Problemi s ortocentrom, II

Zvonko Čerin[1], *Zagreb*

U ovom drugom dijelu članka pokazuje se da grešaka poput onih iz knjige [9] koje smo razmotrili u prvom dijelu [1] ima i u nekim drugim knjigama i člancima pa i na Internetu.

Johnsonovi problemi s ortocentrom

Greška iz teorema 11.12 knjige [9] pojavljuje se i u mnogo starijoj i u svijetu poznatijoj knjizi Rogera A. Johnsona [7] gdje je formula (12) na stranici 190 dana u tvrdnji f. i formula (11) na stranici 191 opet kao tvrdnja f. Na toj stranici ima još dosta pogrešaka tako da ćemo sada opisati kako ih popraviti.

Teorem 9. (Popravak tvrdnje b iz [7, str. 191] *(a) Trokut* ABC *nije tupokutan onda i samo onda ako je opseg njegovog ortičkog trokuta* DEF *jednak kvocijentu dvostruke površine i polumjera opisane kružnice trokuta* ABC, *tj.* $|EF| + |FD| + |DE| = \frac{2S}{R}$.

(b) Kut C *u trokutu* ABC *nije šiljast onda i samo onda ako vrijedi* $|EF| + |FD| - |DE| = \frac{2S}{R}$.

Dokaz. Odaberimo pravokutni koordinatni sustav tako da je $A(0, 0)$, $B(r(f+g), 0)$ i $C\left(\frac{(f^2-1)gr}{fg-1}, \frac{2fgr}{fg-1}\right)$. Parametri f i g su kotangensi polovica kuteva A i B dok je r radijus upisane kružnice trokuta ABC. Primijetimo da su f, g i r povezani s duljinama stranica a, b i c ovako

$$f = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4S}, \quad g = \frac{(a+b+c)(a-b+c)}{4S}, \quad r = \frac{2S}{a+b+c},$$

gdje je $S = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}{4}$. Obrnuto,

$$a = \frac{rf(g^2+1)}{fg-1}, \quad b = \frac{rg(f^2+1)}{fg-1}, \quad c = r(f+g).$$

Ovakav odabir koordinata točaka i način dokazivanja uz pomoć računala koji ćemo stalno koristiti detaljno su objašnjeni u člancima [2], [3], [4] i [5].

Kao i u dokazu teorema 8 možemo uzeti $f > 1$ i $g > 1$. Lagano se izračuna $|EF| = \frac{rf(f^2-1)(g^2+1)}{(f^2+1)(fg-1)}$, $|FD| = \frac{rg(f^2+1)(g^2-1)}{(g^2+1)(fg-1)}$, $|DE| = \frac{r(f+g)(fg+f+g-1)|fg-f-g-1|}{(f^2+1)(g^2+1)}$ i $S = \frac{fgr^2(f+g)}{fg-1}$.

(a) Ako trokut ABC nije tupokutan, onda je prema lemi 3 stranica $|DE|$ jednaka $\frac{r(f+g)(fg+f+g-1)(f+g-fg+1)}{(f^2+1)(g^2+1)}$. Sada se uvrštavanjem gornjih prikaza lagano provjeri da je $|EF| + |FD| + |DE| = \frac{2S}{R}$.

[1] Autor je redoviti profesor na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu

Obrnuto, ako se u jednakost $|EF| + |FD| + |DE| = \frac{2S}{R}$ za $|EF|$, $|FD|$, R i S uvrste gornje vrijednosti i riješi po $|DE|$ dobije se

$$|DE| = \frac{r\,(f+g)\,(g+f+fg-1)\,(f+g-fg+1)}{(f^2+1)(g^2+1)}.$$

Usporedbom s gornjim izrazom za $|DE|$ vidimo da izraz $fg-f-g-1$ nije pozitivan pa prema lemi 3 slijedi da kut C nije tup (tj. da trokut ABC nije tupokutan).

(b) Ako kut C nije šiljast, prema lemi 3 je stranica $|DE|$ jednaka $\frac{r\,(f+g)(fg+f+g-1)(fg-f-g-1)}{(f^2+1)(g^2+1)}$. Sada odmah slijedi

$$|EF| + |FD| - |DE| = \frac{2S}{R}.$$

Obrnuto, ako se u jednakost $|EF| + |FD| - |DE| = \frac{2S}{R}$ za $|EF|$, $|FD|$, R i S uvrste gornje vrijednosti i riješi po $|DE|$ dobije se

$$|DE| = \frac{r\,(f+g)\,(g+f+fg-1)\,(fg-f-g-1)}{(f^2+1)(g^2+1)}.$$

Jer je $|DE| \geq 0$ imamo $fg-f-g-1 \geq 0$. Ako je $fg-f-g-1 = 0$ onda je $c^2 = a^2 + b^2$ pa je prema Pitagorinom teoremu kut C pravi.

