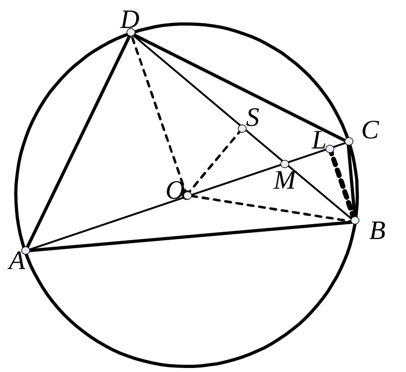
JMMO 2006

1. Нека *a, b, c, d, e* се реални броеви за кои $a+b+c+d+e=0$ и нека
$$A=ab+bc+cd+de+ea \text{ и } B=ac+ce+eb+bd+da.$$
Докажи дека $2006A+B\le 0$ или $A+\ 2006B\le 0$.

Решение. Од равенството $(a+b+c+d+e)^2=0$, следува:
$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=-2(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de).$$
Бидејќи левата страна на равенството е збир на ненегативни броеви, добиваме:
$$0\le a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=-2(A+B),$$
$$-2(A+B)\ge 0,$$
$$A+B\le 0.$$
Според тоа,
$$(2006A+B)+(A+\ 2006B)=2007(A+B)\le 0,$$
од што следува дека $2006A+B\le 0$ или $A+\ 2006B\le 0$.

2. Нека *ABCD* е конвексен четириаголник таков што
$$\measuredangle ABC=90^\circ,\ \measuredangle DAB=60^\circ \text{ и } \measuredangle BCD=120^\circ.$$
Нека дијагоналите *AC* и *BD* се сечат во точка *M*, таква што $\overline{BM}=1$ и $\overline{MD}=2$. Пресметај ја плоштната на четириаголникот *ABCD*.

Решение. Дадени се трите агли во четириаголникот *ABCD*, па затоа важи $\measuredangle ADC=90^\circ$. Нека *k* е кружница со дијаметар *AC*. Бидејќи $\measuredangle ABC=90^\circ$ и $\measuredangle ADC=90^\circ$ следува дека $B,D\in k$, што значи дека *ABCD* е тетивен четириаголник.



Триаголникот *BOD* е рамнокрак со агол $\measuredangle DOB=120^\circ$ како централен агол, двојно поголем од соодветниот периферен агол $\measuredangle DAB=60^\circ$. Следува дека $\measuredangle OBD=30^\circ$, па од правоаголниот триаголник *BOS*, каде *S* е средина на *BD*, се добива дека $\overline{OS}=\frac{\overline{OB}}{2}$. Но, $\overline{BS}=\frac{\overline{BD}}{2}=\frac{\overline{BM}+\overline{MD}}{2}=\frac{3}{2}$, па од Питагоровата теорема следува: $\frac{\overline{OB}^2}{4}+\frac{9}{4}=\overline{OB}^2$, односно $\overline{OB}=\sqrt{3}$ и $\overline{OS}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Бидејќи $\overline{MS}=\overline{BS}-\overline{BM}=\frac{1}{2}$, од правоаголниот триаголник MOS, се добива: $\overline{OM}=\sqrt{\overline{OS}^2+\overline{MS}^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$. Следува дека OBM е рамнокрак триаголник, по што се добива: $\measuredangle BOM=\measuredangle OBM=30^\circ$ и $\measuredangle OMB=120^\circ$. Триаголникот ABO е рамнокрак, па затоа

$$2\measuredangle BAM=180^\circ-\measuredangle AOB=180^\circ-(\measuredangle OBM+\measuredangle OMB)=180^\circ-150^\circ=30^\circ.$$

Следува $\measuredangle BAM=15^\circ$ и $\measuredangle CAD=60^\circ-15^\circ=45^\circ$. Сега, $\measuredangle ACD=45^\circ$, па затоа ACD е рамнокрак правоаголен триаголник. Неговата плоштина е

$$P_{ACD}=\frac{\overline{AD}^2}{2}=\frac{\overline{AC}^2}{4}=\frac{(2\cdot\overline{AO})^2}{4}=\frac{(2\cdot\overline{BO})^2}{4}=\frac{(2\sqrt{3})^2}{4}=3.$$

