Primjena Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeve nejednakosti na rješavanje algebarskih jednadžbi i sustava jednadžbi

ILIJA ILIŠEVIĆ*

Sažetak. *Razmatra se primjena Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeve nejednakosti na rješavanje algebarskih jednadžbi i sustava jednadžbi, koje su ilustrirane na nizu zanimljivih zadataka prilagođenih učenicima srednjih škola.*

Ključne riječi: *nejednakosti Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeve, jednadžbe, sustavi jednadžbi*

Application of Cauchy-Schwarz-Buniakowsky inequality on solving equations and system of equations

Abstract. *Applications of Cauchy-Schwarz-Buniakowsky inequality on solving equations and system of equations are considered. These applications are illustrated on a number of interesting tasks adapted for high school students.*

Key words: *Cauchy-Schwarz-Buniakowsky inequality, equations, system of equations*

Nejednakost o kojoj će biti riječi zove se Cauchyjeva[1] ili Cauchy–Schwarzova[2] ili Cauchy–Buniakowskyjeva ili Cauchy–Schwarz–Buniakowskyjeva nejednakost[3]. Usvojit ćemo posljednji naziv (kraće: CSB–nejednakost). Izreći ćemo ovu nejednakost, dokazati je i primijeniti je na rješavanje algebarskih jednadžbi i sustava jednadžbi.

Teorem 1 [CSB–nejednakost]. *Neka su $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ dvije n-torke realnih brojeva. Tada vrijedi*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right). \tag{1}$$

*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

[1] A. L. Cauchy (1789.–1857.), francuski matematičar
[2] H. A. Schwarz (1843.–1921.), njemački matematičar
[3] V. J. Buniakowsky (1804.–1869.), ukrajinski matematičar

Pri tome jednakost u (1) vrijedi ako i samo ako su n-torke razmjerne, tj. ako i samo ako postoji realan broj m takav da je

$$b_k = ma_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Dokaz. Promotrimo kvadratnu funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu formulom

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \\
&= (a_1 x + b_1)^2 + (a_2 x + b_2)^2 + \cdots + (a_n x + b_n)^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)x^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \\
&= \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)x^2 + 2\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)x + \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Kako je ova funkcija nenegativna ($f(x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$), njezina diskriminanta D ne može biti pozitivna, tj.

$$D = 4\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 - 4\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big) \leq 0,$$

odakle slijedi tražena nejednakost (1).

Iz (2) zaključujemo da jednakost u (1) vrijedi ako i samo ako postoji realan broj m takav da je $b_k = ma_k$ za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$, tj. ako i samo ako su n-torke $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ razmjerne. $\square$

Riješimo sada nekoliko zadataka.

Zadatak 1. *Odredite realne brojeve x_1, x_2, x_3 za koje vrijedi*

$$\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3\right)^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{6}x_3^2.$$

Rješenje. Prema CSB–nejednakosti je

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}x_1 + \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}x_2 + \sqrt{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}}x_3\right)^2 \\
=\ & \left(\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right)^2\right) \cdot \left(\left(\sqrt{\frac{1}{2}}x_1\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{3}}x_2\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{6}}x_3\right)^2\right) \\
=\ & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}{x_1}^2 + \frac{1}{3}{x_2}^2 + \frac{1}{6}{x_3}^2\right) \\
=\ & \frac{1}{2}{x_1}^2 + \frac{1}{3}{x_2}^2 + \frac{1}{6}{x_3}^2.
\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}x_1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}x_2}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}x_3}{\sqrt{\frac{1}{2}}},$$

odnosno $x_1 = x_2 = x_3$.

Zadatak 2. *Riješite jednadžbu*

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{9-x} = x^2 - 10x + 29, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Rješenje. Da bi jednadžba imala smisla, mora biti $x-1 \geq 0$ i $9-x \geq 0$, tj. $x \in [1,9]$. Prema CSB–nejednakosti je

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x} = 1 \cdot \sqrt{x-1} + 1 \cdot \sqrt{9-x} \\ \leq \quad & \sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 + (\sqrt{9-x})^2} \\ = \quad & \sqrt{2} \cdot \sqrt{x-1+9-x} = \sqrt{16} = 4. \end{aligned}$$

S druge strane je $x^2 - 10x + 29 = (x-5)^2 + 4 \geq 4$. Dakle, vrijedi $\sqrt{x-1} + \sqrt{9-x} = 4$ i $(x-5)^2 + 4 = 4$. Iz druge jednadžbe ovog sustava dobivamo $x = 5$, a ta vrijednost zadovoljava i prvu jednadžbu sustava, pa je rješenje zadane jednadžbe.