Ako je $fg-f-g-1 > 0$ onda prema lemi 3 slijedi da je kut C tupi (tj. da je trokut ABC tupokutan).

Dakle, u svakom slučaju, kut C nije šiljast. $\square$

Teorem 10. (Popravak tvrdnje c iz [7, str. 191].) *(a) Trokut ABC nije tupokutan onda i samo onda ako je udaljenost nožišta ortogonalnih projekcija točke D na pravce CA i AB jednaka polovici opsega njegovog ortičkog trokuta DEF.*

(b) Kut A u trokutu ABC nije šiljast onda i samo onda ako je udaljenost nožišta ortogonalnih projekcija točke D na pravce CA i AB jednaka $\frac{|FD|+|DE|-|EF|}{2}$.

Teorem 11. (Popravak tvrdnje d iz [7, str. 191.) *(a) Trokut ABC nije tupokutan onda i samo onda ako je produkt duljina visina tog trokuta jednak produktu njegove površine i opsega njegovog ortičkog trokuta DEF,*

$$|AD| \cdot |BE| \cdot |CF| = S\,(|EF| + |FD| + |DE|).$$

(b) Kut A u trokutu ABC nije šiljast onda i samo onda ako je

$$|AD| \cdot |BE| \cdot |CF| = S\,(|FD| + |DE| - |EF|).$$

U dijelu g na stranici 191 u [7] razmatra se polumjer ϱ upisane kružnice ortičkog trokuta DEF. Prvo se tvrdi da je

$$\varrho = |HD|\,\cos A = 2R\,\cos A\,\cos B\,\cos C$$

što očigledno nije istinito kada je kut A tup jer je tada $\cos A$ negativan.

Što je onda $|HD| \cdot |\cos A|$ kada je kut A tup? Taj produkt nije polumjer upisane kružnice ortičkog trokuta DEF već polumjer ϱ_a njegove pripisane kružnice nasuprot vrha D. Tada je vrh A središte upisane kružnice trokuta DEF, a ne ortocentar H (koji je to kada je kut A šiljast i koji za tupi A prelazi u središte njegove D-pripisane kružnice).

Dalje se tvrdi da je $|AH| \cdot |HD| = 2\,R\,\varrho$. Opet je to točno samo kada trokut ABC nije tupokutan. Ako je trokut ABC tupokutan onda je $|AH| \cdot |HD| = 2\,R\,\varrho_a$. Slične tvrdnje vrijede za produkte $|BH| \cdot |HE|$ i $|CH| \cdot |HF|$.

Slijedi Johnsonova tvrdnja da je omjer površina ortičkog trokuta DEF i osnovnog trokuta ABC jednaka $\frac{\varrho}{R}$. To isto vrijedi samo za trokute koji nisu tupokutni. Ako je trokut ABC tupokutan taj omjer je jednak $\frac{\varrho_a}{R}$, $\frac{\varrho_b}{R}$ ili $\frac{\varrho_c}{R}$ već prema tome koji je kut trokuta ABC tup.

Interesantno je da istu pogrešku nalazimo i u zadatku 52(c) na strani 273 talijanske knjige [6] iz 2001. godine kada su programi za dinamičku geometriju poput Cabri, Cindarella i Sketchpad već dosta rasprostranjeni. I prethodni zadatak 52(b) tamo pogrešno tvrdi da za sve trokute vrijedi

$$|AH| \cdot |AD| + |BH| \cdot |BE| + |CH| \cdot |CF| = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

I ta formula je istinita samo za trokute koji nisu tupokutni, a ako je npr. kut C tup onda ona glasi:

$$|AH| \cdot |AD| + |BH| \cdot |BE| - |CH| \cdot |CF| = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

I na kraju, Johnson izvodi zaključak da je

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8\,R^2 + 4\,\varrho\,R.$$

Kao i gore, ta formula je istinita samo za trokute koji nisu tupokutni. Ako trokut ABC ima tupi kut desna strana mora biti $8\,R^2 - 4\,\varrho_a\,R$, $8\,R^2 - 4\,\varrho_b\,R$ ili $8\,R^2 - 4\,\varrho_c\,R$ ovisno o tome koji je kut trokuta ABC tup.

