XXII олимпијада

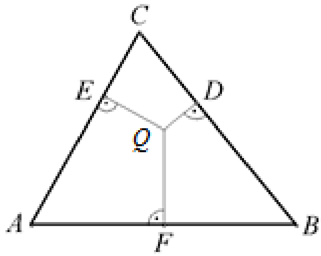
1. Нека Q е внатрешна точка во $\triangle ABC$ е нека D, E и F се нејзините ортогонални проекции на правите BC, CA и $AB,$ соодветно. Најди ги сите точки Q за кои збирот

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{QD}}+\frac{\overline{CA}}{\overline{QE}}+\frac{\overline{AB}}{\overline{QF}}$$

има најмала вредност.

Решение. *Прв начин*. Ако ги воведеме ознаките $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$, $c=\overline{AB}$, тогаш треба да го определиме минимумот на изразот

$$S=\frac{a}{QD}+\frac{b}{QE}+\frac{c}{QF}.$$



Ако со P ја означиме плоштината на триаголникот ABC, тогаш

$$2P=a\cdot\overline{QD}+b\cdot\overline{QE}+c\cdot\overline{QF}$$

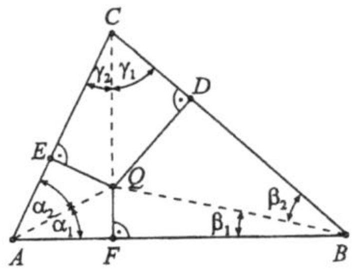
па според тоа

$$\begin{aligned}2PS&=a^2+b^2+c^2+bc(\frac{\overline{QF}}{\overline{QE}}+\frac{\overline{QE}}{\overline{QF}})+ca(\frac{\overline{QD}}{\overline{QF}}+\frac{\overline{QF}}{\overline{QD}})+ca(\frac{\overline{QD}}{\overline{QE}}+\frac{\overline{QE}}{\overline{QD}})\\&\geq a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab)\\&=(a+b+c)^2.\end{aligned}$$

Равенство е исполнето ако и само ако $\overline{QD}=\overline{QE}=\overline{QF}$, т.е. ако Q е центар на кружницата впишана во $\triangle ABC$. Тогаш дадениот израз има минимална вредност

$$S_{\min}=\frac{(a+b+c)^2}{2P}.$$

Втор начин. При ознаки како на цртежот десно имаме



$$\begin{aligned}\frac{\overline{BC}}{\overline{QD}}+\frac{\overline{CA}}{\overline{QE}}+\frac{\overline{AB}}{\overline{QF}}&=\frac{\overline{BD}+\overline{DC}}{\overline{QD}}+\frac{\overline{CE}+\overline{EA}}{\overline{QE}}+\frac{\overline{AF}+\overline{FB}}{\overline{QF}}\\&=\operatorname{ctg}\alpha_1+\operatorname{ctg}\beta_1+\operatorname{ctg}\beta_2+\operatorname{ctg}\gamma_1+\operatorname{ctg}\gamma_2+\operatorname{ctg}\alpha_2\\&=\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}+\frac{\sin(\beta_1+\beta_2)}{\sin\beta_1\sin\beta_2}+\frac{\sin(\gamma_1+\gamma_2)}{\sin\gamma_1\sin\gamma_2}\\&=\frac{2\sin\alpha}{\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\cos\alpha}+\frac{2\sin\beta}{\cos(\beta_1-\beta_2)-\cos\beta}+\frac{2\sin\gamma}{\cos(\gamma_1-\gamma_2)-\cos\gamma}.\end{aligned}$$

Последниот израз ќе биде минимален ако секој од собирците е монимален, т.е. секој од изразите

$$\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\cos\alpha, \cos(\beta_1-\beta_2)-\cos\beta, \cos(\gamma_1-\gamma_2)-\cos\gamma$$

е максимален, од што следува $\cos(\alpha_1-\alpha_2)=\cos(\beta_1-\beta_2)=\cos(\gamma_1-\gamma_2)=1$. Значи, $\alpha_1=\alpha_2, \beta_1=\beta_2, \gamma_1=\gamma_2$, т.е. Q е ценаторт на впишаната кружница во триаголникот ABC.

2. Дадени се броевите n и r $(1\le r\le n)$. Ги формираме сите подмножества од $\{1,2,...,n\}$ со r елементи и за секое подмножество го наоѓаме најмалиот елемент. Со $f(n,r)$ ја означуваме аритметичката средина на сите така добиени броеви. Докажи дека $f(n,r)=\frac{n+1}{r+1}$.

