OSJEČKI MATEMATIČKI LIST 12 (2012), 127-137

Neki osvrti na Pellovu jednadžbu

Željko Zrno * Teo Dragičević †

Sažetak

U ovom članku ćemo se upoznati sa jednim primjerom važne diofantske jednadžbe, koja je u literaturi poznata kao Pellova jednadžba $x^2 - dy^2 = 1, x, y \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N} \setminus \{1, 4, 9, ..., n^2, ...\}$. Dat ćemo nekoliko osvrta na rješavanje te jednadžbe: njeno fundamentalno rješenje, prikaz ostalih rješenja kojih ima beskonačno mnogo, geometrijsku interpretaciju Pellove jednadžbe, rekurzivne relacije za rješenja Pellove jednadžbe.

Ključne riječi: *jednadžba, fundamentalno rješenje, unimodularna transformacija, rekurzija.*

Some reviews on the Pell equation

Abstract

In this paper we will discuss a class of Diophant equations known in the literature as the Pellian equation, $x^2 - dy^2 = 1, x, y \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N} \setminus \{1, 4, 9, ..., n^2, ...\}$. We will give several approaches to solving the equation: the fundamental solution of the equation and relations to infinitely many other solutions, the geometric interpretation of the Pellian equation, and the recursive relations for the solutions of the Pellian equation.

Keywords: *equation, fundamental solutions, unimodular transformation, recursion.*

*Veleučilište Marko Marulić u Kninu, email:zeljko.zrno@veleknin.hr

†VPS "Minerva", Dugopolje

1 Uvod

Diofant, grčki filozof

J. Pell, engleski matematičar (1611.-1685.)

Podsjetimo, *Diofantove* ili *diofantske jednadžbe* su algebarske jednadžbe s cjelobrojnim koeficijentima kojima se traži rješenje u cijelim ili prirodnim brojevima. Dobile su ime po grčkom matematičaru Diofantu koji je živio oko 250. godine nove ere u Aleksandriji. Napisao je djelo ARITMETIKA u trinaest knjiga od kojih je sačuvano sedam. U ovom članku ćemo dati neke osvrte na dosta poznatu diofantsku jednadžbu, koja se naziva *Pellova jednadžba* (po engleskom matematičaru, J. Pell, 1610-1685). To je jednoparametarska diofantska jednadžba s dvije varijable $x, y \in \mathbb{N}$. Neka je $d \in \mathbb{N} \setminus \{1, 4, 9, ..., n^2, ...\}$ prirodni broj koji, dakle, nije kvadrat. Pellova jednadžba je diofantska jednadžba oblika $x^2 - dy^2 = 1,$ pri čemu su $x, y \in \mathbb{N}$ prirodni brojevi. Na primjer, ako je $d = 7$, tada je $x = 8, y = 3$ jedno rješenje ove jednadžbe. Ova vrlo jednostavna diofantska jednadžba je poznata matematičarima preko 2000 godina. Postoji jaki dokazni materijal da je bila poznata Arhimedu. Prilično kasno u svojoj karijeri, bilo je to 1657. godine, Fermat je ukazao na izazovni problem i uputio ga drugim matematičarima, naročito matematičarima Engleske, nadajući se da će među njima pronaći nekoga tko bi bio zainteresiran za aritmetiku i cijele brojeve.

Dalje Fermat kaže:

P. Fermat, francuski matematičar (1601.-1665.)

> Zbog toga aritmetičarima preporučam dokaz sljedećeg teorema (ili rješenje sljedećeg problema). Ako uspiju pronaći dokaz ili rješenje, shvatit će da pitanja tog tipa nisu manje važna od proslavljenih pitanja geometrije u pogledu ljepote, težine ili metode dokazivanja (vidi [2]).
>
> Neka je dan bilo koji broj koji nije kvadrat. Tada postoji beskonačno mnogo kvadrata koji pomnoženi s danim brojem, uz dodatak jedinice, ponovno daju kvadratni broj. *Problem možemo pisati: postoji beskonačno parova $(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ koji zadovoljavaju jednakost $dy^2 + 1 = x^2$, odnosno Pellovu jednadžbu $x^2 - dy^2 = 1$.*
>
> Uzmimo, kao primjer, broj 3 koji nije kvadrat. Množenjem s kvadratnim brojem 1 i dodavanjem jedinice dobiva se kvadratni broj 4.
>
> Isti broj 3, pomnožen kvadratnim brojem 16, daje produkt koji povećan za jedan postaje kvadratni broj 49.
>
> Pored brojeva 1 i 16 postoji još beskonačno mnogo kvadratnih brojeva koji imaju isto svojstvo. Mene interesira općenito pravilo za rješenje ovog problema kada je zadan bilo koji broj koji nije kvadratan.

