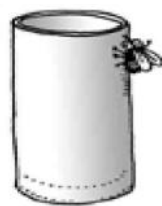


Ристо Малчески
Скопје

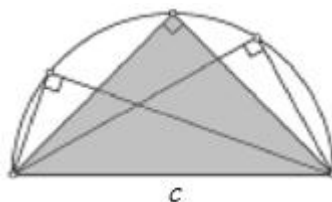
КАКО ДА И ПОМОГНЕТЕ НА МУВА КОЈА НЕ ЗНАЕ ГЕОМЕТРИЈА (трет дел)

Во [4] и [5] се разгледани неколку екстремални проблеми, за чие решавање се користени елементарни знаења од геометријата. Понатаму, во [6] дополнително се разгледани екстремални проблеми поврзани со коцката и квадарот и истите се решени со помош на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина. Во продолжение дополнително ќе презентираме уште неколку екстремални проблеми, кои исто така ќе бидат решени со помош на елементарни геометриски тврдења и неравенствата меѓу средините.



Задача 1. Докажи, дека од сите правоаголни триаголници со зададена должина на хипотенузата c најголема плоштина има рамнокракиот правоаголен триаголник.

Решение. *Прв начин.* Според Талесовата теорема темињата на сите правоаголни триаголници со хипотенуза c припаѓаат на полукружницата со дијаметар c (цртеж десно). Бидејќи хипотенузата на сите триаголници е заедничка страна, најголема плоштина ќе



има триаголникот кој има најголема висина над оваа страна. Јасно, тоа е рамнокракиот триаголник, чие трето теме е најоддалечено од дијаметарот на кружницата. Висината на овој триаголник е еднаква на $\frac{c}{2}$, па затоа неговата плоштина е $P = \frac{c^2}{4}$.

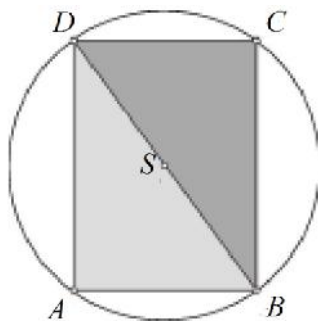
Втор начин. Нека правоаголниот триаголник со хипотенуза c има катети a и b . Од неравенствата меѓу геометриската, аритметичката и квадратната средина, како и од Питагоровата теорема следува

$$P = \frac{1}{2}ab \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{c^2}{4},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a = b$, т.е. ако и само ако правоаголниот триаголник е рамнокрак, што и требаше да се докаже. ■

Задача 2. Докажи, дека од сите правоаголници впишани во кружница со радиус r , најголема плоштина има квадратот.

Решение. Прв начин. Нека во кружница со радиус r е впишан правоаголник $ABCD$. Тогаш неговата плоштина е два пати поголема од плоштината на $\triangle ABD$, чија хипотенуза е еднаква на $2r$. Значи, плоштината на правоаголникот $ABCD$ ќе биде најголема кога плоштината на $\triangle ABD$ ќе биде најголема. Според задача 1 плоштината на $\triangle ABD$ е најголема ако и само ако $\overline{AB} = \overline{AD}$, т.е. ако и само ако правоаголникот $ABCD$ е квадрат и тогаш



$$P = 2 \cdot \frac{(2r)^2}{4} = 2r^2.$$

Втор начин. Ако должините на страните на правоаголникот се a и b , тогаш аналогно како во задача 2 наоѓаме

$$P = ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{(2r)^2}{2} = 2r^2,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a = b$. Значи, правоаголникот $ABCD$ има најголема плоштина ако и само ако е квадрат. ■

Задача 3. Дадена отсечка со должина d подели ја на две отсечки, со должини a и b така што производот ab ќе биде најголем можен.

Решение. Прв начин. Должините на двете отсечки се a и b и важи $a + b = d$, т.е. $b = d - a$. За производот ab добиваме

$$ab = a(d - a) = ad - a^2 = \frac{1}{4}d^2 - \left(a - \frac{d}{2}\right)^2 \leq \frac{d^2}{4}.$$

Притоа, најголемата можна вредност на ab е $\frac{d^2}{4}$ и истата се добива кога $a - \frac{d}{2} = 0$, т.е. $a = b = \frac{d}{2}$.

Втор начин. Должините на двете отсечки се a и b и важи $a + b = d$. Од неравенството меѓу геометриската и аритметичката средина следува

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a = b = \frac{d}{2}$ и тоа е бараната поделба. ■

Забелешка 1. Во претходната задача всушност докажавме дека од сите правоаголници со периметар $2d = 2(a + b)$ најголема плоштина има квадратот чија страна е еднаква на $\frac{d}{2}$.

Задача 4. Во даден квадрат со страна a впиши квадрат кој има најмала можна плоштина.