Решение. Бројот на сите $r-$подмножества од множеството $\{1,2,...,n\}$ е $\binom{n}{r}$. Едно од тием подмножества е $\{n-r+1, n-r+2,...,n\}$ и најмалиот елемент во него е $n-r+1$. Овој број е поголем од сите најмали броеви на другите подмножества. Бројот $k(=1,2,...,n-r+1)$ е минимален елемент во $\binom{n-k}{r-1}$ $r-$подмножествата од множеството $\{1,2,...,n\}$, па затоа

$$\begin{aligned} f(n,r) &= \frac{1}{\binom{n}{r}}\sum_{k=1}^{n-r+1} k\binom{n-k}{r-1} \\ &= \frac{1}{\binom{n}{r}}\left(\sum_{k=1}^{n-r+1}\binom{n-k}{r-1}+\sum_{k=2}^{n-r+1}\binom{n-k}{r-1}+...+\binom{n-k}{r-1}\right). \end{aligned}$$

Користејќи го равенството

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m+i}{m}=\binom{m+k+1}{m+1},$$

добиваме

$$f(n,r)=\frac{1}{\binom{n}{r}}\left(\binom{n}{r}+\binom{n-1}{r}+...+\binom{r}{r}\right)=\frac{1}{\binom{n}{r}}\binom{n+1}{r+1}=\frac{n+1}{r+1}.$$

3. Нека $m,n\in\mathbb{N}$, $(1\le m\le 1981, 1\le n\le 1981)$ се такви што ја задоволуваат равенката

$$(n^2-mn-m^2)^2=1.$$

Определи ја најголемата вредност на збирот m^2+n^2.

Решение. Прво во множеството природни броеви ќе ја решиме равенката $|n^2-mn-m^2|=1$. Ако $m=n$ добиваме $m=n=1$. Ако паротот (m,n), $m\ne n$ е решение на горната равенка тогаш важи

$$n^2-mn-m^2=1 \text{ или } m^2+mn-n^2=1.$$

Од $n^2=m^2+mn+1$ следува дека $n>m$. Од втората равенка следува

$$n-m=\frac{mn-1}{m+n}>0 \text{ т.е. } n>m.$$

Значи, во секој случај постои $k>0$ таков што $n=m+k$ и ако замениме во $n^2-mn-m^2=1$ добиваме дека $k^2+km-m^2=1$, т.е. парот (k,m) е решение на равенката. Според тоа, ако парот $(m,k+m)$ е решение на равенката, тогаш и парот (k,m) е решение на равенката. Важи и обратното, што значи дека ако парот (k,m) е решение на горната равенка, тогаш и парот $(m,k+m)$ е решение на оваа равенка. Ова значи дека парот $(n-m,m)$ индуцира нов пар (m,n). Сега, парот (1,1) е решение на равенката, па затоа последователно добиваме дека паровите

(1,1), (1,2), (2,3), (3,2), (5,8), (8,13), ..., (987, 1597), (1597, 2584), ...

се решенија на дадената равенка.

Според тоа, решенија на дадената равенка се паровите составени од последователните членови на низата на Фибоначи. Јасно, најголемата вредност на изразот m^2+n^2 при дадените услови е 987^2+1597^2.

4. а) Определи ги сите природни броеви n, $n\geq 3$ за кои постои множество од n последователни природни броеви со следното својство: најголемиот од овие броеви е делител на најмалиот заеднички содржател на останатите $n-1$ броеви.

б) За кои природни броеви n, $n\geq 3$ постои точно едно множество со ова својство?

Решение. Нека низата

$$a-n+1, a-n+2, a-n+3, ..., a-1, a \tag{1}$$

природни броеви ги задоволува условите на задачата, т.е. нека

$$a \mid \mathrm{NZS}(a-n+1,...,a-1)$$

Нека $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$ е канонична факторизација на бројот a на прости множители ($p_1<p_2<...<p_r$, $\alpha_j>0$ за $j=1,2,...,r$). Тогаш за секој $j\in\{1, 2,...,r\}$ постои $m\in\{1,2,...,n-1\}$, таков што $p_j^{\alpha_j} \mid (a-m)$. Бидејќи $p_j^{\alpha_j} \mid a$, добиваме дека $p_j^{\alpha_j}\leq n-1$ за секој $j\in\{1,2,...,r\}$. Ако $r=1$, тогаш

$$n\leq a=p_1^{\alpha_1}\leq n-1,$$

што не е можно. Значи, $r\geq 2$. Според тоа, постојат барем два прости броја помали од n, од што следува дека $n\geq 4$.

Ќе докажеме дека за секој $n\geq 4$ постои низа (1) која што ги задоволува условите на задачата, а за $n\geq 5$ постојат барем две такви низи. Според тоа, одговор на прашањето под а) е $n\geq 4$, а одговор на прашањето под б) е $n=4$.

Ако $n=4$, тогаш $p_1^{\alpha_1} \le 3$, $p_2^{\alpha_2} \le 3$, па затоа важи $r=2$, $p_1=2$, $p_2=3$, $\alpha_1=\alpha_2=1$, т.е. низа од облик (1) која што ги задоволува условите на задачата е 3, 4, 5, 6.