Čak se i danas istraživanje te jednadžbe vrlo aktivno nastavlja. Jedan od glavnih razloga za takav interes je taj da se ta jednadžba javlja u mnoštvu iznenađujućih formulacija.

2 Rješenja Pellove jednadžbe

Lako je vidjeti da je $x_0 = 1, y_0 = 0$ ili uređeni par $(1, 0)$ *trivijalno* rješenje svake Pellove jednadžbe

$$x^2 - dy^2 = 1. \tag{1}$$

Prije nego što pokažemo važnu tvrdnju o tome da Pellova jednadžba ima barem jedno netrivijalno rješenje, izrecimo dvije pomoćne tvrdnje tzv. *leme* koje će nam pomoći kod dokaza najavljenog teorema (vidi [2]).

Lema 2.1. *Neka je $z \in \mathbf{N}$ prirodni broj. Tada uvijek postoje cijeli brojevi $x, y \in \mathbf{Z}$ sa svojstvom*

$$\left|x - y\sqrt{d}\right| < \frac{1}{z} \leq \frac{1}{|y|}.$$

.

Lema 2.2. *Postoji beskonačno mnogo cijelih brojeva $(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ sa svojstvom*

$$\left|x - y\sqrt{d}\right| < \frac{1}{|y|}.$$

Teorem 2.1. *Pellova jednadžba uvijek ima barem jedno netrivijalno rješenje.*

Dokaz. Neka je S skup svih $(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ sa svojstvom $\left|x - y\sqrt{d}\right| < \frac{1}{|y|}$. Ako je $(x, y) \in S$, tada je

$$\left|x + y\sqrt{d}\right| \leq \left|x - y\sqrt{d}\right| + \left|2y\sqrt{d}\right| < \frac{1}{|y|} + 2\,|y|\,\sqrt{d}.$$

Zbog toga je

$$\left|x^2 - dy^2\right| = \left|x - y\sqrt{d}\right| \left|x + y\sqrt{d}\right| < \frac{1}{|y|}\left(\frac{1}{|y|} + 2\,|y|\,\sqrt{d}\right),$$

$$\left|x^2 - dy^2\right| < \frac{1}{y^2} + 2\sqrt{d} \leq 1 + 2\sqrt{d}.$$

Prema tome, za svaki $(x, y) \in S$ vrijedi $\left|x^2 - dy^2\right| < 1 + 2\sqrt{d}$. Obzirom da je broj $1 + 2\sqrt{d}$ fiksan, a S beskonačan, prema *Lemi 2.2* i primjenom poznatog *Dirichletovog principa* (*ako se $n + 1$ kuglica nalazi u n kutija, tada se u barem* *jednoj kutiji nalaze barem dvije kuglice*) zaključujemo da postoji beskonačno mnogo parova $(x, y) \in S$ tako da je $x^2 - dy^2 = k$ za neki fiksni $k \in \mathbf{Z}$ sa svojstvom $|k| < 1 + 2\sqrt{d}$.