Решение. *Прв начин.* Темињата на впишаниот квадрат ги делат страните на дадениот квадрат на делови чии должини да ги означиме со x и y , каде $x + y = a$. За плоштината на впишаниот квадрат имаме

$$P = a^2 - 4 \frac{xy}{2} = a^2 - 2xy$$

и таа е најмала можна ако и само ако производот xy е најголем можен. Според задача 3

производот xy , при услов $x + y = a$ е најголем можен за $x = y = \frac{a}{2}$. Во овој

случај плоштината на впишаниот квадрат е $P = a^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$.

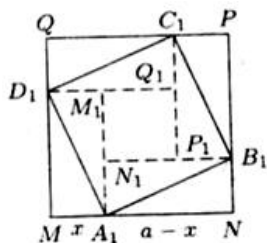
Втор начин. Темињата на впишаниот квадрат ги делат страните на дадениот квадрат на делови чии должини да ги означиме со x и $y = a - x$. Тогаш плоштината на впишаниот квадрат ќе биде

$$P = a^2 - 4 \frac{x(a-x)}{2} = a^2 - 2ax + 2x^2 = \frac{a^2}{2} + 2\left(\frac{a}{2} - x\right)^2.$$

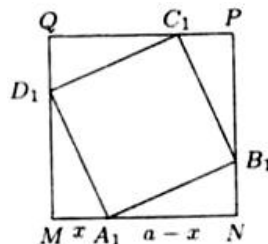
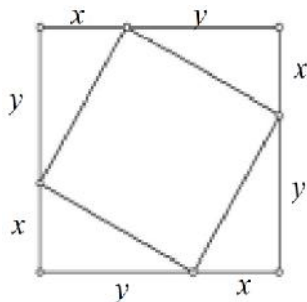
Јасно, плоштината ќе биде најмала ако и само ако $x = \frac{a}{2}$, при што $P = \frac{a^2}{2}$.

Трет начин. Нека е даден квадратот $MNPQ$ и во него нека е конструиран квадратот $A_1B_1C_1D_1$ (види десно). Триаголниците MA_1D_1 , NB_1A_1 , PC_1B_1 и QD_1C_1 се складни и притоа важи

$$P_{\square A_1B_1C_1D_1} + 4P_{\triangle MA_1D_1} = P_{\square MNPQ}.$$



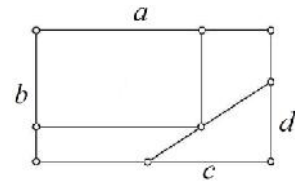
Конструираме триаголници $M_1A_1D_1$, $N_1B_1A_1$, $P_1C_1B_1$ и $Q_1D_1C_1$ складни соодветно на триаголниците MA_1D_1 , NB_1A_1 , PC_1B_1 и QD_1C_1 (цртеж лево). Збирот на плоштините на овие триаголници не може да е поголем од плоштината на квадратот



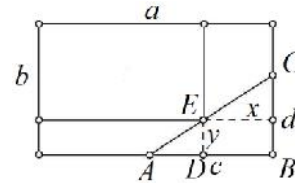
$A_1B_1C_1D_1$, бидејќи тогаш збирот на плоштините на впишаниот квадрат $A_1B_1C_1D_1$ и триаголниците MA_1D_1 , NB_1A_1 , PC_1B_1 и QD_1C_1 ќе биде поголем од плоштината на квадратот $MNPQ$.

Ако збирот на плоштините на триаголниците $M_1A_1D_1$, $N_1B_1A_1$, $P_1C_1B_1$ и $Q_1D_1C_1$ е помал од плоштината на квадратот $A_1B_1C_1D_1$, тогаш квадратот $M_1N_1P_1Q_1$ нема да е покриен. Должината на неговата страна е $a - 2x$, а плоштината $(a - 2x)^2$. Според тоа, плоштината на квадратот $A_1B_1C_1D_1$ ќе биде најмала ако $(a - 2x)^2 = 0$, т.е. $x = \frac{a}{2}$ и притоа $P = \frac{a^2}{2}$. ■

Задача 5. Од правоаголна плоча со должини на страни a и b скршен е дел во облик на правоаголен триаголник со катети c и d (цртеж десно). Од преостанатиот дел треба да се исече нова правоаголна плоча со најголема можна плоштина. Колкава е таа плоштина?



Решение. Да означиме како на цртежот десно. Триаголниците ABC и ADE се слични, па затоа $c:d = (c-x):y$, од каде добиваме $y = d - \frac{d}{c}x$. За плоштината на новата правоаголна плоча добиваме



$$P = (a - x)(b - y)$$

$$P = (a - x)(b - d + \frac{d}{c}x),$$

$$P = a(b - d) - \frac{d}{c}(x^2 - \frac{ad+dc-cb}{d}x),$$

$$P = a(b - d) + \frac{(ad+dc-cb)^2}{4cd} - \frac{d}{c}(x - \frac{ad+dc-cb}{2d})^2.$$

