

Ристо Малчески, Скопје

НЕКОЛКУ ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОД НЕРАВЕНСТВА

Во оваа статија се презентирани повеќе задачи кои во периодот од 2015 до 2019 година се предлагани и се задавани на ЈММО и на ММО.

Задача 1. Даден е природен број n . Нека

$$A = \{x_1 + x_2 + \dots + x_s \mid x_1 x_2 \dots x_s = n, x_i > 1, x_i \in \mathbb{N}\}$$

Опредиј ја најголемата можна вредност за A .

Решение. Нека $x_1 x_2 \dots x_s = n$ и $x_i > 1, 1 \leq i \leq s$. За секои природни броеви $m, n > 1$ важи $nm \geq n + m$. Навистина

$$nm \geq n + m \quad \Leftrightarrow$$

$$nm - n - m \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$nm - n - m + 1 \geq 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$(n-1)(m-1) \geq 1,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $n = m = 2$. Тогаш,

$$x_1 + x_2 + \dots + x_s \leq x_1 x_2 + x_3 + \dots + x_s \leq x_1 x_2 x_3 + x_4 + \dots + x_s \leq \dots \leq x_1 x_2 \dots x_s = n.$$

Според тоа, секој елемент на A е помал или еднаков на n . Јасно, најголемата можна вредност е n , на пример кога производот се состои од еден природен број еднаков на n . ■

Задача 2. Нека a, b, c се реални броеви такви што $a, b, c \geq -3$ и

$$a + b + c = 0.$$

Докажи дека

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq -\frac{3^4}{4}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Јасно, за $x \geq -3$ важи

$$(x+3)\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \geq 0,$$

од каде следува

$$x^3 - \frac{27}{4}x + \frac{27}{4} \geq 0.$$

Од последното равенство, применето за броевите a, b, c и условот на задачата следува

$$a^3 + b^3 + c^3 - \frac{27}{4}(a+b+c) + 3 \cdot \frac{27}{4} \geq 0$$

од каде го добиваме бараното неравенство. Во претходните три неравенства знак за равенство важи ако и само ако $a, b, c \in \{-3, \frac{3}{2}\}$. За да биде исполнет условот $a+b+c=0$, јасно е дека два од броевите треба да бидат еднакви на $\frac{3}{2}$, а еден -3 и тогаш важи

$$a^3 + b^3 + c^3 = -3^3 + 2(\frac{3}{2})^3 = \frac{-4 \cdot 3^3 + 3^3}{4} = -\frac{3^4}{4}.$$

Задача 3. Нека реалните броеви a, b и c ги задоволуваат равенствата

$$(a+b)(b+c)(c+a) = abc \text{ и } (a^9+b^9)(b^9+c^9)(c^9+a^9) = (abc)^9.$$

Докажи дека $a=b=c=0$.

Решение. За произволни реални броеви x и y важи

$$x^2 - xy + y^2 \geq xy \text{ и } x^6 - x^3y^3 + y^6 \geq x^3y^3,$$

па затоа

$$x^9 + y^9 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)(x^6 - x^3y^3 + y^6) \geq (x+y)xyx^3y^3 = (x+y)x^4y^4,$$

каде што равенство важи ако и само ако $x=y$. Тогаш, од горното неравенство и од условот на задачата следува

$$\begin{aligned} (abc)^9 &= (a^9+b^9)(b^9+c^9)(c^9+a^9) \\ &\geq (a+b)(b+c)(c+a)a^4b^4c^4a^4b^4c^4 = a^9b^9c^9 \end{aligned}$$

па во горното неравенство важи знак равенство, што според претходно изнесеното значи дека $a=b=c$. Со замена во равенството

$$(a+b)(b+c)(c+a) = abc$$

добиваме дека $8a^3 = a^3$, односно $a=0$. Конечно, $a=b=c=0$.

Задача 4. Нека a, b, c се позитивни реални броеви за кои важи $abc=1$.

