Сојузен натпревар 1983

I година

1. Определи ги сите природни броеви n такви што користејќи ја точно еднаш секоја од цифрите 0, 1, 2, 3, ..., 9 може да се запишат броевите n^3 и n^4.

Решение. Ако n е едноцифрен број, тогаш $n^3 \leq 9^3 = 729$, $n^4 \leq 9^4 = 6561$, т.е. во записите на броевите n^3 и n^4 има помалку од 7 цифри. Ако во записот на n има повеќе од две цифри, тогаш $n^3 \geq 100^3 = 10^6$, $n^4 \geq 100^4 = 10^8$, па во записите на броевите n^3 и n^4 има повеќе од $7+9=16$ цифри. Нека во записите на броевите n^3 и n^4 секоја од цифрите 0, 1, 2, ..., 9 се појавува точно еднаш. Од претходно изнесеното следува дека бројот n е двоцифрен. Понатаму, лесно следува дека n^3 е четирицифрен, а n^4 е шестцифрен број. Од условот $1000 \leq n^3 \leq 9999$ следува $10 \leq n \leq 21$, а од условот $100000 \leq n^4 \leq 999999$ следува $18 \leq n \leq 31$. Според тоа, $n \in \{18, 19, 20, 21\}$. Секој од броевите 20^3 и 20^4 завршува на 0, а секој од броевите 21^3 и 21^4 завршува на 1. Понатаму, во бројот $19^4 = 130321$ има повторување на цифрите, па затоа останува уште да провериме дали $n = 18$ е решение на задачата. Имаме. $18^3 = 5832$ и $18^4 = 104876$, т.е. бројот 18 ги задоволува условите на задачата и тоа е нејзиното единствено решение.

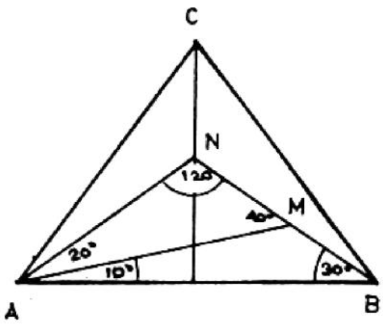
2. Табела од 1983 реда се формира на следниов начин: Во првиот ред се запишуваат редоследно броевите 1, 9, 8, 3; потоа под секој број се запишува збирот на преостанатите броеви од неговиот ред, намален за тој број. Кој број се наоѓа на првото место во 1983-тиот ред?

Решение. Со a, b, c, d да ги означиме броевите кои се наоѓаат во $k-$тиот ред, а со s збирот на тие броеви. Тогаш во $(k+1)-$от ред се наоѓаат броевите $s-2a$, $s-2b, s-2c, s-2d$. Првиот број во $(k+2)-$от ред е еднаков на

$$(s-2b)+(s-2c)+(s-2d)-(s-2a) = 2(s-(b+c+d))+2a = 4a,$$

а останатите броеви се $4b, 4c, 4d$. Според тоа, првите броеви во првиот, вториот, третиот, ..., 1983 ред се еднакви редоследно на $1, 4, 4^2, ..., 4^{991}$. Значи, бараниот број е 2^{1982}.

3. Даден е триаголник ABC во кој $CA = CB$ и $\measuredangle ACB = 80^\circ$. Нека M е точка во внатрешноста на триаголникот ABC таква што $\measuredangle MBA = 30^\circ$ и $\measuredangle MAB = 10^\circ$. Определи го $\measuredangle AMC$.



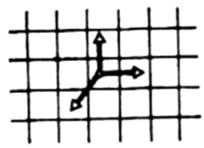
Решение. Нека N е пресек на правата BM и висината од темето C на триаголникот ABC, цртеж десно. Триаголникот ABN е рамнокрак со основа AB и агол при врвот

$$\measuredangle ANB = 180^\circ - 2\cdot 30^\circ = 120^\circ .$$

Понатаму, $\measuredangle ANC = \measuredangle BNC = 120^\circ$. Бидејќи $AN = AN$, $\measuredangle ACN = \measuredangle AMN = 40^\circ$ и $\measuredangle ANC = \measuredangle ANM$, заклучуваме дека триаголниците ANC и ANM се складни. Затоа важи $AC = AM$, т.е. триаголникот ACM е рамнокрак со основа CM. Конечно,

$$\measuredangle AMC = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle CAM) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ .$$

4. Ќе ја наречеме *делфин* фигурата која на шаховската табла се движи едно поле нагоре или едно поле надесно или едно поле дијагонално лево долу (цртеж десно). Дали може делфинот тргнувајќи од долното лево аголно поле да помине точно по еднаш на секое поле и да се врати на почетното поле?