Zatim dolazi tvrdnja h koja glasi:

$$|AH|^2 + |BH|^2 + |CH|^2 = 4\,R^2 - 4\,\varrho\,R.$$

I ovdje za tupokutne trokute desna strana je zapravo $4\,R^2 + 4\,\varrho_a\,R$, $4\,R^2 + 4\,\varrho_b\,R$ ili $4\,R^2 + 4\,\varrho_c\,R$ već prema tome koji je kut trokuta ABC tup.

Postoji još jedan način kako ukloniti neke od Johnsonovih poteškoća iz g. Bolje je s ϱ označiti (zajedničku) udaljenost ortocentra H od pravaca EF, FD i DE. Onda je

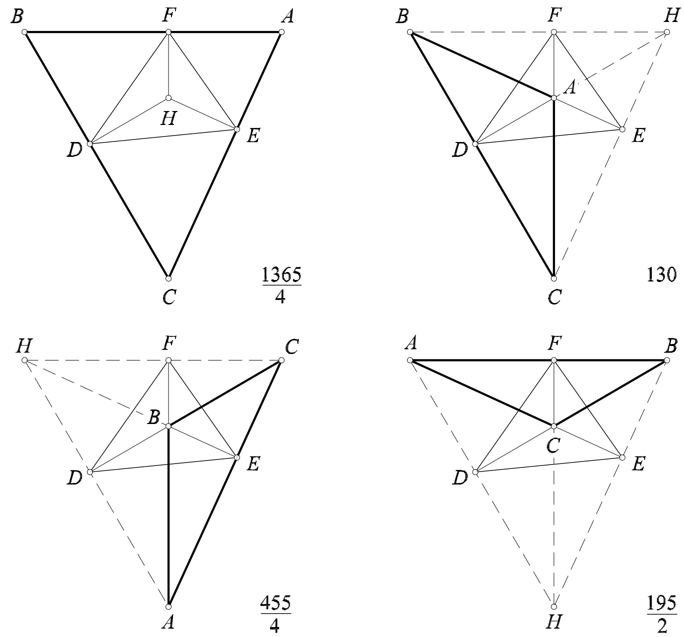
$$\varrho = |HD| \cdot |\cos A| = 2\,R \cdot |\cos A\,\cos B\,\cos C|,$$

$|AH| \cdot |HD| = 2\,R\,\varrho$ i omjer površina trokuta DEF i ABC jednak $\frac{|DEF|}{|ABC|} = \frac{\varrho}{R}$ bez ikakvih ograničenja na trokut ABC.

Primijetimo da je nedavno u članku [8] analizirano rješavanje problema određivanja površine trokuta ABC čiji ortički trokut DEF ima stranice 13, 14 i 15. Izvodi se formula $\frac{|DEF|}{|ABC|} = \frac{\varrho}{R}$ i primjećuje da ona vrijedi jedino za trokute koji nisu tupokutni. Posljednji paragraf glasi ovako:

"Kod tupokutnog trokuta nožišta dviju visina, kao i ortocentar, su izvan trokuta i očito ništa od navedenog ne vrijedi (jer smo u svim dokazima koristili da je ortički trokut dio polaznog trokuta, što sada nije). Može se pokazati da i u ovom slučaju postoje zanimljivi odnosi među elementima tih dvaju trokuta. Ali, o tome, možda drugom prigodom."

Nažalost ne primjećuje se da tvrdnja može biti istinita iako neka posebna metoda njenog dokazivanja nije provediva i da navedene napomene o posebnosti tupokutnih trokuta imaju kao posljedicu da razmatrani problem, pored rješenja $|ABC| = \frac{1365}{4}$, ima još tri rješenja. To su $|ABC| = 130$, $|ABC| = \frac{455}{4}$ i $|ABC| = \frac{195}{2}$. Sva četiri rješenja su prikazana na slici 4.



Slika 4. Četiri rješenja problema.