Докажи дека

$$a^2b + b^2c + c^2a \geq \sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}.$$

Решение. Ако го искористиме познатото неравенство

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$$

и неравенството меѓу аритметичка и геометриска добиваме

$$\begin{aligned} (a^2b + b^2c + c^2a)^2 &\geq 3(a^2b \cdot b^2c + b^2c \cdot c^2a + c^2a \cdot a^2b) \\ &= 3abc(b^2a + c^2b + a^2c) \\ &= 3(b^2a + c^2b + a^2c). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a^2b + b^2c + c^2a)^2 &= (a^2b + b^2c + c^2a)(a^2b + b^2c + c^2a) \\
 &\geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}(a^2b + b^2c + c^2a) \\
 &= 3(a^2b + b^2c + c^2a) \\
 (a^2b + b^2c + c^2a)^2 &= (a^2b + b^2c + c^2a) \cdot (a^2b + b^2c + c^2a) \\
 &\geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 9abc.
 \end{aligned}$$

Последните три неравенства ги собираме и последователно добиваме

$$\begin{aligned}
 3(a^2b + b^2c + c^2a)^2 &\geq 3(b^2a + c^2b + a^2c) + 3(a^2b + b^2c + c^2a) + 9abc \\
 (a^2b + b^2c + c^2a)^2 &\geq b^2a + c^2b + a^2c + a^2b + b^2c + c^2a + 9abc \\
 (a^2b + b^2c + c^2a)^2 &\geq (a + b + c)(ab + bc + ca) \\
 a^2b + b^2c + c^2a &\geq \sqrt{(a + b + c)(ab + bc + ca)}.
 \end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c$.

Задача 5. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што

$$x + y + z = 1.$$

Докажи дека

$$\frac{(x+y)^3}{z} + \frac{(y+z)^3}{x} + \frac{(z+x)^3}{y} + 9xyz \geq 9(xy + yz + zx).$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
 \frac{(x+y)^3}{z} + \frac{(y+z)^3}{x} + \frac{(z+x)^3}{y} + 9xyz &\geq 3\sqrt[3]{\frac{(x+y)^3}{z} \cdot \frac{(y+z)^3}{x} \cdot \frac{(z+x)^3}{y}} + 9xyz \\
 &= 3 \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{\sqrt[3]{xyz}} + 9xyz \\
 &\geq 3 \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{\frac{x+y+z}{3}} + 9xyz \\
 &= 9(x+y)(y+z)(z+x) + 9xyz \\
 &= 9(x+y+z)(xy + yz + zx) \\
 &= 9(xy + yz + zx).
 \end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Задача 6. Нека x, y, z се позитивни реални броеви за кои важи

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ и } x^4 + y^4 + z^4 = \frac{1}{3}.$$

Докажи дека

$$(x^2 + 1)x\sqrt{2(1 - x^2)} + (y^2 + 1)y\sqrt{2(1 - y^2)} + (z^2 + 1)z\sqrt{2(1 - z^2)} \geq \frac{8}{3}.$$

Решение. Од $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ следува

$$x^2 + 1 = 2x^2 + y^2 + z^2 \text{ и } 1 - x^2 = y^2 + z^2.$$

Според тоа, почетното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(2x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{2x^2(y^2 + z^2)} + (2y^2 + z^2 + x^2)\sqrt{2y^2(z^2 + x^2)} + \\ + (2z^2 + x^2 + y^2)\sqrt{2z^2(x^2 + y^2)} \geq \frac{8}{3}$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$(2x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{2x^2(y^2 + z^2)} \geq 2 \cdot 2x^2(y^2 + z^2),$$

$$(2y^2 + z^2 + x^2)\sqrt{2y^2(z^2 + x^2)} \geq 2 \cdot 2y^2(z^2 + x^2),$$

$$(2z^2 + x^2 + y^2)\sqrt{2z^2(x^2 + y^2)} \geq 2 \cdot 2z^2(x^2 + y^2).$$

Со собирање на последните три неравенства добиваме

$$(2x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{2x^2(y^2 + z^2)} + (2y^2 + z^2 + x^2)\sqrt{2y^2(z^2 + x^2)} + \\ + (2z^2 + x^2 + y^2)\sqrt{2z^2(x^2 + y^2)} \geq 8(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2).$$

Од равенството

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$

и условите на задачата, добиваме

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = \frac{1}{3}.$$

Конечно, со замена во горното неравенство, добиваме

$$(x^2 + 1)x\sqrt{2(1 - x^2)} + (y^2 + 1)y\sqrt{2(1 - y^2)} + (z^2 + 1)z\sqrt{2(1 - z^2)} \geq \frac{8}{3}.$$

Знак за равенство важи ако и само ако

$$2x^2 = y^2 + z^2, \quad 2y^2 = z^2 + x^2, \quad 2z^2 = x^2 + y^2,$$

односно ако и само ако $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 7. Нека a, b, c се позитивни броеви такви што $ab + bc + ca = 3$.