Ако BL е висина на триаголникот ABC спуштена врз страната AC, за триаголникот BLM се добива дека е правоаголен со остри агли 30° и 60°, по затоа $\overline{ML}=\frac{1}{2}$ и $\overline{BL}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. За плоштината на триаголникот ABC се добива

$$P_{ABC}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BL}}{2}=\frac{2\sqrt{3}\cdot\overline{BL}}{2}=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}.$$

Конечно, плоштината P на четириаголникот $ABCD$ е:

$$P=P_{ABC}+P_{ACD}=\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}.$$

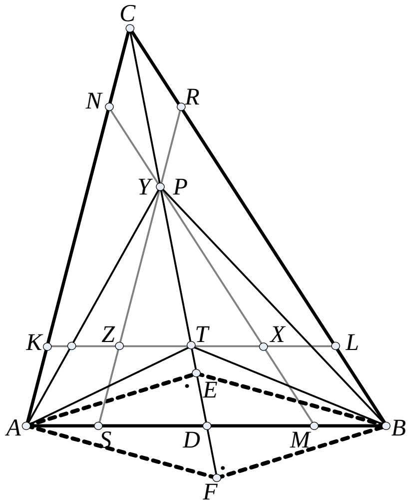
3. Нека ABC е остроаголен триаголник. Определи ги сите точки P, T во внатрешноста на триаголникот такви што, отсечките PT, PA, PB, PC, TA, TB го разделуваат триаголникот на пет триаголници со еднакви плоштини.

Решение. Нека ABC е произволен остроаголен триаголник.

Ако P и T се две точки од внатрешноста на триаголникот ABC, такви што отсечките PT, PA, PB, PC, TA и TB го разделуваат триаголникот на пет триаголници со еднакви плоштини, тогаш плоштината на секој од тие разделувачки триаголници ќе биде петтина од плоштината на триаголникот ABC.

Како и да се распоредени точките P и T во внатрешноста на триаголникот ABC, три од разделувачките триаголници ќе имаат една страна која истовремено е страна и на триаголникот ABC.

Триаголникот што ќе ја има страната *AB*, би имал плоштина $\frac{\overline{AB}\cdot h_1}{2}=\frac{1}{5}\cdot\frac{\overline{AB}\cdot h_c}{2}$, од што следува дека висината h_1 на разделувачкиот триаголник е петтина од висината h_c на триаголникот *ABC*, спуштена врз страната *AB*.



Тоа значи дека барем една од точките *P* и *T* мора да лежи на отсечката *KL* која е паралелна со страната *AB* и е на растојание $h_1=\frac{1}{5}h_c$ од неа.

Аналогно, барем една од точките *P* и *T* мора да лежи на отсечката *MN* која е паралелна со страната *BC* и е на растојание $h_2=\frac{1}{5}h_a$ од неа и барем една од точките *P* и *T* мора да лежи на отсечката *RS* која е паралела со страната *CA* и е на растојание $h_3=\frac{1}{5}h_b$ од неа (h_a и h_b се висините на триаголникот *ABC* спуштени врз страните *BC* и *CA* соодветно).

Нека со *X* е означена пресечната точка на отсечките *KL* и *MN*, со *Y* пресечната точка на отсечките *MN* и *RS* и со *Z* пресечната точка на отсечките *RS* и *KL*.

Бидејќи барем една од точките *P* и *T* мора да лежи на секоја од отсечките *KL*, *MN* и *RS*, следува дека барем една од точките *P* и *T* се совпаѓа со некоја од точките *X*, *Y* и *Z*.

Од условот во задачата, селдува дека *P* мора да се совпаѓа со точката *Y* . Тогаш точката *T* мора да лежи на отсечката *KL*. Јасно е дека плоштините на триаголниците *ABT*, *BCP* и *CAP* се еднакви на петтина од плоштината на триаголникот *ABC*.

Преостанатите два триаголници *PTA* и *PTB* имаат заедничка страна *PT*, па за да имаат еднакви плоштини, тие мора да имаат еднакви висини спуштени врз страната *PT*.

Нека *AE* и *BF* се висините спуштени во страната *PT* за триаголниците *PTA* и *PTB* соодветно. Тогаш отсечките *AE* и *BF* се меѓусебно паралелни и треба да се еднакви, од што селдува дека четириаголникот *AEBF* мора да е паралелограм. Тогаш пресечната точка D на дијагоналите AB и EF на паралелограмот $AEBF$ мора да е средина на отсечката AB. Од друга страна, отсечките AS и BM се петтина од страната AB на триаголникот ABC, од што следува дека точката D е средина и на отсечката SM. Отсечките AB и ZX се паралелни, од што следува дека триаголниците PSD и PZT се слични и исто така и триаголниците PMD и PXT се слични. Следува дека:

$$\frac{\overline{SD}}{\overline{ZT}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{XT}},$$

односно,

$$\frac{\overline{XT}}{\overline{ZT}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{SD}} = 1.$$

Значи, T мора да е средина на отсечката XY, по што T е средина и на отсечката KL.