Također mora vrijediti da postoji beskonačno mnogo parova za koje su ostaci pri dijeljenju brojeva x i y s k međusobno jednaki što zapisujemo na sljedeći način $x \equiv y \pmod{k}$. Neka su (x_1, y_1) i (x_2, y_2) dva takva para uz uvjet $x_1 \neq \pm x_2$ i $y_1 \neq \pm y_2$. Vrijedi:

$$(x_1x_2 - dy_1y_2)^2 - d\,(x_1y_2 - x_2y_1)^2 = k^2, \tag{2}$$

što se zaključuje zbog $x_1^2 - dy_1^2 = k$, $x_2^2 - dy_2^2 = k$ i zbog relacije

$$(x_1x_2 - dy_1y_2)^2 - d\,(x_1y_2 - x_2y_1)^2 = \left(x_1^2 - dy_1^2\right)\left(x_2^2 - dy_2^2\right).$$

Iz $x_1y_2 - x_2y_1 \equiv 0 \pmod{k}$, zbog (2) slijedi $x_1x_2 - dy_1y_2 \equiv 0 \pmod{k}$. Dijeljenjem jednakosti (2) s k^2 dobivamo

$$\left(\frac{x_1x_2 - dy_1y_2}{k}\right)^2 - d\left(\frac{x_1y_2 - x_2y_1}{k}\right)^2 = 1.$$

Obzirom da je $\frac{x_1x_2 - dy_1y_2}{k}, \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{k} \in \mathbb{Z}$, to znači da imamo netrivijalno rješenje Pellove jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$, ako je $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$ dobili smo netrivijalno rješenje. Međutim, ako bi bilo $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$, tada bismo imali $x_1x_2 - dy_1y_2 = \pm k$. Te dvije jednadžbe mogu biti istovremeno zadovoljene samo ako je $x_1 = \pm x_2$ i $y_1 = \pm y_2$, ali te mogućnosti smo isključili.□

Definiramo važan pojam *najmanje prirodno rješenje* ili *fundamentalno rješenje* Pellove jednadžbe. Rješenje (x_1, y_1) tj. najmanji brojevi $x_1 \in \mathbb{N}, y_1 \in \mathbb{N}$, odnosno točka koja je najbliža točki $(1, 0)$ i koje zadovoljava (1) zovemo najmanje prirodno rješenje ili fundamentalno rješenje od (1).

Na primjer u jednadžbi $x^2 - 2y^2 = 1$, najmanje prirodno rješenje je $x_1 = 3, y_1 = 2$ ili kao par $(3, 2)$.

Dobro je poznata tvrdnja da za svaki prirodni broj d, koji nije kvadrat, Pellova jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja koje je moguće lako izraziti pomoću fundamentalnog rješenja (x_1, y_1) gdje je $x_1, y_1 > 0$, što će dalje biti razrađivano. Ovdje samo navodimo sljedeći važan teorem (vidi [4]).

Teorem 2.2. *Ako je (x_1, y_1) fundamentalno rješenje jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$, tada su sva rješenja (x_n, y_n) u skupu* $\mathbf{N}$ *dana formulom*

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n \tag{3}$$

za $n = 1, 2, \ldots$.

Ovdje treba izvršiti potenciranje te nakon toga desnu stranu zapisati u obliku $\alpha_n + \beta_n\sqrt{d}$. Pri tome je dobro znati da ako $d \in$N nije kvadrat i

$$\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n = \alpha_n + \beta_n\sqrt{d},$$

tada je

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} x_1^{n-2k} y_1^{2k} d^k, \tag{4}$$

$$\beta_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k+1} x_1^{n-2k-1} y_1^{2k+1} d^k. \tag{5}$$

Podsjetimo, $[x]$ definiramo kao najveći cijeli broj k, sa svojstvom da je $k \leq x$.

Prema *Teoremu 2.2* sada zaključujemo da vrijedi

$$x_n - y_n\sqrt{d} = \left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^n \tag{6}$$

i tada je očito $(x_n^2 - dy_n^2) = (x_n - y_n\sqrt{d})(x_n + y_n\sqrt{d})$

$$= \left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^n \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n$$

$$= \left(x_1^2 - dy_1^2\right)^n = 1.$$

Zbrajanjem (3) i (6), odnosno njihovim oduzimanjem, lako se pokaže da vrijedi sljedeća korisna tvrdnja, pomoću koje se određuju rješenja Pellove jednadžbe.

Teorem 2.3. *Svako rješenje Pellove jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$ je oblika (x_n, y_n), gdje je*

$$x_n = \frac{1}{2}\left[\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n + \left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^n\right], \tag{7}$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{d}}\left[\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n - \left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^n\right] \tag{8}$$

za $n = 1, 2, \ldots$.
Rješenje (x_1, y_1) je fundamentalno rješenje te jednadžbe.