Zadatak 3. *Odredite nenegativne realne brojeve x i y tako da vrijedi*

$$\sqrt{x(x+y)^3} + y\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}(x^2+xy+y^2).$$

Rješenje. Očigledno je $(x,y) = (0,0)$ jedno rješenje ove jednadžbe. Dalje pretpostavimo $x > 0$ i $y > 0$. Prema CSB–nejednakosti je

$$\begin{aligned} & \sqrt{x(x+y)^3} + y\sqrt{x^2+y^2} = (x+y) \cdot \sqrt{x^2+xy} + \sqrt{x^2+y^2} \cdot y \\ \leq \quad & \sqrt{(x+y)^2 + (x^2+y^2)} \cdot \sqrt{(x^2+xy) + y^2} \\ = \quad & \sqrt{2x^2+2xy+2y^2} \cdot \sqrt{x^2+xy+y^2} = \sqrt{2}(x^2+xy+y^2). \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\begin{aligned} & \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+xy}}{y} \iff y(x+y) = \sqrt{(x^2+y^2)(x^2+xy)} \\ \iff \quad & y^2(x+y)^2 = x(x+y)(x^2+y^2) \iff (x+y)\Big(y^2(x+y) - x(x^2+y^2)\Big) = 0 \\ \iff \quad & (x+y)(y^3-x^3) = 0 \iff (x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2) = 0. \end{aligned}$$

Kako je $x^2+xy+y^2 = \left(x+\frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$, to je $x+y=0$ ili $x-y=0$, tj. $x=-y$ ili $x=y$. No, kako x i y oba moraju biti pozitivni, to je $x=y$. Konačno,

$$(x,y) = (k,k), \quad k \in \mathbb{R}_0^+.$$

Uvrštavanjem u danu jednadžbu zaključujemo da je to zaista rješenje.

Zadatak 4. *Odredite realne brojeve a, b, c za koje vrijedi*

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) = 0.$$

Rješenje. Označimo

$$x = -a+b+c, \quad y = a-b+c, \quad z = a+b-c.$$

Tada je

$$a = \frac{y+z}{2}, \quad b = \frac{z+x}{2}, \quad c = \frac{x+y}{2}$$

i dana jednadžba prelazi u

$$(y+z)^2(z+x)(y-x) + (z+x)^2(x+y)(z-y) + (x+y)^2(y+z)(x-z) = 0,$$

tj.

$$x^3z + y^3x + z^3y - x^2yz - y^2zx - z^2xy = 0. \tag{3}$$

Pretpostavimo li da je $xyz \neq 0$, dijeljenjem sa xyz dobivamo

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} = x + y + z. \tag{4}$$

Prema CSB–nejednakosti je

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 &= \left(\frac{x}{\sqrt{y}} \cdot \sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt{z}} \cdot \sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \right)(x+y+z). \end{aligned}$$

Zbog (4) ova nejednakost postaje jednakost. Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} = \frac{\frac{y}{\sqrt{z}}}{\sqrt{z}} = \frac{\frac{z}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}},$$

tj. $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$, odnosno $x = y = z$. Tada je $a = b = c$.

Ako je $x = 0$, tada (3) postaje $z^3y = 0$, pa je $y = 0$ ili $z = 0$. U slučaju $x = y = 0$ imamo $a = b$ i $c = 0$, a u slučaju $x = z = 0$ imamo $a = c$ i $b = 0$.

Ako je $y = 0$ ili $z = 0$, zaključujemo analogno.

