnog polinoma u funkciji osnovnih simetričnih polinoma.

Pogledajmo opet jedan primjer.

Primjer 2. Polinom $P(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + 4x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^2$ napisati u obliku polinoma $Q(p_1, p_2)$.

Rješenje. $P(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 4(x_1 x_2)^2 = p_2 p_1 + 4p_2^2$.

Ni ovaj primjer nije iznimka. To što on govori vrijedi općenito, a sadržano je u osnovnom poučku o simetričnim polinomima. Evo toga poučka.

Poučak 3. Svaki simetrični polinom $P(x_1, x_2)$ može se na jednoznačan način prikazati u obliku polinoma $Q(p_1, p_2)$.

Dokaz. Svaki simetrični polinom $P(x_1, x_2)$ javlja se u ovim oblicima monoma:

1° $ax_1^kx_2^k$,

2° $bx_1^nx_2^m$, $n < m$, i zbog simetričnosti $bx_1^mx_2^n$.

Idemo redom.

1° $ax_1^kx_2^k = a(x_1x_2)^k = ap_2^k$.

2° $bx_1^nx_2^m + bx_1^mx_2^n = bx_1^nx_2^n(x_2^{m-n} + x_1^{m-n}) = bp_2^ns_{m-n}$.

Kako s_{m-n} možemo prikazati pomoću p_1 i p_2 (poučak 2) to je dokaz poučka 3 završen.

Valja primijetiti da nam dokaz ovog poučka daje i učinkoviti postupak kojim možemo simetrični polinom prikazati u funkciji p_1 i p_2.

Napomena. Spomenuti poučci mogu se poopćiti na n varijabli.

Zadatak 1. Riješi sustav jednadžbi

$$xy = 5,$$
$$x^4 + y^4 = 626.$$

Rješenje. Lijeve strane u zadanim jednadžbama su simetrični polinomi pa se mogu prikazati pomoću p_1 i p_2. Tako imamo

$$xy = p_2 = 5,$$
$$x^4 + y^4 = s_4 = p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 2p_2^2 = 626.$$

Ako u drugu jednadžbu uvrstimo $p_2 = 5$, dobijemo

$$p_1^4 - 20p_1^2 - 576 = 0.$$

Ova bikvadratna jednadžba ima rješenja: $p_1^2 = -16$, $p_1^2 = 36$. Dakle, naš je sustav ekvivalentan sustavima:

1° $x + y = 6$	2° $x + y = -6$	3° $x + y = 4i$	4° $x + y = -4i$
$xy = 5$	$xy = 5$	$xy = 5$	$xy = 5$

Riješimo 1°. Prema Vièteovim formulama x i y su rješenja jednadžbe $z^2-6z+5 = 0$, tj. $z_1 = 1 = x$, $z_2 = 5 = y$, a zbog simetrije imamo $x = 5$, $y = 1$.

Analogno se rješavaju i ostali slučajevi, pa se tako dobije skup svih rješenja

$$S = \{(1,5), (5,1), (-1,-5), (-5,-1), (-i,5i), (5i,-i), (-5i,i), (i,-5i)\}.$$

Zadatak 2. Riješi sustav jednadžbi

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91,$$
$$x^2 + xy + y^2 = 13.$$

Rješenje. Slično, kao u prethodnom primjeru, dobijemo:

$$p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 3p_2^2 = 91,$$
$$p_1^2 - p_2 = 13.$$

Ako p_2 iz druge jednadžbe uvrstimo u prvu jednadžbu, nakon sređivanja imamo $p_1^2 = 16$ i $p_2 = 3$. Prema tome ekvivalentni sustavi su:

1° $p_1 = -4$	2° $p_1 = 4$
$p_2 = 3$	$p_2 = 3$

odnosno

$$\begin{aligned} x+y &= -4, \qquad & x+y &= 4,\\ xy &= 3, & xy &= 3. \end{aligned}$$

Konačni skup rješenja je

$$S=\{(-3,-1),(-1,-3),(1,3),(3,1)\}.$$

Zadatak 3. Rastaviti na proste faktore polinom

$$P(x,y)=x^3y+xy^3+2x^2y^2-x^3y^2-x^2y^3+xy-x-y.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} P(x,y) &= xy(x^2+y^2)+2(xy)^2-(xy)^2(x+y)+xy-(x+y)\\ &= p_2(p_1^2-2p_2)+2p_2^2-p_2^2p_1+p_2-p_1=(p_1-p_2)(p_1p_2-1)\\ &= (x+y-xy)((x+y)xy-1). \end{aligned}$$

Zadatak 4. Skratiti razlomak

$$f(a,b)=\frac{a^3-2a^2b-2ab^2+b^3}{a^5-5a^3b^2-5a^2b^3+b^5}.$$

Rješenje. Za $p_1=a+b$ i $p_2=ab$ imamo

$$f(a,b)=\frac{p_1^3-3p_1p_2-2p_2p_1}{p_1^5-5p_1^3p_2+5p_1p_2^2-5p_2^2p_1}=\frac{p_1(p_1^2-5p_2)}{p_1^3(p_1^2-5p_2)}=\frac{1}{p_1^2}=\frac{1}{(a+b)^2}.$$