Конечно, единствено решение на задачата е точката P да се наоѓа во пресекот на отсечките MN и RS и точката T да е средина на отсечката KL.

4. Нека $a > 0$ е реален број за кој постојат точно три природни броеви n за кои $1 < an < 2$. Колку природни броеви m може да постојат, за кои $2 < am < 3$?

Решение. Реалниот број a мора да е помал од $\frac{1}{2}$, бидејќи во спротивно не може да постојат повеќе од 2 природни броеви n, такви што $1 < an < 2$.

Бидејќи a е позитивен, за произволни природни броеви n_1 и n_2 од $n_1 < n_2$ следува $an_1 < an_2$. Затоа, трите природни броеви n за кои $1 < an < 2$ мора да се последователни. Тоа значи дека постои природен број $n \geq 2$, таков што:

$$a(n-2) \leq 1 < a(n-1) < an < a(n+1) < 2 \leq a(n+2). \qquad (1)$$

Притоа, не може $n = 2$, бидејќи од $2 \leq a(n+2)$ се добива $a \geq \frac{1}{2}$, па значи $n \geq 3$.

Од неравенствата $a(n-2) \leq 1 < a(n-1)$ се добива:

$$\frac{1}{n-1} < a \leq \frac{1}{n-2}. \qquad (2)$$

Од неравенствата $a(n+1) < 2 \leq a(n+2)$ се добива:

$$\frac{2}{n+2} \leq a < \frac{2}{n+1}. \qquad (3)$$

Ако $n=3$, од (2) се добива $\frac{1}{2}<a\leq 1$, од што следува дека не е можно $n=3$. Значи, $n\geq 4$.
Имаме;

$$\frac{2}{n+2}\leq\frac{1}{n-1} \Leftrightarrow 2n-2\leq n+2 \Leftrightarrow n\leq 4. \tag{4}$$

Ако $n=4$, тогаш од (2) и (3) се добива $\frac{1}{3}<a<\frac{2}{5}$. Притоа $6a$ и $7a$ сигурно се меѓу 2 и 3, а бројот $8a$ може да е меѓу 2 и 3, само ако $a<\frac{3}{8}$. Значи, ако $\frac{1}{3}<a<\frac{3}{8}$, тогаш постојат 3 природни броеви *m*, такви што $2<am<3$ ($m\in\{6,7,8\}$) и ако $\frac{3}{8}\leq a<\frac{2}{5}$, тогаш постојат 2 природни броеви *m*, така што $2<am<3$ ($m\in\{6,7\}$).
Според (4), ако $n>4$, тогаш $\frac{1}{n-1}<\frac{2}{n+2}\leq a$.
Имаме:

$$\frac{2}{n+1}\leq\frac{1}{n-2} \Leftrightarrow 2n-4\leq n+1 \Leftrightarrow n\leq 5 \tag{5}$$

Ако $n=5$, тогаш од (2) и (3) се добива $\frac{2}{7}\leq a<\frac{1}{3}$. Притоа, $7a, 8a$ и $9a$ се сигурно меѓу 2 и 3, освен за $a=\frac{2}{7}$ за кој $7a=2$. Бројот $10a$ е меѓу 2 и 3 само ако $\frac{2}{7}\leq a<\frac{3}{10}$. Значи, ако $a=\frac{2}{7}$, тогаш постојат 3 природни броеви *m*, такви што $2<am<3$ ($m\in\{8,9,10\}$), ако $\frac{2}{7}<a<\frac{3}{10}$, тогаш постојат 4 природни броеви *m*, такви што $2<am<3$ ($m\in\{7,8,9,10\}$) и ако $\frac{3}{10}\leq a<\frac{1}{3}$, тогаш постојат 3 природни броеви *m*, такви што $2<am<3$ ($m\in\{7,8,9\}$). Случајот $a=\frac{1}{3}$ не е можен, бидејќи за него постојат само 2 природни броеви *n*, за кои $1<an<2$ ($n\in\{4,5\}$).
Сега, според (5), ако $n>5$, ќе биде исполнето:

$$\frac{1}{n-1}<\frac{2}{n+1}\leq a\leq\frac{1}{n-2}<\frac{2}{n+1}.$$

Но, од неравенството $\frac{2}{n+2}\leq\frac{1}{n-2}$ следува дека $2n-4\leq n-2$, т.е. $n\leq 6$.
Значи, останува да се разгледа само уште случајот $n=6$. Во овој случај, од (2) и (3) се добива $a=\frac{1}{4}$, за кој постојат 3 природни броеви *m*, така што $2<am<3$ ($m\in\{9,10,11\}$).
Конечно, од претходнитре разгледувања следува дека може да постојт

2, 3 или 4 природни броеви m за кои $2<am<3$. Притоа ако $a\in[\frac{3}{8},\frac{2}{5})$ тогаш постојат 2 такви природни броја m, ако $a\in\{\frac{1}{4},\frac{2}{7}\}\cup[\frac{3}{10},\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3},\frac{3}{8})$ тогаш постојат 3 такви природни броја m и ако $a\in(\frac{2}{7},\frac{3}{10})$ постојат 4 такви природни броја m.

5. Нека p е прост број. Колку најмалку бои се потребни за на квадратна $p\times p$ табла да се поставaт жетони од кои секој е обоен со една од тие бои, така што на секое поле од таблата е поставен точно еден жетон и нема два жетони од иста боја кои се напаѓаат? Два жетони се напаѓаат ако се наоѓаат на иста хоризонтала, вертикала или ако линијата која ги поврзува е паралелна со една од дијагоналите на квадратот.

Решение. Не е тешко да се провери дека за $p=2$ решението е 4, а за $p=3$, решението е 5. Нека $p>3$. На секое поле на таблата ќе му придружиме координати (i,j), што означува дека полето е во i-тата редица, броејќи ги редиците од горе кон долу и во j-тата колона, броејќи ги колоните од лево на десно. За полињата со координати (i,i) ќе велиме дека ја сочинуваат главната дијагонала на таблата, а другата дијагонала ќе ја наречеме споредна дијагонала. На секое од полињата (i,i) на главната дијагонала ќе ставиме жетони со p различни бои нумерирани со $0,1,2,...,p-1$ - можните остатоци при делење со p. Потоа, во секоја редица ги пополнуваме полињата циклично, ставајќи во секое наредно поле број за 2 поголем од бројот во претходното поле. Притоа, по $p-2$ доаѓаат 0, 2, 4, ..., а по $p-1$ доаѓаат 1, 3, ...

Значи, во полето со координати (i,j) ставаме жетон чија боја е означена со бројот кој е остаток при делење на бројот $i+2(j-i)=2j-i$ со бројот p. Бидејќи p е прост број поголем од 3, тој е непарен, па јасно е дека во секоја редица ќе бидат застапени p бои, односно нема да бидат застапени жетони со иста боја.

Ако во колоната j се сретнат два жетони со иста боја, на пример во редиците m и n ($m>n$), тогаш броевите $2j-m$ и $2j-n$ даваат ист остаток при делење со p, па нивната разлика ќе биде делива со p. Следува дека $m-n$ е делив со p, што не е можно бидејќи m и n се помали од p. Значи во ниту една колона не е можно да се сретнат два жетони со иста боја.

Од поставеноста на жетоните, очигледно е дека во дијагоналите паралелни со главната дијагонала, не е можно да има два жетони со иста боја.

Ако две полиња се на споредната дијагонала или на дијагонала паралелна со споредната дијагонала, тогаш збировите на нивните координати се меѓусебно еднакви. Претпоставувајќи дека на полињата со координати $(m,k-m)$ и $(n,k-n)$ има жетони со иста боја, се добива дека броевите $2(k-m)-m$ и $2(k-n)-n$ даваат ист остаток при делење со p. Тоа значи дека $2k-3m$ и $2k-3n$ даваат ист остаток при делење со p, од што следува дека $3(m-n)$ е делив со p. Но, p е заемно прост и со 3 и со $m-n$, па не е можно $3(m-n)$ да е делив со p.

Конечно следува дека ако $p>3$, тогаш можен е распоред на жетони со p бои кој го задоволува условот во задачата, па p е најмалиот број на бои.