Забележуваме дека првите два члена во изразот добиен за плоштината на новата правоаголна плоча се константни, а додека третиот член е помал или еднаков на нула. Јасно, плоштината ќе биде најголема ако третиот член е еднаков на нула, т.е. ако $x = \frac{ad+dc-cb}{2d}$. Притоа најголемата можна плоштина на новата квадратна плоча ќе биде

$$P = a(b - d) + \frac{(ad+dc-cb)^2}{4cd},$$

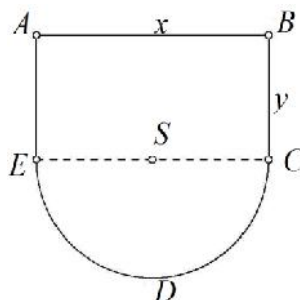
$$P = \frac{4abcd - 4acd^2 + a^2d^2 + d^2c^2 + c^2b^2 + 2acd^2 - 2abcd - 2bc^2d}{4cd},$$

$$P = \frac{a^2d^2 + d^2c^2 + c^2b^2 - 2bc^2d + 2abcd - 2acd^2}{4cd},$$

$$P = \frac{(ad+bc-cd)^2}{4cd}.$$

Но, $P = \frac{(ad+bc-cd)^2}{4cd}$ ќе биде решение на задачата ако и само само ако е исполнет условот $0 \leq x = \frac{ad+dc-cb}{2d} \leq c$, кој е еквивалентен со условот $\frac{b}{d} - 1 \leq \frac{a}{c} \leq \frac{b}{d} + 1$. Ако овој услов не е исполнет, од својствата на квадратната функција следува дека кога $x \in [0, c]$, тогаш плоштината P во или постојано ќе опаѓа или постојано ќе расте и соодветно плоштината ќе биде најголема или за $x = 0$ или за $x = c$. ■

Задача 6. Треба да се изгради канал со напречен пресек со плоштина P како што е прикажано на цртежот десно. Трошоците за изградба на каналот се пропорционални со периметарот на пресекот на каналот. Определи ги должината x на дијаметарот EC на полукружниот дел од каналот и висината BC на правоаголниот дел од каналот така што трошоците за негова изградба ќе бидат минимални.



Решение. При ознаки како на цртежот десно периметарот на напречниот пресек е $L = x + 2y + \frac{p}{2}x$. Притоа треба да важи $P = xy + \frac{p}{2}(\frac{x}{2})^2$, односно $y = \frac{1}{x}(P - \frac{p}{8}x^2)$. Ако замениме во изразот за периметарот, добиваме дека треба да определиме минимум од функцијата

$$L = x + 2\frac{1}{x}(P - \frac{p}{8}x^2) + \frac{p}{2}x,$$

т.е. функцијата

$$L = (1 + \frac{p}{4})x + \frac{2P}{x}. \quad (1).$$

Функцијата (1) е од видот $L = kx + \frac{n}{x}$, $k, n > 0$ и нејзиниот минимум елементарно ќе го определиме ако истата ја трансформираме на следниов начин:

$$\begin{aligned} L &= kx + \frac{n}{x} = \frac{kx^2 + n}{x} = \frac{(x\sqrt{k} - \sqrt{n})^2 + 2x\sqrt{kn}}{x} \\ &= \frac{(x\sqrt{k} - \sqrt{n})^2}{x} + 2\sqrt{kn}. \end{aligned}$$

Во последното равенство вториот собирок на десната страна не зависи од x , а првиот собирок е ненегативен, па затоа функцијата достигнува минимум кога првиот собирок е еднаков на 0, т.е. кога $x = \sqrt{\frac{n}{k}}$ и притоа $L_{\min} = 2\sqrt{kn}$. За функцијата (1) имаме $k = 1 + \frac{p}{4}$, $n = 2P$, па затоа периметарот L на каналот ќе биде најмал ако $x = 2\sqrt{\frac{2P}{4+p}}$ и тој е еднаков на $L_{\min} = \sqrt{2(4+p)P}$. Притоа, лесно се пресметува дека $y = \sqrt{\frac{2P}{4+p}} = \frac{x}{2}$. ■

Задачи за самостојна работа

1. Кој триаголник со должини на страни a и b има најголема плоштина?
2. Низ точка M која припаѓа на внатрешноста на $\angle xOy$ повлечи права која од аголот $\angle xOy$ отсекува триаголник со најголема плоштина.
3. Од сите триаголници со дадени основа AB и агол α наспроти неа определи го триаголникот кој има најголема плоштина.
4. Во дадена кружница впиши триаголник со најголема плоштина.

Литература

1. Devidé, V., Elementarno rešavanje nekih problem o ekstremima (2), Matka, 70, 2009-2010
2. Devidé, V., Elementarno rešavanje nekih problem o ekstremima (3), Matka, 71, 2009-2010
3. Вуковић, Љ., Квадрат у квадрату, Математички лист, XXXVI 6, Београд
4. Малчески, Р., Како да и помогнете на мува која не знае геометрија, Нумерус (Математички талент), Скопје, 1997 (2021)
5. Малчески, Р., Како да и помогнете на мува која не знае геометрија (втор дел), Математички талент, Скопје, 2023
6. Малчески, С., Докажување неравенства со разложување и со неравенствата меѓу средините (продолжение), Математички талент, Скопје, 2023
7. Симић, Б., Екстремне вредности површине троугла, Математички лист, Београд