Zadatak 5. Riješi u skupu $\mathbf{R}$ jednadžbu

$$2-\sqrt[4]{15+x}=\sqrt[4]{1-x}.$$

Rješenje. Neka je $a=\sqrt[4]{15+x}$, $b=\sqrt[4]{1-x}$. Dobijemo

$$\begin{aligned} a^4+b^4 &= 16,\\ a+b &= 2. \end{aligned}$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned} p_1^4-4p_1^2p_2+2p_2^2 &= 16,\\ p_1 &= 2, \end{aligned}$$

odnosno $p_2^2-8p_2=0$, tj. $p_2=0$ ili $p_2=8$, što daje ove sustave:

$$\begin{aligned} p_1 &= 2, \qquad & p_1 &= 2,\\ p_2 &= 0, & p_2 &= 8. \end{aligned}$$

To znači da je

$$\begin{aligned} a+b &= 2, \qquad & a+b &= 2,\\ ab &= 0, & ab &= 8, \end{aligned}$$

pa je u prvom slučaju $a=0$, $b=2$, i zbog simetrije $a=2$, $b=0$. U drugom slučaju nemamo realnih rješenja. Sada imamo $\sqrt[4]{15+x}=0$ što daje $x=-15$, odnosno $\sqrt[4]{15+x}=2$, a to daje $x=1$. Nakon provjere utvrđujemo da je skup rješenja

$$S=\{-15,1\}.$$

Zadatak 6. Riješi jednadžbu

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{35}{12}.$$

Rješenje. Uvedemo li zamjenu $\sqrt{1-x^2} = y$, dobijemo

$$x^2 + y^2 = 1. \qquad (*)$$

Sada zadana jednadžba glasi: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{35}{12}$ odnosno $\frac{x+y}{xy} = \frac{35}{12}$, i dalje $\frac{p_1}{p_2} = \frac{35}{12}$, pa je

$$p_1 = 35k, \quad p_2 = 12k. \qquad (**)$$

Iz $(*)$ izlazi $s_2 = p_1^2 - 2p_2 = 1$, pa zbog $(**)$, nakon sređivanja dobijemo:

$$1225k^2 - 24k - 1 = 0,$$

a rješenja te jednadžbe su $k_1 = \frac{1}{25}$ i $k_2 = -\frac{1}{49}$. Sada prema $(**)$ dobijemo dva ekvivalentna sustava jednadžbi:

$$1^\circ \quad x + y = \frac{7}{5}, \qquad 2^\circ \quad x + y = -\frac{5}{7},$$

$$xy = \frac{12}{25}, \qquad xy = -\frac{12}{49}.$$

Prvi sustav daje dva rješenja $x_1 = \frac{3}{5}$ i $x_2 = \frac{4}{5}$, a drugi još $x_3 = \frac{-5+\sqrt{73}}{14}$ i $x_4 = \frac{-5-\sqrt{73}}{14}$. Provjerom utvrđujemo da je skup svih rješenja

$$S = \left\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{\sqrt{73}-5}{14}\right\}.$$

Sada ćemo promatrati osnovne simetrične polinome od tri varijable:

$$p_1 = x_1 + x_2 + x_3,$$
$$p_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$
$$p_3 = x_1x_2x_3,$$

i Newtonove polinome $s_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Tada imamo:

$$\begin{aligned} s_0 &= x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 = 3 = 3p_0, \\ s_1 &= p_1, \\ s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ &= p_1^2 - 2p_2. \end{aligned}$$

Analogno formuli (4) lako možemo dobiti Newtonovu formulu

$$s_k = p_1 s_{k-1} - p_2 s_{k-2} + p_3 s_{k-3}, \quad k \geqslant 3. \qquad (9)$$

I opet uočimo da pomoću formule (9) možemo s_k izraziti pomoću p_1, p_2 i p_3 za $k \geqslant 3$. Tako je za $k = 3$,

$$\begin{aligned} s_3 &= p_1 s_2 - p_2 s_1 + p_3 s_0 = p_1(p_1^2 - 2p_2) - p_2 p_1 + 3p_3 \\ &= p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3, \end{aligned} \qquad (10)$$

a za $k = 4$ i $k = 5$ dobijemo:

$$s_4 = p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 2p_2^2 + 4p_1p_3, \tag{11}$$

$$s_5 = p_1^5 - 5p_1^3p_2 + 5p_1p_2^2 + 5p_1^2p_3 - 5p_2p_3. \tag{12}$$

I tako dalje.

A sada zadaci, odnosno primjena.

Zadatak 7. Ako je

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 1, \end{aligned}$$

onda vrijedi: $xy + xz + yz = 0$ i $xyz = 0$. Dokazati.