U programu Maple V u dokazu se najprije odredi rješenje $f=2$, $g=\frac{7}{4}$ i $r=4$ sistema $\left\{13=\frac{rf\left(g^2+1\right)}{fg-1},\ 14=\frac{rg\left(f^2+1\right)}{fg-1},\ 15=r\,(f+g)\right\}$ i onda te vrijednosti uvrsti u koordinate središta upisane i tri pripisane kružnice $I\,(f\,r,\,r)$, $A_e\left(\frac{(f+g)f\,g\,r}{f\,g-1},\ \frac{(f+g)\,g\,r}{f\,g-1}\right)$, $B_e\left(\frac{r(f+g)}{1-f\,g},\ \frac{r(f+g)f}{f\,g-1}\right)$ i $C_e\,(g\,r\,,-f\,g\,r)$. I na kraju, koristi se formula $\frac{|(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z|}{2}$ za površinu trokuta čiji vrhovi imaju koordinate $(x,\,a)$, $(y,\,b)$ i $(z,\,c)$. Tražene površine su $|A_eB_eC_e|=\frac{1365}{4}$, $|IB_eC_e|=130$, $|A_eIC_e|=\frac{455}{4}$ i $|A_eB_eI|=\frac{195}{2}$.

Ortocentar na Internetu

Ako na Internetu tražimo dokumente koji sadrže riječ "Orthocenter" (engleski za ortocentar) pojavljuje se više desetaka tisuća mogućnosti. Neke od njih su iz zubarstva ali one iz matematike uglavnom ponavljaju samu definiciju ortocentra kao presjeka visina i / ili opisuju najjednostavnija njegova svojstva.

Naprimjer, na adresi `http://www.pballew.net/orthocen.html` anonimni autor ponavlja pogrešnu tvrdnju da je opseg ortičkog trokuta $\frac{2S}{R}$ (vidi teorem 9).

Ugledna kolekcija sadržaja iz matematike namijenjena korisnicima programa Mathematica (koji je dostupan svim učenicima u Hrvatskoj) koju uređuje Eric W. Weisstein na adresi `http://mathworld.wolfram.com/Orthocenter.html` navodi neke od rezultata koje smo razmatrali, ali samo uz pretpostavku da je promatrani trokut šiljastokutan.

I na kraju, na adresi
http://jwilson.coe.uga.edu/em1725/OrthoRatio/OrthocenterRatioSum.html
Jim Wilson daje dva rezultata o sumi omjera nekih duljina dužina vezanih uz ortocentar i najavljuje da oni ovise o tome kakve kutove ima trokut. Mi ih ovdje sada dajemo u nešto poboljšanom obliku kao sljedeća dva teorema. Dokaze prepuštamo čitateljima za vježbu.

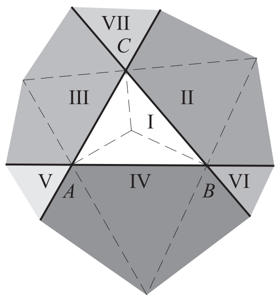
Teorem 12. *(a) Trokut ABC nije tupokutan onda i samo onda ako je* $\frac{|AH|}{|AD|}+\frac{|BH|}{|BE|}+\frac{|CH|}{|CF|}=2$.

(b) Trokut ABC ima tupi kut u vrhu C onda i samo onda ako je $\frac{|AH|}{|AD|}+\frac{|BH|}{|BE|}-\frac{|CH|}{|CF|}=2$.

Teorem 13. *(a) Trokut ABC nije tupokutan onda i samo onda ako je* $\frac{|HD|}{|AD|}+\frac{|HE|}{|BE|}+\frac{|HF|}{|CF|}=1$.

(b) Trokut ABC ima tupi kut u vrhu C onda i samo onda ako je $\frac{|HF|}{|CF|}-\frac{|HD|}{|AD|}-\frac{|HE|}{|BE|}=1$.

Wilson također spominje da zadnji teorem ima poopćenje kada se promatraju omjeri $\frac{|PP_a|}{|AD|}$, $\frac{|PP_b|}{|BE|}$ i $\frac{|PP_c|}{|CF|}$ gdje su P_a, P_b i P_c nožišta okomica iz točke P na pravce BC, CA i AB. Naš sljedeći teorem je još jedno poboljšanje u kojem ne moramo imati okomice. U njegovoj formulaciji koristimo sedam područja na koje tri pravca, koja nisu kopunktulna, dijele ravninu (vidi sliku 5).



Slika 5. Sedam područja ravnine određenih trokutom ABC.

Teorem 14. *Neka točka P nije vrh trokuta ABC, a pravci AP, BP i CP sijeku pravce BC, CA i AB u točkama U, V i W. Za točku Q različitu od točke P neka paralele kroz Q s pravcima AP, BP i CP sijeku pravce BC, CA i AB u točkama X, Y i Z.*

(a) Ako je točka Q u području I onda je $\frac{|QX|}{|AU|}+\frac{|QY|}{|BV|}+\frac{|QZ|}{|CW|}=1$.