Решение. Полињата на шаховската 8×8 табла да ги означиме со броевите 0, 1 и 2, како на цртежот десно. На движењето на делфинот по таблата да му ја придружиме низата броеви со кои редоследно се означени полињата на кои делфинот застанува. Да забележиме дека при произволно движење добиваме низа 0, 1, 2, 0, 1, 2, ... Според тоа, по секој потез чиј реден број при делење со 3 дава остаток 1, делфинот се наоѓа на поле кое е означено со бројот 1. Според тоа, по 64 потези делфинот ќе се најде на поле означено со бројот 1, т.е. тој не може да е на почетното поле, бидејќи истото е означено со бројот 0.

1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1

II година

1. Ако x, y, z се позитивни броеви такви што $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, докажи дека

$$(x-1)(y-1)(z-1) \geq 8 .$$

Решение. Од условот на задачата следува $xy + yz + zx = xyz$. Понатаму, од условот на задачата и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$x+y+z = (x+y+z)(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z}) \geq 3(xyz)^{\frac{1}{3}} \cdot 3(\tfrac{1}{xyz})^{\frac{1}{3}} = 9 .$$

Според тоа,

$$(x-1)(y-1)(z-1)=xyz-xy-yz-zx+x+y+z-1\geq 8.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=3$.

2. Докажи дека за секој реален број $x\geq \frac{1}{2}$ постои цел број n таков што

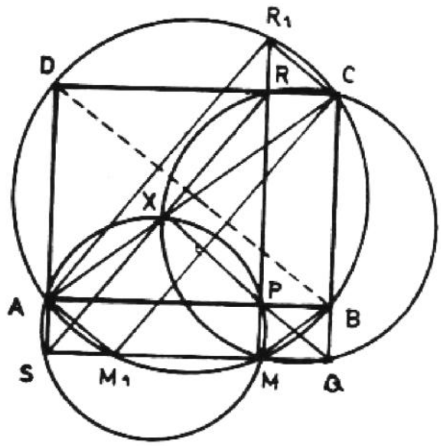
$$|x^2-n|\leq \sqrt{x-\tfrac{1}{4}}.$$

Решение. Нека $a_n=\frac{(n-1)^2+n^2}{2}$, $n\in\mathbb{N}$. Тогаш $a_1=\frac{1}{2}$, низата (a_n) е монотоно растечка и тежи кон бескрајност. За секој $x\geq\frac{1}{2}$ постои природен број n таков што $a_{n-1}\leq x\leq a_n$. Последните неравенства важат ако и само ако

$$f(x)=(x-a_{n-1})(x-a_n)=x^2-(2n^2+1)x+(n^4+\tfrac{1}{4})=(x-n^2)^2-(x-\tfrac{1}{4})\leq 0,$$

од каде следува $|x^2-n|\leq\sqrt{x-\frac{1}{4}}$.

3. Даден е правоаголник $ABCD$. На помалиот лак AB на кружницата опишана околу $ABCD$ избрана е произволна точка M и низ неа се повлечени две прави паралелни со страните на правоаголникот. Едната од тие прави ги сече отсечките AB и CD соодветно во точките P и R, а другата ги сече правите BC и DA соодветно во точките Q и S. Докажи дека правите PQ и RS се заемно нормални и се сечат на дијагоналата на правоаголникот $ABCD$.



Решение. Нека M_1 е втората пресечна точка на правата QS и кружницата k опишана околу правоаголникот $ABCD$, R_1 е втората пресечна точка на кружницата k и правата MR, а X е пресечната точка на правите PQ и RS, цртеж десно. Бидејќи $\measuredangle M_1MR_1=90^\circ$ следува дека M_1R_1 е дијаметар на кружницата k. (Да забележиме дека M_1R_1 е дијаметар на k и кога $M_1\equiv M$.) Бидејќи AC е дијаметар на k, заклучуваме дека AM_1CR_1 е правоаголник, па затоа $M_1C\perp R_1C$. Триаголниците R_1RC и MPB се симетрични во однос на симетралата на отсечката BC, а триаголниците ASM_1 и BQM се симетрични во однос на симетралата на отсечката AB. Затоа $RC=PB=MQ=SM_1$, а како $RC\parallel SM_1$, добиваме дека SM_1CR е паралелограм, па следува $RS\parallel CM_1$.