Dakle,

$$(a, b, c) \in \{(k, k, k), (k, k, 0), (k, 0, k), (0, k, k) \,:\, k \in \mathbb{R}\}.$$

Zadatak 5. *Riješite sustav jednadžbi*

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 6z &= 49 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 49. \end{aligned}$$

Rješenje. Prema CSB–nejednakosti je

$$(2x+3y+6z)^2 \leq (2^2+3^2+6^2)(x^2+y^2+z^2),$$

tj.

$$(2x+3y+6z)^2 \leq 49(x^2+y^2+z^2),$$

odnosno

$$49^2 \leq 49 \cdot 49;$$

dakle,

$$49 = 49.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = k, \quad k \in \mathbb{R},$$

tj. $x = 2k$, $y = 3k$, $z = 6k$, $k \in \mathbb{R}$. Tada iz $2x+3y+6z = 49$ slijedi $4k+9k+36k = 49$, pa je $k = 1$. Stoga je $x = 2$, $y = 3$, $z = 6$. Dakle, uređena trojka $(2, 3, 6)$ je rješenje danog sustava.

Zadatak 6. *Odredite pozitivne realne brojeve x, y, z za koje vrijedi*

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3, \\ \sqrt{x+3}+\sqrt{y+3}+\sqrt{z+3} &= 6. \end{aligned}$$

Rješenje. Prema CSB–nejednakosti je

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+3}+\sqrt{y+3}+\sqrt{z+3} \leq \sqrt{1^2+1^2+1^2} \cdot \sqrt{x+3+y+3+z+3} \\ = \; & \sqrt{3} \cdot \sqrt{x+y+z+9} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3+9} = 6. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{\sqrt{x+3}}{1} = \frac{\sqrt{y+3}}{1} = \frac{\sqrt{z+3}}{1},$$

tj. $x = y = z$. Tada iz prve jednadžbe sustava dobivamo $x = y = z = 1$.

Zadatak 7. *Odredite realne brojeve a, b, c tako da vrijedi*

$$\begin{aligned} a+b+c &= 6, \\ a^2+b^2+c^2 &= 12. \end{aligned}$$

Rješenje. Prema CSB–nejednakosti je

$$\begin{aligned} & 6^2 = (a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1)^2 \\ \leq \; & (a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2) = 3(a^2+b^2+c^2). \end{aligned}$$

Dakle, $a^2+b^2+c^2 \geq 12$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\frac{a}{1}=\frac{b}{1}=\frac{c}{1}$, tj. za $a=b=c=2$.

Zadatak 8. *Odredite pozitivne realne brojeve x, y, z tako da vrijedi*

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 1, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} &= \sqrt[4]{27}. \end{aligned}$$

Rješenje. Prema CSB–nejednakosti je

$$\begin{aligned} & 1\cdot 3 = (x^2+y^2+z^2)(1^2+1^2+1^2) \geq (x\cdot 1+y\cdot 1+z\cdot 1)^2 \\ = \ & (x+y+z)^2 \iff x+y+z \leq \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dalje, opet prema CSB–nejednakosti, imamo

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{3} \geq 3(x+y+z) = \big((\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{z})^2\big)\cdot(1^2+1^2+1^2) \\ \geq \ & (\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2, \end{aligned}$$

tj.

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leq \sqrt{3\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3^3}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\frac{\sqrt{x}}{1}=\frac{\sqrt{y}}{1}=\frac{\sqrt{z}}{1}$, tj. $x=y=z$. Tada iz $x^2+y^2+z^2=1$ slijedi $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zadatak 9. *Odredite nenegativne realne brojeve x, y, z tako da vrijedi*

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1, \\ x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x} &= \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Rješenje. Prema CSB–nejednakosti je

$$\begin{aligned} & (x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x})^2 = (\sqrt{xy}\cdot\sqrt{x}+\sqrt{yz}\cdot\sqrt{y}+\sqrt{xz}\cdot\sqrt{z})^2 \\ \leq \ & \big((\sqrt{xy})^2+(\sqrt{yz})^2+(\sqrt{xz})^2\big)\cdot\big((\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{z})^2\big) \\ = \ & (xy+yz+xz)(x+y+z) = xy+yz+xz. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako postoji realan broj m takav da je

$$\sqrt{xy}=m\sqrt{x},\ \sqrt{yz}=m\sqrt{y},\ \sqrt{xz}=m\sqrt{z},$$

odnosno $x=y=z$. Tada iz prve jednadžbe sustava slijedi $3x=1$, tj. $x=\frac{1}{3}$. Dakle,