(b) Ako je točka Q u području II onda je $\frac{|QY|}{|BV|}+\frac{|QZ|}{|CW|}-\frac{|QX|}{|AU|}=1$.

(c) Ako je točka Q u području III onda je $\frac{|QX|}{|AU|}-\frac{|QY|}{|BV|}+\frac{|QZ|}{|CW|}=1$.

(d) Ako je točka Q u području IV onda je $\frac{|QX|}{|AU|}+\frac{|QY|}{|BV|}-\frac{|QZ|}{|CW|}=1$.

(e) Ako je točka Q u području V onda je $\frac{|QX|}{|AU|}-\frac{|QY|}{|BV|}-\frac{|QZ|}{|CW|}=1$.

(f) Ako je točka Q u području VI onda je $\frac{|QY|}{|BV|}-\frac{|QZ|}{|CW|}-\frac{|QX|}{|AU|}=1$.

(g) Ako je točka Q u području VII onda je $\frac{|QZ|}{|CW|}-\frac{|QX|}{|AU|}-\frac{|QY|}{|BV|}=1$.

Dokaz. Ako trokut ABC ima koordinate vrhova kao i u dokazu teorema 8 i ako je $P(p, q)$ i $Q(u, v)$, onda je lagano naći koordinate točaka U, V, W, X, Y i Z i izračunati $\frac{|QX|}{|AU|} = \frac{|2\,g\,u+(g^2-1)\,v-2\,g\,r\,(f+g)|}{2\,g\,r\,(f+g)}$, $\frac{|QY|}{|BV|} = \frac{|-2f\,u+(f^2-1)\,v|}{2f\,r\,(f+g)}$ i $\frac{|QZ|}{|CW|} = \frac{v\,(f\,g-1)}{2f\,g\,r}$. Primijetite da koordinata p i q točke P u tim izrazima nema.

Budući da su funkcije u brojnicima tih kvocijenata jednadžbe pravaca stranica trokuta, pažljivom analizom predznaka njihovih vrijednosti lagano se potvrđuju relacije (a) – (g). $\square$

Završne napomene

Poteškoće u teoremima 11.10, 11.11 i 11.12 iz [9] otkrivene su na predavanjima autora u sklopu kolegija "Matematika računalom" na studiju matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu gdje se studenti podučavaju kako koristiti računala u rješavanju matematičkih problema. Poteškoće iz Johnsonove knjige su otkrivene jednostavnom provjerom što o sličnim temama pišu drugi jer sam pretpostavljao da su pogreške naslijeđene. Primjeri koje smo spomenuli pokazuju da tupokutni trokuti ipak nisu zanemareni iako su malo problematičniji od šiljastokutnih i pravokutnih trokuta.

Dakle, knjige i članke iz matematike treba pažljivo čitati i svaku tvrdnju detaljno analizirati i po mogućnosti za svaku nacrtati slike u nekom od programa za dinamičku geometriju da se vidi kako se tvrdnja ponaša za različite položaje promatranih objekata.

Isto tako, knjige i članke pišu ljudi pa je prirodno očekivati da ponekad imaju grešaka.

Literatura

[1] Z. Čerin, *Problemi s ortocentrom, I*, Matematičko-fizički list (Zagreb), 57 br. 1, (2006./ 2007.), 8–14.

[2] M. Bator, Z. Čerin, M. Čulav, *Analitička geometrija ravnine računalom*, Matematičko-fizički list (Zagreb), 54 br. 1, (2003./ 2004.), 26–36.

[3] Z. Čerin, S. Vlah, *Rješavanje zadataka računalom*, Matka (Zagreb), 10 (2001./ 2002.), br. 39, 198–202.

[4] Z. Čerin, S. Vlah, *Primjeri upotrebe računala kod rješavanja zadataka*, Matematičko-fizički list (Zagreb), 52 br. 4, (2001./ 2002.), 254–261

[5] Z. Čerin, S. Vlah, *Još jedno rješenje drugog zadatka na 42. MMO 2001 g.*, Matematičko-fizički list (Zagreb), 53 br. 1, (2002./ 2003.), 55–56.

[6] I. D'Ignazio, E. Suppa, *Il Problema Geometrico – Dal compasso al Cabri*, Interlinea Editrice, Teramo, 2001.

[7] R. A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover Publications, New York, 1960.

[8] Anđelko Marić, *Analiza jednog geometrijskog problema*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore, 13. državni susret, Trogir 5. – 8. svibnja 2004., HMD, str. 86–95.

[9] Dominik Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb 1994.