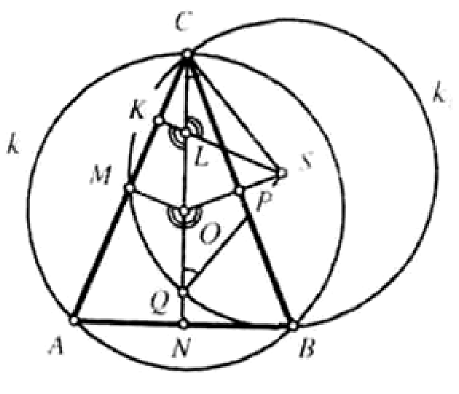
# ЈБМО 2004

1. Нека $x$ и $y$ се ненулти реални броеви такви што $x^2+y^2\neq 0$. Докажи дека
$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\leq\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

**Решение.** Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството
$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\leq\frac{\sqrt{2(x^2+y^2)}}{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$
Бидејќи $x^2-xy+y^2>0$, доволно е да се докаже дека
$$x+y\leq\sqrt{2(x^2+y^2)} \text{ и } x^2-xy+y^2\geq\frac{x^2+y^2}{2}.$$
Првото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата
$$(x+y)^2\leq 2(x^2+y^2),$$
$$2xy\leq x^2+y^2,$$
$$0\leq(x-y)^2,$$
а последното неравенство очигледно е точно. Второто неравенство исто така се сведува на неравенството $0\leq(x-y)^2$, со што доказптезавршен.

2. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC}=\overline{BC}$. Нека $M$ е средина на страната $AC$ и нека $l$ е права која минува низ точката $C$ и е нормална на $AB$. Кружницата низ $B,C$ и $M$ ја сече $l$ во точките $C$ и $Q$. Изрази го радиусот на кружницата опишана околу $\triangle ABC$ преку $m=\overline{CQ}$.

**Решение.** Нека $O$ е центарот на кружницата опишана околу $\triangle ABC$ и нека $S$ е центарот на кружницата $k_1$ која минува низ точките $B,C,M$. Понатаму, нека $K$ е средина на отсечката $MC$, $L$ е пресекот на $SK$ и $l$, $N$ е пресекот на $AB$ и $l$, $P$ е пресекот на $BC$ и $SO$ (цртеж десно).




Од $OM\perp AC$ и $SK\perp MC$ следува $LK\parallel OM$. Затоа $LK$ е средна линија на триаголникот $MOC$, што значи

$$\overline{CL}=\overline{LO}. \qquad (1)$$

Ги разгледуваме триаголниците $SLC$ и $SOQ$. Тогаш $\overline{SC}=\overline{SQ}$ (радиуси на кружницата $k_1$) и $\measuredangle SCL=\measuredangle SQO$ (триаголникот $SCQ$ е рамнокрак, $\overline{SC}=\overline{SQ}$). Понатаму, $\measuredangle SLC=\measuredangle NLK=180^\circ-\alpha$ (четириаголникот $ANLK$ е тетивен, $\measuredangle N=\measuredangle K=90^\circ$). Слично, од тетивниот четириаголник $NBPO$ ($\measuredangle N=\measuredangle P=90^\circ$) следува $\measuredangle SOQ=180^\circ-\beta$. Но, $\alpha=\beta$, па затоа $\measuredangle SLC=\measuredangle SOQ$, што заедно со претходно покажаното значи $\triangle SLC\cong\triangle SOQ$. Според тоа, $\overline{CL}=\overline{QO}$. Сега, ако го земеме предвид (1) добиваме $R=\overline{OC}=\frac{2}{3}\overline{QC}=\frac{2}{3}m$.

3. Ако $x$ и $y$ се природни броеви такви што броевите $3x+4y$ и $4x+3y$ се точни квадрати, докажи дека $x$ и $y$ се деливи со 7.

**Решение.** Нека $3x+4y=m^2$ и $4x+3y=n^2$. Тогаш $7(x+y)=m^2+n^2$, па затоа $7|m^2+n^2$. Понатаму, при делење на квадрат на природен број со 7 можни остатоци се 0, 1, 2 и 4, па затоа од $7|m^2+n^2$ следува $7|m^2$ и $7|n^2$. Но, 7 е прост број, па од $7|m^2$ и $7|n^2$ следува $7|m$ и $7|n$. Последното значи дека $7^2|m^2$ и $7^2|n^2$, од каде заклучуваме дека $7^2|m^2+n^2=7(x+y)$, што значи дека $7|x+y$. Од друга страна, добиваме $7|n^2-m^2=4x+3y-(3x+4y)=x-y$. Затоа $7|x+y+(x-y)=2x$ и $7|x+y-(x-y)=2y$, па како $(7,2)=1$ заклучуваме дека $7|x$ и $7|y$.

4. Даден е коневексен многуаголник со $n, n\geq 4$ темиња. Многуаголникот на произволен начин е поделен на триаголници така што темињата на триаголниците се истовремено и темиња на многуаголникот и никои два делбени триаголници немаат заеднички внатрешни точки. Триаголниците кои имаат две заеднички страни со многуаголникот се обоени со црна боја, триаголниците кои имаат точно една заедничка страна се обоени со црвена боја, а триаголниците кои немаат заедничка странасо многуаголникот се обоени со бела боја. Докажи дека црните триаголници се за два повеќе од белите.

**Решение.** Со $b,r$ и $w$ даги означиме соодветно броевите на црните, црвените и белите триаголници. Лесно се гледа дека многуаголникот е разложен на $n-2$ триаголници. Оттука добиваме

$$b+r+w=n-2. \qquad (1)$$

Секоја страна на многуаголникот е страна на точно еден триаголник добиен со разложувањето. Бидејќи секој од црните $b$ триаголници покрива по две страниц, а секој од црвените $r$ триаголници покрива по една страна, важи

$$2b+r=n. \qquad (2)$$

Ако ја одземеме (1) од (2) добиваме $b-w=2$, односно $b=w+2$.