Понатаму важи $PR_1 = PR + RR_1 = PR + PM = BC + QB = QC$ и како $PR_1 \parallel QC$, добиваме дека $PQCR_1$ е паралелограм и оттука следува $PQ \parallel R_1C$. Бидејќи $PQ \parallel R_1C$, $RS \parallel CM_1$ и $CM_1 \perp R_1C$, добиваме $PQ \perp RS$.

Аналогно се докажува дека $PS \perp QR$.

б) Од условот на задачата и претходно докажаното следува дека аглите QMR, QXR и QCR се прави. Според тоа, точките Q, C, R, X, M се концикличниі. Аглите SAP, SXP и SMP се исто така прави, па и точките S, M, P, X, A се конциклични. Затоа

$$\measuredangle RXC = \measuredangle RQC = \measuredangle APS = \measuredangle AXS,$$

(во првото равенство имаме агли над ист лак, во второто агли со нормални краци и во третото агли над ист лак), па како точката X припаѓа на правата SR, таа припаѓа и на правата AC. Според тоа, пресекот на правите PQ и SR припаѓа на дијагоналата AC.

4. Правоаголник со димензии $1\times n$ и составен од n единечни квадрати ($n \geq 4$), редоследно нумерирани со $1, 2, ..., n$. На полињата $n-2, n-1, n$ се наоѓа по еден жетон. Двајца играчи ја играат следнава игра: наизменично префрлаат по еден жетон на произволно слободно поле со помал реден број. Играта ја губи играчот кој е на ред, а не може да направи потез. Докажи дека првиот играч може да игра така што сигурно победува, без разлика како игра вториот играч.

Решение. Стратегијата на првиот играч е следната: Ако n е непарен број, тогаш тој во првиот потез го преместува жетонот од полето $n-2$ на полето 1. Тогаш меѓу жетонот на полето 1 и жетоните на полињата $n-1$ и n се наоѓаат парен број полиња (поточно $n-3$ полиња). Ако n е парен број, тогаш првиот играч во првиот потез го преместува жетонот од полето n на полето 1, при што меѓу жетонот на полето 1 и жетоните на полињата $n-2$ и $n-1$ останува парен број полиња (поточно $n-4$ полиња). Во натамошниот тек на играта по секој потез на вториот играч првиот играч го преместува последниот жетон на поле кое е соседно на полето на кое стои другиот жетон, пред или зад него, така што бројот на празните полиња меѓу првиот и другите два жетони останува парен. (Ако вториот играч го помести последниот жетон за две полиња напред, па двата жетони и понатаму се соседни, тогаш и првиот играч повторува таков потез и притоа по два такви потези бројот на слободните полиња меѓу првиот и другите два жетона се намалува за два.) По конечен број потези, при што последниот потез го игра првиот играч, бројот на слободните полиња меѓу жетонот на полето 1 и другите два жетони е еднаков на нула. Според тоа, опишаната стратегија на првиот играч е победничка.

III и IV година

1. Нека p и q се комплексни броеви. Решенијата на равенката $x^2+px+q=0$ се по модул еднакви на 1, ако и само ако $|p|\le 2, |q|=1$ и $\frac{p^2}{q}$ е ненегативен реален број. Докажи!

Решение. Нека x_1 x_2 се решенија на равенката $x^2+px+q=0$.

Да претпоставиме дека $|x_1|=|x_2|=1$. Тогаш

$$|p|=|x_1+x_2|\le|x_1|+|x_2|=2,$$
$$|q|=|x_1x_2|=|x_1||x_2|=1,$$
$$\frac{p^2}{q}=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=2+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_2}=2+x_1\overline{x_2}+\overline{x_1}x_2$$
$$=2+2\mathrm{Re}(x_1\overline{x_2})\ge 2+2(-1)=0.$$

Да претпоставиме дека $|p|\le 2, |q|=1$ и $\frac{p^2}{q}$ е ненегативен реален број. Нека r е комплексен број таков што $r^2=q$. Тогаш $|r|=1$. Да означиме $k=\frac{p}{r}$. Бидејќи $\frac{p^2}{q}=\frac{p^2}{r^2}=k^2$ е ненегативен број, добиваме дека k е реален број и важи

$$|k|=|\frac{p}{r}|=|p|\le 2, k^2\le 4.$$

Понатаму,

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}=\frac{-kr\pm\sqrt{k^2r^2-4r^2}}{2}=\frac{-k\pm i\sqrt{4-k^2}}{2}r,$$
$$|x_1|=|x_2|=\frac{|r|}{2}\sqrt{k^2+(4-k^2)}=1.$$

2. Функцијата f е определена на множеството цели броеви и го задоволува условот

$$f(x)=\begin{cases}x-10, & x>100,\\ f(f(x+11)), & x\le 100.\end{cases}$$

Докажи дека $f(x)=91$ за $x\le 100$.