Докажи дека

$$\frac{a}{\sqrt{a^3 + 5}} + \frac{b}{\sqrt{b^3 + 5}} + \frac{c}{\sqrt{c^3 + 5}} \leq \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$a^3 + a^3 + 1 \geq 3a^2, \text{ т.е. } 2(a^3 + 5) \geq 3(a^2 + 3).$$

Сега, ако искористиме дека $ab + bc + ca = 3$, добиваме

$$2(a^3 + 5) \geq 3(a^2 + ab + bc + ca) = 3(c + a)(a + b).$$

Ако повторно го искористиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина од последното неравенство следува

$$\frac{a}{\sqrt{a^3 + 5}} \leq \sqrt{\frac{2a^2}{3(c+a)(a+b)}} \leq \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{\frac{a}{c+a} + \frac{a}{a+b}}{2} \right)} = \frac{\sqrt{6}}{6} \left(\frac{a}{c+a} + \frac{a}{a+b} \right).$$

Ако ги собереме последното неравенство и аналогните неравенства за b и c добиваме

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{a^3 + 5}} + \frac{b}{\sqrt{b^3 + 5}} + \frac{c}{\sqrt{c^3 + 5}} &\leq \frac{\sqrt{6}}{6} \left(\frac{a}{c+a} + \frac{a}{a+b} \right) + \frac{\sqrt{6}}{6} \left(\frac{b}{b+a} + \frac{b}{b+c} \right) + \frac{\sqrt{6}}{6} \left(\frac{c}{a+c} + \frac{c}{c+b} \right) \\ &= 3 \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

Задача 8. Нека a, b, c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{ab(b+1)(c+1)} + \frac{1}{bc(c+1)(a+1)} + \frac{1}{ca(a+1)(b+1)} \geq \frac{3}{(1+abc)^2}.$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{c(a+1)+a(b+1)+b(c+1)}{abc(a+1)(b+1)(c+1)} \geq \frac{3}{(1+abc)^2},$$

односно со неравенството

$$(1+abc)^2(ab+bc+ca+a+b+c) \geq 3abc(ab+bc+ca+a+b+c+abc+1).$$

Нека

$$m = a + b + c, n = ab + bc + ca \text{ и } x^3 = abc.$$

Тогаш последното равенство го добива видот

$$(m+n)(1+x^3) \geq 3x^3(x^3+m+n+1)$$

или

$$(m+n)(x^6 - x^3 + 1) \geq 3x^3(x^3 + 1).$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$m \geq 3x \text{ и } n \geq 3x^2,$$

па затоа

$$m+n \geq 3x(x+1).$$

Според тоа, доволно е да докажеме дека

$$\begin{aligned}x(x+1)(x^6-x^3+1) &\geq x^3(x+1)(x^2-x+1) && \Leftrightarrow \\x^6+1 &\geq x^4+x^2 && \Leftrightarrow \\(x^2-1)^2(x^2+1) &\geq 0,\end{aligned}$$

кое е очигледно точно.

Задача 9. Нека a, b, c и d се позитивни реални броеви такви што

$$a^3+b^3+c^3+d^3=4.$$

Докажи го неравенството

$$\frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} + \frac{1}{d^4+3} \geq 1.$$

Решение. Го трансформираме изразот од левата страна на неравенството и од неравенството меѓу аритметичката и геоматриската средина добиваме

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^4+3} &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \sum_{\text{cyc}} \frac{a^4}{a^4+3} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \sum_{\text{cyc}} \frac{a^4}{a^4+1+1+1} \\&\geq \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \sum_{\text{cyc}} \frac{a^4}{4a} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{4} = 1.\end{aligned}$$

Задача 10. Нека $n \geq 3$ и $a_1, a_2, \dots, a_n$ се позитивни реални броеви за кои што важи

$$\frac{1}{1+a_1^4} + \frac{1}{1+a_2^4} + \dots + \frac{1}{1+a_n^4} = 1.$$

Докажи го неравенството

$$a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n \geq (n-1)^{n/4}.$$

Решение. Нека $a_i^2 = \operatorname{tg} x_i, x_i \in [0, \frac{\pi}{2}), i=1, 2, \dots, n$. Тогаш $\sum_{i=1}^n \cos^2 x_i = 1$. Од

неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\sin^2 x_i = 1 - \cos^2 x_i \geq (n-1) \left(\prod_{j=1, j \neq i}^n \cos x_j \right)^{2/(n-1)}, i=1, 2, \dots, n.$$

Множејќи ги горните n неравенства, добиваме

$$\prod_{i=1}^n \sin^2 x_i \geq (n-1)^n \prod_{i=1}^n \cos^2 x_i.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\prod_{i=1}^n \operatorname{tg} x_i \geq (n-1)^{n/2}.$$

Конечно,

$$\prod_{i=1}^n a_i = \left(\prod_{i=1}^n \operatorname{tg} x_i \right)^{1/2} \geq (n-1)^{n/4},$$

што требаше и да се докаже.