Rješenje. Lijeve su strane u tim jednadžbama simetrični polinomi pa se mogu prikazati pomoću osnovnih simetričnih polinoma. Tako dobijemo:

$$\begin{aligned} &p_1 = 1, \\ &p_1^2 - 2p_2 = 1, \\ &p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3 = 1. \end{aligned}$$

Ovaj se sustav lagano rješava, pa dobijemo: $p_2 = p_3 = 0$. Prema tome imamo $xy + xz + yz = p_2 = 0$, $xyz = p_3 = 0$. Time je dokaz dovršen.

Zadatak 8. Sustav

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 15, \\ x^4 + y^4 + z^4 &= 35 \end{aligned}$$

ima realno rješenje (x, y, z) za koje vrijedi $x^2 + y^2 + z^2 < 10$. Naći $x^5 + y^5 + z^5$.

Rješenje. Polinomi s lijeve strane u zadanom sustavu su simetrični, pa vrijedi:

$$\begin{aligned} &p_1 = 3, \\ &p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3 = 15, \\ &p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 2p_2^2 + 4p_1p_3 = 35. \end{aligned}$$

Ovaj sustav daje ova rješenja:

$$\begin{array}{lll} p_1 = 3, & p_2 = 1, & p_3 = -1; \\ p_1 = 3, & p_2 = -1, & p_3 = -7. \end{array}$$

Kako mora biti $x^2 + y^2 + z^2 < 10$, onda je $p_1^2 - 2p_2 < 0$, pa ovaj uvjet određuje da mora vrijediti jedino $p_1 = 3$, $p_2 = 1$, $p_3 = -1$. Sada imamo

$$x^5 + y^5 + z^5 = s_5 = p_1^5 - 5p_1^3p_2 + 5p_1p_2^2 + 5p_1^2p_3 - 5p_2p_3 = 83.$$

Zadatak 9. Rastavi na faktore polinom

$$P(x,y,z) = (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3.$$

Rješenje. Uvedimo zamjene:

$$\left.\begin{aligned} a &= x-y \\ b &= y-z \\ \underline{c} &\underline{= z-x} \end{aligned}\right\} +$$

$$a+b+c = 0 = p_1$$

Sada imamo $P(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3$, a to je simetrični polinom pa vrijedi $P(a,b,c) = p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3 = 3p_3 = 3abc$. Prema tome imamo

$$P(x,y,z) = 3(x-y)(y-z)(z-x).$$

Zadatak 10. Ako su x, y, $z \in \mathbf{Z}$, a $x+y+z$ je djeljiv sa 6, onda je $x^3+y^3+z^3$ djeljiv sa 6. Dokazati.

Rješenje. Prema Newtonovoj formuli $s_3 = p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3$ dobivamo

$$x^3+y^3+z^3 = (x+y+z)^3 - 3(x+y+z)(xy+xz+yz) + 3xyz.$$

Sada treba dokazati da je i treći pribrojnik $3xyz$ djeljiv sa 6. Dovoljno je utvrditi da je bar jedan od brojeva z, y, z paran. Pretpostavimo da su sva tri broja neparna. Onda je i njihov zbroj neparan što je u suprotnosti s uvjetom u zadatku da je $x+y+z$ paran. Prema tome bar jedan od njih je paran, pa je $3xyz$ djeljiv sa 6. Time je dokaz završen.

Zadatak 11. Duljine stranica trokuta su rješenja jednadžbe $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$. Naći njegovu površinu.

Rješenje. Prema Viѐteovim formulama, odnosno formulama (1'), imamo

$$\begin{aligned} &x_1+x_2+x_3 = a = p_1, \\ &x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = b = p_2, \\ &x_1x_2x_3 = c = p_3. \end{aligned}$$

Poluopseg je $s = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{2} = \dfrac{p_1}{2} = \dfrac{a}{2}$ pa je

$$\begin{aligned} s - x_1 &= \frac{p_1}{2} - x_1, \\ s - x_2 &= \frac{p_1}{2} - x_2, \\ s - x_3 &= \frac{p_1}{2} - x_3. \end{aligned}$$

Prema Heronovoj formuli za površinu trokuta imamo

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{p_1}{2}\Big(\frac{p_1}{2} - x_1\Big)\Big(\frac{p_1}{2} - x_2\Big)\Big(\frac{p_1}{2} - x_3\Big) \\ &= \frac{p_1}{16}(p_1^3 - 2p_1^2x_1 - 2p_1^2x_2 - 2p_1^2x_3 + 4p_1x_1x_2 + 4p_1x_1x_3 + 4p_1x_2x_3 - 8x_1x_2x_3) \\ &= \frac{p_1}{16}(4p_1p_2 - p_1^3 - 8p_3), \\ P &= \frac{1}{4}\sqrt{a(4ab - a^3 - 8c)}. \end{aligned}$$