Primjer 1. *Nađite sve parove uzastopnih cijelih brojeva čija je razlika kubova jednaka kvadratu cijelog broja.*

Rješenje. Neka su m i n prirodni brojevi takvi da je $(m+1)^3 - m^3 = n^2$. Očito je n neparan broj, tj. $n = 2k+1$. Sada je $4k(k+1) = 3m(m+1)$ ili $16k(k+1) = 12m(m+1)$,

$$4\,(2k+1)^2 - 4 = 3\,(2m+1)^2 - 3.$$

Supstitucijom $x = 2(2k+1)$ i $y = 2m+1$ dobivamo Pellovu jednadžbu $x^2 - 3y^2 = 1$.

Kako je fundamentalno rješenje $x_1 = 2, y_1 = 1$, ostala zadovoljavaju zbog (7) i (8):

$$x_k = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k}{2}, y_k = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^k - \left(2-\sqrt{3}\right)^k}{2\sqrt{3}}.$$

U našem slučaju je:
$x_1 = 2, y_1 = 1; x_2 = 7, y_2 = 4; x_3 = 26, y_3 = 15;$
$x_4 = 97, y_4 = 56; x_5 = 362, y_5 = 209; \ldots$
Rješenja su $m = \frac{y_k - 1}{2}, k \in$N, ali samo za neparne vrijednosti od y_k, tj. $m = 0, 7, 104, \ldots$.

3 Unimodularna transformacija ravnine i geometrijska interpretacija Pellove jednadžbe

U ovom poglavlju želimo izgraditi model pronalaženja rješenja Pellove jednadžbe, pomoću kojeg ćemo njeno rješenje (x_{n+1}, y_{n+1}) dobiti na osnovu poznavanja prethodnog rješenja (x_n, y_n), koristeći prethodna razmatranja u postupku tzv. *unimodularne transformacije ravnine* (vidi [3]).

Rješenja Pellove jednadžbe (1), odnosno

$$x^2 - ky^2 = 1, \quad k \in \mathbf{N}$$

i k nije potpun kvadrat, određuju u geometrijskom smislu, hiperbolu u pravokutnom koordinatnom sustavu. Ako je u ravnini zadan Kartezijev pravokutni koordinatni sustav, onda svakoj točki (x, y) te ravnine možemo pridružiti točku $(x\prime, y\prime)$ te iste ravnine određenu jednakostima

$$\begin{aligned} x\prime &= ax + by \\ y\prime &= cx + dy, \end{aligned} \tag{9}$$

gdje su a, b, c i d zadani cijeli brojevi takvi da vrijedi

$$ad - bc = 1. \tag{10}$$

Svako preslikavanje (9) koje zadovoljava uvjet (10) zovemo *unimodularnom transformacijom ravnine.*

Par $(1, 0)$ je jedno i to trivijalno rješenje od (9). Znamo, iz prethodnog poglavlja, da je cjelobrojna točka (x_1, y_1) na gornjoj desnoj polugrani ($x_1 > 0, y_1 > 0$) hiperbole (9) koja je najbliža točki (1,0). Pokažimo da postoji unimodularna transformacija (10) koja desnu gornju granu hiperbole preslikava u samu sebe, a točku $(1, 0)$ u (x_1, y_1). Radi $(1, 0) \mapsto (x_1, y_1)$ iz (10) slijedi $a = x_1, c = y_1$. Dakle, tražena transformacija je oblika

$$\begin{aligned} x' &= x_1 x + by \\ y' &= y_1 x + dy, \end{aligned} \tag{11}$$

pri tome radi (10) mora vrijediti

$$x_1 d - y_1 b = 1. \tag{12}$$

Transformacijom (11) se hiperbola (1) preslikava u

$$x^2 + 2(x_1 b - k y_1 d)xy + (b^2 - kd^2)y^2 = 1.$$

Hiperbola će se preslikati u samu sebe ako i samo ako vrijedi

$$x_1 b - k y_1 d = 0, b^2 - kd^2 = -k. \tag{13}$$

Iz (12) i prve od jednadžbi (13) slijedi

$$b = k y_1, d = x_1,$$

a ove vrijednosti zadovoljavaju i drugu od jednadžbi u (11). Prema (9) tražena transformacija glasi:

$$x' = x_1 x + k y_1 y, \tag{14}$$
$$y' = y_1 x + x_1 y. \tag{15}$$

Odnosno, zbog

$$x_1^2 - k y_1^2 = 1 \Rightarrow k = \frac{x_1^2 - 1}{y_1^2},$$

konačno dobivamo:

$$\begin{aligned} x' &= x_1 x + \tfrac{x_1^2 - 1}{y_1} y \\ y' &= y_1 x + x_1 y. \end{aligned} \tag{16}$$

Dakle, općenito Pellovoj jednadžbi $x^2 - ky^2 = 1$ s fundamentalnim rješenjem (x_1, y_1) odgovara *unimodularna matrica* i transformacija:

$$M = \begin{bmatrix} x_1 & \frac{x_1^2-1}{y_1} \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_1 x_n + \frac{x_1^2-1}{y_1} y_n \\ y_{n+1} &= y_1 x_n + x_1 y_n. \end{aligned} \tag{18}$$

Pomoću (18) dobivamo niz: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ...(x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1}), ...$ rješenja Pellove jednadžbe $x^2 - ky^2 = 1$.

Primjer 2. *Riješiti Pellovu jednadžbu $x^2 - 5y^2 = 1$ koristeći prethodno.*

*Rješenje.*Fundamentalno rješenje zadane jednadžbe je $x_1 = 9, y_1 = 4$.
Toj jednadžbi odgovara unimodularna transformacija:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 9x_n + 20y_n \\ y_{n+1} &= 4x_n + 9y_n, \end{aligned}$$

s matricom

$$M = \begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix},$$

pa se dobivaju rješenja:

$$(9, 4), (161, 72), (2889, 1292), (51841, 23184), \ldots$$

4 Rekurzivne relacije za rješenja Pellove jednadžbe

Vidjeli smo da svakoj Pellovoj jednadžbi $x^2 - ky^2 = 1$ možemo pridružiti preslikavanje (unimodularnu transformaciju):

$$x_{n+1} = ax_n + by_n, y_{n+1} = cx_n + dy_n$$

za koju vrijedi (16) odnosno (17) iz *Odjeljka 3* . Ovo su dvije rekurzivne relacije prvog reda. Iz njih se može izvesti rekurzivnu relaciju drugog reda koja se odnosi na niz (x_n). To je relacija oblika $x_{n+2} = \varphi(x_{n+1}, x_n)$ i pomoću nje se niz (x_n) brže računa:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= ax_{n+1} + by_{n+1} \\ &= ax_{n+1} + b(cx_n + dy_n) \\ &= ax_{n+1} + bcx_n + d(x_{n+1} - ax_n) \\ &= (a+d)x_{n+1} - (ad - bc)x_n \end{aligned}$$

Označimo li matricu transformacije (*)

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

tada iz (11), (12) iz *Odjeljka 3.*, slijedi da je

$$x_{n+2} = 2x_1 x_{n+1} - x_n. \tag{19}$$

Analogna rekurzija drugog reda za niz (y_n) je oblika $y_{n+2} = \phi(y_{n+1}, y_n)$:

$$\begin{aligned} y_{n+2} &= cx_{n+1} + dy_{n+1} \\ &= c(ax_n + by_n) + dy_{n+1} \\ &= acx_n + bcy_n + dy_{n+1} \\ &= a(y_{n+1} - dy_n) + bcy_n + dy_{n+1} \\ &= (a+d)y_{n+1} - (ad - bc)y_n. \end{aligned}$$

Dakle,

$$y_{n+2} = 2x_1 y_{n+1} - y_n. \tag{20}$$

Primjer 3. *U slučaju jednadžbe* $x^2 - 3y^2 = 1$ *zbog* $x_0 = 1, x_1 = 2, y_0 = 0, y_1 = 1$ *imamo sljedeće rekurzivne relacije:*

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 4x_{n+1} - x_n \\ y_{n+2} &= 4y_{n+1} - y_n, \end{aligned}$$

iz kojih slijedi niz $(x_n) : 1, 2, 7, 26, 97, 362, \ldots$ *i niz* $(y_n) : 0, 1, 4, 15, 56, 209, \ldots$