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).$$

Zadatak 10. *Odredite pozitivne realne brojeve x, y, z tako da vrijedi*

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\ x^2yz + xy^2z + xyz^2 &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Rješenje. Prema CSB–nejednakosti je

$$\begin{aligned} & (x^2yz + xy^2z + xyz^2)^2 = (x \cdot xyz + y \cdot xyz + z \cdot xyz)^2 \\ \leq\ & (x^2 + y^2 + z^2)(x^2y^2z^2 + x^2y^2z^2 + x^2y^2z^2), \end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{1}{3\sqrt{3}} \leq xyz.$$

Iz druge jednadžbe sustava, primjenom aritmetičko-geometrijske nejednakosti, dobivamo

$$\frac{1}{3} = xyz(x + y + z) \geq xyz \cdot 3\sqrt[3]{xyz} = 3 \cdot \sqrt[3]{(xyz)^4},$$

odakle slijedi

$$xyz \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y = z$. Tada iz prve jednadžbe sustava dobivamo $x^2 + x^2 + x^2 = 1$, odakle je $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Rješenje danog sustava je

$$(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Zadatak 11. *Odredite pozitivne realne brojeve x, y, z tako da vrijedi*

$$\begin{aligned} xyz &= 1, \\ x(y^3 - 1) + y(z^3 - 1) + z(x^3 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje. Iz druge jednadžbe dobivamo

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 = x + y + z.$$

Kako $x, y, z = 0$ nisu rješenja danog sustava, to možemo jednadžbu podijeliti sa xyz, pa dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} &= \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy}, \\ \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} &= \frac{x}{xyz} + \frac{y}{xyz} + \frac{z}{xyz}, \\ \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} &= x + y + z. \end{aligned}$$

Neka je $m = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}$, $m \in \mathbb{R}^+$. Tada je prema CSB–nejednakosti

$$\begin{aligned} m(x+y+z) &= \left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}\right)(x+y+z) \\ &= \left(\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{z}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{x}}\right)^2\right) \cdot \left((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2\right) \\ &\geq \left(\frac{x}{\sqrt{y}} \cdot \sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt{z}} \cdot \sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}\right)^2 = (x+y+z)^2, \end{aligned}$$

odnosno $m \geq x + y + z$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} = \frac{\frac{y}{\sqrt{z}}}{\sqrt{z}} = \frac{\frac{z}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}},$$

tj. $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$ odnosno $x = y = z$. Sada iz prve jednadžbe sustava zaključujemo

$$x = y = z = 1.$$

Zadatak 12. *Odredite realne brojeve x, y, z tako da vrijedi*

$$\begin{aligned} 3(x^2 + y^2 + z^2) &= 1, \\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 &= xyz(x+y+z)^3. \end{aligned}$$

Rješenje. Kako je $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq 0$, iz druge jednadžbe sustava slijedi i $xyz(x+y+z)^3 \geq 0$.

Ako je $xyz(x+y+z) = 0$, onda iz druge jednadžbe sustava slijedi $xy = yz = zx = 0$, pa je $x = y = 0$ ili $y = z = 0$ ili $z = x = 0$. Ako je $x = y = 0$, onda iz prve jednadžbe sustava dobivamo $z = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Analogno iz $y = z = 0$ dobivamo $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, a iz $z = x = 0$ dobivamo $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Neka je $xyz(x+y+z) > 0$. Prema CSB–nejednakosti je

$$\begin{aligned} & (xy + yz + zx)^2 = (1 \cdot xy + 1 \cdot yz + 1 \cdot zx)^2 \\ \leq \ & (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2), \end{aligned}$$

što je ekvivalentno sa

$$xyz(x+y+z) \leq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2,$$

a zbog druge jednadžbe sustava je

$$xyz(x+y+z) \leq xyz(x+y+z)^3.$$

Posljednju nejednakost možemo podijeliti sa $xyz(x+y+z)$, pa dobivamo

$$1 \leq (x+y+z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) = 1.$$

Tada je $(x+y+z)^2 = 3(x^2+y^2+z^2)$, što je ekvivalentno sa $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$, odakle je $x=y=z$. Tada iz prve jednadžbe sustava dobivamo $x=y=z=\pm\frac{1}{3}$. Dakle,

$$\begin{aligned}(x,y,z) \quad \in \quad & \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0,0\right),\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},0,0\right),\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right),\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right),\right.\\ & \left.\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(0,0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Zadatak 13. *Odredite realna rješenja sustava jednadžbi*

