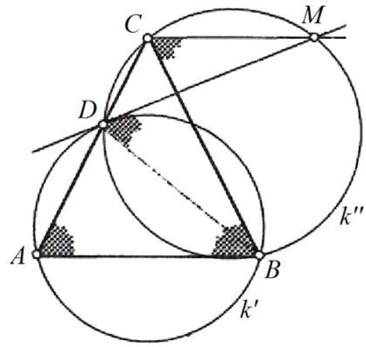
JMMO 1997

1. На страната AC на рамнокрак триаголник AB ($\overline{AC}=\overline{BC}$) избрана е произволна точка D и околу триаголниците ABD и BCD се опишани кружници k' и k'', соодветно. Тангентата на кружницата k' во точката D ја сече кружницата k'' во точката M. Докажи дека правите CM и AB се паралелни.

   Решение. Имаме $\measuredangle BDM=\measuredangle BCM$ како периферискi агли над ист кружен лак во k'' и $\measuredangle BDA=\measuredangle MBD$ како агол меѓу тангента и тетива на кружницата k' и периферискi агол над тетивата DB. Според условот $\measuredangle CAB=\measuredangle ABC$, па затоа



$$\measuredangle ABC=\measuredangle CAB=\measuredangle DAB$$
$$=\measuredangle MBD=\measuredangle BCM.$$

   Конечно, од теоремата на Талес следува $AB \parallel CM$

2. Рампо напишал неколку различни природни броеви и го поделил нивниот збир со нивниот производ. Потоа, го избришал најмалиот од запишаните броеви и повторно го поделил збирот на преостанатите броеви со нивниот производ. Се покажало дека вториот резултат е три пати поголем од првиот. Кој број го избришал Рампо?

   Решение. Нека a е избришаниот број, S е збирот на преостаните броеви, а P е нивниот производ. Тогаш

$$\frac{3(a+S)}{aP}=\frac{S}{P}, \text{ т.е. } \frac{1}{3}=\frac{1}{a}+\frac{1}{S}.$$

   Јасно, $a>3$. Понатаму, бидејќи $a<S$ имаме

$$\frac{1}{3}<\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{2}{a},$$

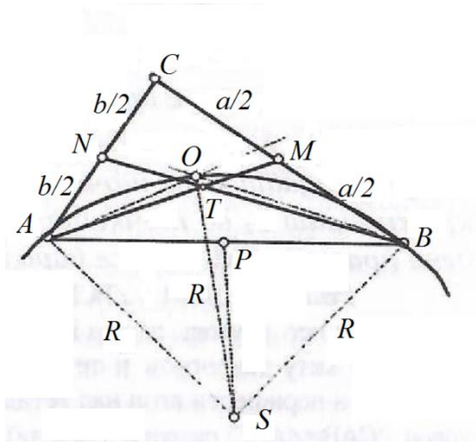
   па затоа $a<6$. Според тоа, $a=5$ или $a=4$. За $a=5$, добиваме $S=7{,}5$ и тоа не е природен број. Конечно, за $a=4$, добиваме $S=12$. Значи, Рампо го избришал бројот 4.

3. Во правоаголен триаголник ABC ($\measuredangle C=90^{\circ}$) дадени се тежишните линии $\overline{AB}=m$ и $\overline{BN}=n$. Нека O е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC. Изрази го радиусот R на опишаната кружница

околу триаголникот ABO преку m и n.

Решение. Од правоаголните триаголници AMC и BNC имаме

$$m^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} \text{ и } n^2 = a^2 + \frac{b^2}{4},$$



па затоа

$$m^2 + n^2 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2) = \frac{5}{4}c^2,$$

т.е. $c^2 = \frac{4}{5}(m^2 + n^2)$. Нека O е центарот на впишаната кружница на $\triangle ABC$ и S е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABO$. Тогаш

$$\measuredangle BAO + \measuredangle ABO = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45^\circ.$$

Понатаму, централниот агол е двапати поголем од периферискиот агол над истиот лак, па затоа

$$\measuredangle ASO = 2\measuredangle ABO = 2\frac{\beta}{2} = \beta \text{ и } \measuredangle BSO = 2\measuredangle BAO = 2\frac{\alpha}{2} = \alpha.$$

Значи,

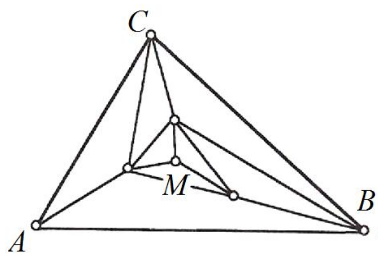
$$\measuredangle ASB = \measuredangle ASO + \measuredangle BSO = \beta + \alpha = 90^\circ,$$

т.е. $\triangle ABS$ е рамнокрк правоаголен. Оттука следува дека

$$R = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{5}(m^2 + n^2)}.$$

4. Во рамнината се дадени 1001 точка. Три од нив се темиња на триаголник во кој се наоѓаат преостанатите 998 точки. Сите точки се распоредени така што било кои три од нив не се колинеарни. Колку триаголници што не се преклопуваат формираат дадените триаголници?

Решение. Нека A, B, C се темињата на триаголникот во кој се наоѓаат преостанатите 998 точки, а точката M е една од внатрешните точки. Точката M е теме на определен број триаголници кои што не се преклопуваат, па збирот на внатрешните агли на сите тие триаголници е еднаков на 360°. Имаме 998 точки како што е точката M, па затоа збирот на внатрешните агли на триаголниците чии темиња се овие точки е $998 \cdot 360^\circ$. Ако на овој



збир се додаде 180° се добива збирот на внатрешните агли на сите триаголници кои што не се преклопуваат и чии темиња се дадените 1001 точка. Значи, бројот на сите триаголници е еднаков на

$$\frac{998\cdot 360+180^\circ}{180^\circ}=1997.$$

5. Определи ги реалните броеви a и b, $a\le b$ за кои се исполнети следниве услови:

а) за секои реални броеви x и y такви што $0\le y\le x$ и $x+5y=105$ важи $a\le x+y\le b$,

б) разликата $b-a$ е најмала.

Решение. Од $y\le x$ следува

$$x+3y+2x\ge x+3y+2y\text{, т.е. } 3(x+y)\ge x+5y\ge 105.$$

Според тоа, $a\le 35$. Бидејќи за $x=y=17,5$ важи $x+5y=105$, следува дека $a=35$. Од $y\ge 0$ следува $4y\ge 0$, па затоа $x+y+4y\ge x+y$, односно $105=x+5y\ge x+y$. Според тоа, $b\ge 105$. Бидејќи за $x=105$, $y=0$ важи $x+5y=105$ следува дека $b=105$.

Конечно, бараните броеви се $a=35$ и $b=105$, а притоа $b-a=70$.