Задача 11. Нека $t_k = a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k$, каде $a_1, a_2, \dots, a_n$ се позитивни реални броеви и $k \in \mathbb{N}$. Докажи дека

$$\frac{t_5^2 t_1^6}{15} - \frac{t_4^4 t_2^2}{6} + \frac{t_3^3 t_4^5}{10} \geq 0.$$

Решение. Неравенството кое треба да се докаже е еквивалентно со неравенството

$$2t_5^2 t_1^6 - 5t_4^4 t_2^2 + 3t_2^3 t_4^5 \geq 0,$$

односно со неравенството

$$2t_5^2 t_1^6 + 3t_2^3 t_4^5 \geq 5t_4^4 t_2^2 t_1^2.$$

Користејќи го неравенството меѓу аритметичка и геометричка средина имаме

$$2t_5^2 t_1^6 + 3t_2^3 t_4^5 \geq 5(t_5^{4,12} t_1^{9,15} t_2^{10,10})^{\frac{1}{5}}.$$

Според тоа, доволно е да докажеме дека

$$t_5^{4,12} t_1^{9,15} \geq t_4^{20} t_2^{10} t_1^{10},$$

т.е. дека

$$t_5^4 t_1^2 \geq t_4^5 t_2.$$

Да забележиме дека $t_5 t_3 \geq t_4^2$, бидејќи $\sum_{i=1}^n a_i^8$ се појавува на двете страни од

неравенството и уште за $i < j$ важи

$$a_i^5 a_j^3 + a_i^3 a_j^5 = a_i^3 a_j^3 (a_i^2 + a_j^2) \geq a_i^3 a_j^3 \cdot 2a_i a_j = 2a_i^4 a_j^4.$$

Важи и неравенството $t_5 t_1 \geq t_3^2$. Навистина, $\sum_{i=1}^n a_i^6$ се појавува на двете

страни од неравенството и уште за $i < j$ важи:

$$a_i^5 a_j + a_i a_j^5 = a_i a_j (a_i^4 + a_j^4) \geq 2a_i a_j a_i^2 a_j^2 = 2a_i^3 a_j^3.$$

Точно е неравенството $t_5 t_1 \geq t_4 t_2$, бидејќи

$$(a_i^5 a_j + a_i a_j^5) - (a_i^4 a_j^2 + a_i^2 a_j^4) = a_i a_j (a_i - a_j)^2 (a_i^2 + a_i a_j + a_j^2) \geq 0.$$

Конечно,

$$t_5^4 t_3^2 t_1^2 \geq t_5^2 t_4^4 t_1^2 \geq t_5 t_4^4 t_3^2 t_1 \geq t_4^5 t_3^2 t_2,$$

од каде следува дека

$$t_5^4 t_1^2 \geq t_4^5 t_2.$$

Задача 12. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $xyz = 1$. Докажи дека

$$(x^4 + \frac{z^2}{y^2})(y^4 + \frac{x^2}{z^2})(z^4 + \frac{y^2}{x^2}) \geq (\frac{x^2}{y} + 1)(\frac{y^2}{z} + 1)(\frac{z^2}{x} + 1).$$

Решение. Користејќи го неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц имаме

$$\sqrt{(x^2)^2 + (\frac{z}{y})^2} \cdot \sqrt{(y^2)^2 + (\frac{x}{z})^2} \geq x^2 y^2 + \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z} = x^2 (y^2 + \frac{1}{xy}),$$

$$\sqrt{(y^2)^2 + (\frac{x}{z})^2} \cdot \sqrt{(z^2)^2 + (\frac{y}{x})^2} \geq y^2 z^2 + \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{x} = y^2 (z^2 + \frac{1}{yz}),$$

$$\sqrt{(x^2)^2 + (\frac{z}{y})^2} \cdot \sqrt{(z^2)^2 + (\frac{y}{x})^2} \geq x^2 z^2 + \frac{z}{y} \cdot \frac{y}{x} = z^2 (x^2 + \frac{1}{xz}).$$

Множејќи ги последните три неравенства добиваме,

$$\begin{aligned} (x^4 + \frac{z^2}{y^2})(y^4 + \frac{x^2}{z^2})(z^4 + \frac{y^2}{x^2}) &\geq x^2 y^2 z^2 (y^2 + \frac{1}{xy})(z^2 + \frac{1}{yz})(x^2 + \frac{1}{xz}) \\ &= (xyz)^3 (\frac{x^2}{y} + 1)(\frac{y^2}{z} + 1)(\frac{z^2}{x} + 1) \\ &= (\frac{x^2}{y} + 1)(\frac{y^2}{z} + 1)(\frac{z^2}{x} + 1), \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