Решение. Да забележиме дека важи

$$f(100)=f(f(100+11))=f(f(111))=f(101)=101-10=91.$$

Да претпоставиме дека $f(x)=91$, за секој $x\in\{k+1,k+2,...,100\}$, каде k е цел број помал од 100. Ако $90<k<100$, тогаш

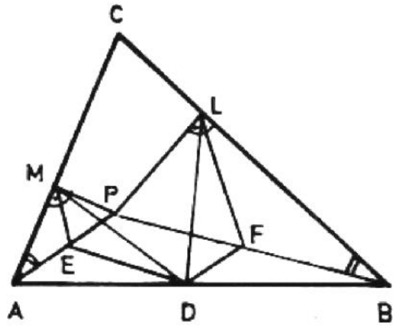
$$f(k)=f(f(k+11))=f(91)=91,$$

а ако $k\le 90$, тогаш

$$f(k)=f(f(k+11))=f(91)=91.$$

Од принципот на математичка индукција добиваме дека за секој цел број $k \le 100$ важи $f(k)=91$.

3. Нека P е точка во внатрешноста на триаголникот ABC таква што $\measuredangle PAC = \measuredangle PBC$ и нека M и L се подножјата на нормалите повлечени од P соодветно на правите AC и BC. Ако D е средина на страната AB, докажи дека $DL = DM$.



Решение. Нека E и F се соодветно средините на отсечките PA и PB, цртеж десно. Бидејќиу отсечките DE и DF се средни линии на триаголникот ABP, четириаголникот $EDFP$ е паралелограм, а како отсечките AP и BP се хипотенузи на правоаголните триаголници AMP и BLP, добиваме $ME = EP = DF$, $DE = FP = LF$,

$$\measuredangle MED = \measuredangle MEP + \measuredangle PED = 2\measuredangle PAC + \measuredangle DFP$$
$$= 2\measuredangle PBC + \measuredangle DFP = \measuredangle DFL.$$

Затоа триаголниците MED и DFL се складни, па важи $DM = DL$.

4. Низата природни броеви (x_n) е определена со

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = [\tfrac{3}{2} a_n], \ (n = 1,2,3,...).$$

Докажи дека низата (a_n) има бесконечно многу непарни и бесконечно многу парни членови.

Решение. а) Да претпоставиме дека во низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има конечно многу непарни броеви. Тогаш постои индекс m, таков што a_n е парен број за секој $n \ge m$. Нека $a_m = 2k_0, k_0 \in \mathbb{N}$. Тогаш,

$$a_{m+1} = [\tfrac{3}{2} a_m] = [\tfrac{3}{2} 2k_0] = 3k_0.$$

Бидејќи a_{m+1} е парен број, добиваме $k_0 = 2k_1, k_1 \in \mathbb{N}$. Понатаму

$$a_{m+2} = [\tfrac{3}{2} a_{m+1}] = [\tfrac{3}{2} 3k_0] = 3^2 k_1.$$

Бидејќи a_{m+2} е парен број, добиваме $k_1 = 2k_2, k_2 \in \mathbb{N}$ и $k_0 = 2^2 k_2$. Продолжувајќи ја опишаната постапка добиваме дека за секој $s \in \mathbb{N}$ постои $k_s \in \mathbb{N}$, таков што $k_0 = 2^s k_s$. Ова противречи на фактот дека степенот на бројот 2 во каноничниот запис на k_0 е конечен број.

б) Да претпоставиме дека во низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има конечно многу парни броеви. Тогаш постои индекс m, таков што a_n е непарен број за секој $n \ge m$. Нека $a_m = 2k_0 + 1, k_0 \in \mathbb{N}$. Тогаш

$$a_{m+1}=[\tfrac{3}{2}a_m]=[\tfrac{3}{2}(2k_0+1)]=3k_0+1.$$

Бидејќи a_{m+1} е непарен број, добиваме $k_0=2k_1$, $k_1\in\mathbb{N}$. Понатаму, како и во случајот под а), претпоставката доведува до противречност.