За $n=5$ постојат две такви низи: 2, 3, 4, 5, 6 и 8, 9, 10, 11, 12.

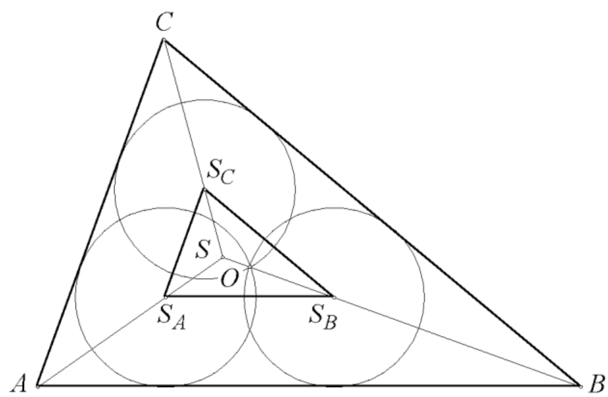
Нека $n \ge 6$. Со r, s, t да ги означиме природните броеви кои ги исполнуваат неравенствата $2^r \le n-1 < 2^{r+1}$, $3^s \le n-1 < 3^{s+1}$, $5^t \le n-1 < 5^{t+1}$. Нека во низата (1) $a=2^r 3^s$, односно $a=2^r 5^t$. Тогаш

$$n-1 < 2^{r+1} < 2^r 3 \le 2^r 3^s = a$$
$$n-1 < 2^{r+1} < 2^r 5 \le 2^r 5^t = a$$

Јасно, низите (1) за вака избран број a ги задоволуваат условите на задачата.

5. Низ точката O, која се наоѓа во внатрешноста на $\triangle ABC$, минуваат три кружници со еднакви радиуси, при што секоја од нив допира по две страни од $\triangle ABC$. Докажи дека точката O и центрите на опишаната и впишаната кружница на $\triangle ABC$ лежат на иста права.

Решение. Нека S_A, S_B, S_C се центрите на дадените кружници, така што S_A лежи на симетралата на аголот A од триаголникот ABC, итн. Тогаш, $S_A S_B \parallel AB$, $S_B S_C \parallel BC$, $S_C S_A \parallel CA$ и симетралите на аглите на $\triangle ABC$ се воедно симетрали и на аглите на $\triangle S_A S_B S_C$. Овие два триаголника имаат ист центар на впишана кружница, кој го означуваме со S. Точката S е центар на хомотетија χ која го пресликува $\triangle S_A S_B S_C$ во $\triangle ABC$.



Точката O е подеднакво оддалечена од S_A, S_B, S_C, т.е. таа е центар на кружницата опишана околу триаголникот $\triangle S_A S_B S_C$. Хомотетијата χ ја пресликува точката O во центарот S на кружницата опишана околу на триаголникот ABC. Затоа точката O, центарот на опишаната и центарот на впишаната кружница на $\triangle ABC$ лежат на една права.

6. Функцијата $f(x,y)$ ги задоволува условите

(1) $f(0,y)=y+1$,

(2) $f(x+1,0)=f(x,1)$ и

(3) $f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y))$

за секои x, $y\in\mathbb{N}_0$. Определи го $f(4,1981)$.

Решение. Од (1) и (2) добиваме $f(1,0)=f(0,1)=2$. Од последното равенство и од (1) и (3) при $x=0$ добиваме

$$f(1,y+1)=f(0,f(1,y))=f(1,y)+1,\text{ за } y\geq 0,$$

од што со индукција добиваме

$$f(1,y)=y+2,\text{ за } y\geq 0. \tag{4}$$

Од (2) и (4) следува $f(2,0)=f(1,1)=3$. Од (3) за $x=1$ и (4) се добива

$$f(2,y+1)=f(1,f(2,y))=f(2,y)+2,\text{ за } y\geq 0.$$

Користејќи ги овие два резултати со помош на математичка индукција добиваме

$$f(2,y)=2y+3,\text{ за } y\geq 0. \tag{5}$$

Ако во (3) ставиме $x=2$, тогаш од (5) добиваме

$$f(3,y+1)=f(2,f(3,y))=2f(3,y)+3,\text{ за } y\geq 0.$$

Од последното равенство и од равенството $f(3,0)=f(2,1)=5=2^3-3$ и со примена на индукција добиваме

$$f(3,y)=2^{y+3}-3,\text{ за } y\geq 0. \tag{6}$$

Ако во (3) ставиме $x=3$, тогаш од (6) добиваме

$$f(3,y+1)=f(3,f(4,y))=2^{f(4,y)+3}-3,\text{ за } y\geq 0.$$

Бидејќи $f(4,0)=f(3,1)=2^4-3$, со индукција добиваме

$$f(4,y)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}-3\ (y+3\text{ двојки}) \text{ за } y\geq 0,$$

односно

$$f(4,1981)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}-3\qquad(1984\text{ двојки}).$$