Задача 13. Нека n е природен број и $x_1, x_2, \dots, x_n$ се реални броеви. Докажи дека:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \frac{1}{n+1} (\sum_{i=1}^n x_i)^2 + \frac{12(\sum_{i=1}^n ix_i)^2}{n(n+1)(n+2)(3n+1)}. \quad (1)$$

Решение. Нека $S = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n x_i$ и $y_i = x_i - S$, за $1 \leq i \leq n$. Тогаш важи

$$\sum_{i=1}^n ix_i = \sum_{i=1}^n iy_i + \frac{n(n+1)}{2} S$$

и

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2S \sum_{i=1}^n x_i + nS^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - S^2.$$

Сега од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n ix_i \right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^n iy_i + \frac{n(n+1)}{2} S \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n i^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 + S^2 \right) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \end{aligned}$$

т.е. точно е неравенството (1).

Задача 14. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $abc = \frac{2}{3}$.

Докажи дека

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \right) \geq a + b + c.$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$a^3 + b^3 = \frac{a^3 + a^3 + b^3}{3} + \frac{b^3 + b^3 + a^3}{3} \geq a^2b + b^2a = ab(a+b).$$

Слично,

$$b^3 + c^3 \geq bc(b+c) \quad \text{и} \quad c^3 + a^3 \geq ca(c+a).$$

Последните три неравенства ги собираме и добиваме

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)}{2} \quad (1)$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)) \left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \right) \geq (ab + bc + ca)^2 \quad (2)$$

Исто така, имаме:

$$(ab + bc + ca)^2 \geq 3(ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab) = 3abc(a+b+c) = 2(a+b+c) \quad (3)$$

Од (1), (2) и (3) добиваме

$$\begin{aligned} (a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \right) &\geq \frac{ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)}{2} \left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \right) \\ &\geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{2} \geq \frac{2(a+b+c)}{2} \\ &= a + b + c. \end{aligned}$$

Задача 15. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$.

Докажи дека

$$2(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 3(a + b + c + ab + bc + ca).$$

Решение. *Прв начин.* Прво ќе докажеме дека

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq ab + bc + ca \text{ и } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c. \quad (1)$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} &= \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \frac{a}{b}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{c}{a} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c}\right) \\ &\geq \frac{\sqrt[3]{ac}}{\sqrt[3]{b^2}} + \frac{\sqrt[3]{ba}}{\sqrt[3]{c^2}} + \frac{\sqrt[3]{cb}}{\sqrt[3]{a^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{abc}}{b} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{c} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{a} \\ &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} \\ &= ab + bc + ca. \end{aligned}$$

Слично, добиваме

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} &= \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{c}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b}\right) \\ &\geq \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{bc}} + \frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{ca}} + \frac{\sqrt[3]{c^2}}{\sqrt[3]{ab}} \\ &= \frac{a}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{b}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{c}{\sqrt[3]{abc}} \\ &= a + b + c. \end{aligned}$$

Сега од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) \geq \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \text{ и } (a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 9.$$

Последните неравенства ги собираме и ако ги искористиме неравенствата

(1) добиваме

$$\begin{aligned} 2(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) &\geq \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 + 9 \\ &\geq 6\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \\ &\geq 3(a + b + c + ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Втор начин. Нека $a = x^3, b = y^3, c = z^3$ и да означиме

$$T_{p,q,r} = x^p y^q z^r + y^p x^q z^r + \dots$$

Тогаш дадено неравенство го добива обликот

$$4T_{12,6,0} + 2T_{6,6,6} \geq 3T_{8,5,5} + 3T_{7,7,4}. \quad (*)$$

Ако го примениме неравенството на Шур на тројките (x^4y^2, y^4z^2, z^4x^2) и (y^4x^2, z^4y^2, x^4z^2) и ги собереме добиените неравенства наоѓаме

$$T_{12,6,0} + T_{6,6,6} \geq T_{10,4,4} + T_{8,8,2}. \quad (1)$$

Од друга страна од неравенството на Мјурхед имаме

$$T_{12,6,0} \geq T_{6,6,6}, \quad T_{10,4,4} \geq T_{8,5,5}, \quad T_{8,8,2} \geq T_{7,7,4}. \quad (2)$$

Конечно, неравенството (*) следува од неравенствата (1) и (2).