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}+\frac{9}{z^2} &= 4,\\ x^2+y^2+z^2 &= 9,\\ xyz &= \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Rješenje. Ako je (x,y,z) rješenje sustava, onda je to i $(x,-y,-z)$, $(-x,y,-z)$, $(-x,-y,z)$. Neka je $x,y,z>0$. Prema CSB–nejednakosti je

$$\begin{aligned}36 = (x^2+y^2+z^2)&\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}+\frac{9}{z^2}\right)\\ \geq \quad & \left(x\cdot\frac{1}{x}+y\cdot\frac{2}{y}+z\cdot\frac{3}{z}\right)^2 = (1+2+3)^2 = 36.\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{x}{\frac{1}{x}} = \frac{y}{\frac{2}{y}} = \frac{z}{\frac{3}{z}} = k, \qquad k\in\mathbb{R}^+,$$

tj. $x^2 = \frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{3} = k$, odnosno $x^2=k$, $y^2=2k$, $z^2p=3k$. Iz druge jednadžbe sustava tada dobivamo $6k=9$ tj. $k=\frac{3}{2}$. Tada je $x=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $y=\sqrt{3}$, $z=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Zadatak 14. *Neka su $a_1<a_2<a_3<a_4$ dani pozitivni brojevi. Odredite sve realne vrijednosti parametra c za koje sustav jednadžbi*

$$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3+x_4 &= 1,\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4 &= c,\\ a_1^2x_1+a_2^2x_2+a_3^2x_3+a_4^2x_4 &= c^2\end{aligned}$$

ima rješenje (x_1,x_2,x_3,x_4), gdje je $x_i\in\mathbb{R}_0^+$, $i=1,2,3,4$.

Rješenje. Prema CSB–nejednakosti je

$$\begin{aligned} & c^2 = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4)^2 \\ = \;& (a_1\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_1} + a_2\sqrt{x_2}\cdot\sqrt{x_2} + a_3\sqrt{x_3}\cdot\sqrt{x_3} + a_4\sqrt{x_4}\cdot\sqrt{x_4})^2 \\ \le \;& (a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + a_3^2x_3 + a_4^2x_4)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ = \;& a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + a_3^2x_3 + a_4^2x_4. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako postoji realan broj m takav da je

$$a_1\sqrt{x_1} = m\sqrt{x_1},\ a_2\sqrt{x_2} = m\sqrt{x_2},\ a_3\sqrt{x_3} = m\sqrt{x_3},\ a_4\sqrt{x_4} = m\sqrt{x_4}.$$

Međutim, a_1, a_2, a_3, a_4 su svi različiti, pa tri od x_i moraju biti jednaki nula. Tada iz prve jednadžbe sustava slijedi da je preostali x_i jednak 1 i tada druga jednadžba povlači da je c jednak odgovarajućem a_i.

Zaključimo: dani sustav ima traženo svojstvo ako i samo ako je c jednak jednom od četiri broja a_1, a_2, a_3, a_4.

Literatura

[1] Š. Arslanagić, I. Glogić, *Zbirka riješenih zadataka sa takmičenja iz matematike učenika srednjih škola u Federaciji Bosne i Hercegovine (1995.–2008.)*, Grafičar promet, Sarajevo, 2009.

[2] D. O. Shklarsky, N. N. Chentzov, I. M. Yaglom, *The USSR Olympiad problem book – selected problems and theorems of elementary mathematics*, Dover Publications Inc., New York, 1993.

[3] I. Ilišević, *Primjena Cauchy–Schwarz-Buniakowskyjeve nejednakosti u geometriji*, Osječki matematički list **5**(2005), br. 2, 77–84.

[4] M. E. Kuczma, *144 Problems of the Austrian–Polish Mathematics Competition 1978–1993*, The Academic Distribution Center, Freeland, USA