Primjer 4. *Odrediti prirodne brojeve* $n \in \mathbb{N}$ *za koje je* $1 + 11n^2$ *kvadratni broj.*

Rješenje. Dakle, tražimo $n \in \mathbb{N}$ za koje izraz $1 + 11n^2$ možemo napisati u obliku

$$x^2 = 1 + 11n^2.$$

Uz oznaku $n = y \in \mathbb{N}$, dobili smo Pellovu jednadžbu $x^2 - 11y^2 = 1$ s fundamentalnim rješenjem $x_1 = 10, y_1 = 3$. Odgovarajuća rekurzija za niz (y_n) glasi

$$y_{n+2} = 20y_{n+1} - y_n, (y_0 = 0, y_1 = 3)$$

iz čega slijede traženi prirodni brojevi: $n = 3, 60, 1197, \ldots$.

Primjer 5. *Kvadratni brojevi su* n^2. *Podsjetimo trokutni su* $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. *Koji su brojevi* trokutno-kvadratni. *Kako odrediti takve brojeve?*

Rješenje: Slučaj $1 = 1^2 = \frac{1(1+1)}{2}$ je trivijalan. Sljedeći takav broj je 36 jer

$$36 = 6^2 = \frac{8(8+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8.$$

Dakle, $T_8 = Q_6 = 36$.

Neka je T_m $m-$ti trokutni broj i $Q_n = n^2$ n-ti kvadratni broj. Zanima nas par (m, n) tako da bude $T_m = Q_n$ tj. $\frac{m(m+1)}{2} = n^2 \Rightarrow m^2 + m = 2n^2$. Iz prethodnog slijedi niz jednakosti:

$$\begin{aligned} \left(m + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} = 2n^2 \Rightarrow 4\left(m + \tfrac{1}{2}\right)^2 - 1 = 8n^2 \\ (2m+1)^2 - 1 = 8n^2 \Rightarrow (2m+1)^2 - 8n^2 = 1. \end{aligned}$$

Prepoznajemo Pellovu jednadžbu za $d = 8$, iako malo modificirana jer nije oblika $x^2 - dy^2 = 1$, nego $(2x+1)^2 - 8y^2 = 1$. Znamo da za jednadžbu $x^2 - 8y^2 = 1$ važe rekurzije:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 6x_{n+1} - x_n, \\ y_{n+2} &= 6y_{n+1} - y_n, \end{aligned}$$

uz $x_0 = 1, y_0 = 0$ i fundamentalno rješenje $x_1 = 3, y_1 = 1$, na osnovu kojih dobivamo ostala rješenja: $(17, 6), (99, 35), (577, 204), \ldots$. Ako prve komponente izjednačimo s $2m + 1$, tada dobivamo m kao indekse trokutnih brojeva, a n ostaju isti kao indeksi kvadratnih brojeva.

$2m + 1 = 3, n = 1$ daje $m = 1, n = 1$ i to je trivijalni slučaj $T_1 = Q_1 = 1$.

Dalje, $2m + 1 = 17, n = 6$ daje $m = 8, n = 6 \Rightarrow T_8 = Q_6 (= 36)$. Dakle, 36 je drugi trokutno-kvadratni broj. Treći se dobije za $2m + 1 = 99, n = 35$ tj. $m = 49, n = 35 \Rightarrow T_{49} = Q_{35} = \frac{49 \cdot 50}{2} = 35^2 = 1225$.

Dakle, 1225 je treći trokutno-kvadratni broj. Dalje imamo broj 41616 koji je četvrti trokutno-kvadratni broj itd.

Literatura

[1] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, skripta, PMF–Matematički odjel, Sveučilište u Zgrebu, Zagreb, 2006.

[2] M. J. Jacobson, Jr. I. H. C. Williams, *Solving the Pell equation*, Canadian Mathematical Society, 2009.

[3] B. Pavković, *Metodika nastave matematike*, skripta i predavanja, PMF-Zagreb, 1985.

[4] T. Tadić, *Pripreme za matematičko natjecanje*, Element, Zagreb, 2006.