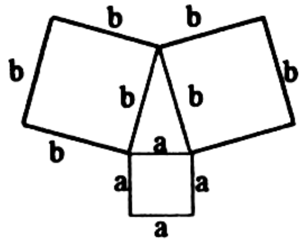
XIV РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

V.1. Од два града, оддалечени 690 km, истовремено тргнале еден кон друг патнички и брз воз. Се сретнале 6 часа по тргнувањето. Пресметај со колкава брзина се движел брзиот воз, ако патничкиот се движел со брзина од 50 km на час.

Решение: После 6 часа од тргнувањето, патничкиот воз поминал $6\cdot 50=300$ km. Брзиот воз за тоа време поминал $690-300=390$ km. Значи, тој се движел со брзина $390:6=65$, т.е. 65 km на час.

V.2. Периметарот на еден рамнокрак триаголник е 28 cm, а основата е за 2 cm помала од кракот. Над страните од триаголникот, во неговата надворешност, се конструирани квадрати. Пресметај го периметарот на добиената фигура.



Решение: *Прв начин:* $L=2b+a$; $a=b-2$; $28=2b+b-2$; $30=3b$; $b=10$ cm; $a=10-2=8$; $a = 8$ cm. Периметарот на фигурата е $L=3b+3b+3a=3\cdot 10+3\cdot 10+3\cdot 8=84$; $L=84$ cm.

Втор начин: $L=3\cdot 28$ cm; $L = 84$ cm.

V.3. Во една низа се запишани 9 природни броеви. Четврти по ред е бројот 4, а деветти по ред е бројот 9. Збирот на секои три последователни броја е 18. Одреди ги запишаните броеви.

Решение: Нека низата е: a, b, c, 4, d, e, f, g, 9. Бидејќи $a+b+c=b+c+4=4+d+e=d+e+f$, следи $a=f=4$. Бидејќи $9+g+f=g+f+e=e+d+4=d+4+c$, т.е. $9+g+4=g+4+e=e+d+4=d+4+c$, следи $e=c=9$. Бидејќи $a+b+c=4+d+e=f+g+9$, т.е. $4+b+9=4+d+9=4+g+9=18$, следи $b=d=g=5$. Низата е 4, 5, 9, 4, 5, 9, 4, 5, 9.

V.4. Правоаголник и квадрат имаат еднакви плоштини. Мерните броеви на нивните димензии се различни природни броеви од првата десетка. Ако должината на едната страна на правоаголникот е 2 cm одреди ја:

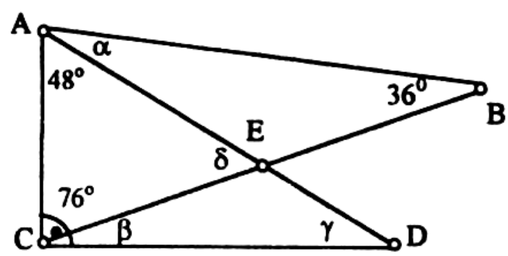
а) должината на другата страна на правоаголникот;

б) должината на страната на квадратот .

Решение: Нека страните на правоаголникот се: $a=2$ и b, а страната на квадратот нека е x.

Плоштината на правоаголникот $P_1=a\cdot b=2\cdot b$, а на квадратот $P_2=x^2$. Според условот на задачата $P_1=P_2$, $b\leq10$ и $x\leq10$, имаме $2b=x^2$. Овој услов е задоволен само за $b=8$ cm и $x=4$ cm.

VI.1. На цртежот, $AC\perp CD$. Одреди ја големината на аглите α, β, γ и δ.



Решение: Од ΔABC:

$\alpha=180°-(76°+36°+48°)=20°$

Од ΔACE: $\delta=180°-(76°+48°)=56°$

Од ΔACD: $\gamma=180°-(90°+48°)=42°$

$\beta=90°-76°=14°$

VI.2. Ако на бројот x оддесно му допишеме 6 и го поделиме со 9, потоа на добиениот количник оддесно му допишеме 8 и го поделиме со 8 се добива 31. Кој е тој број ?

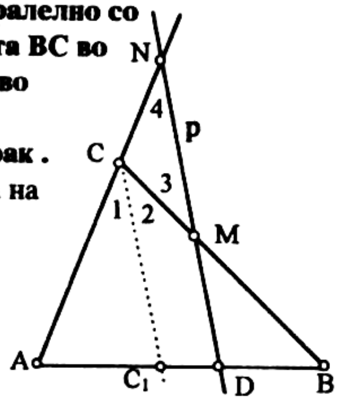
Решение: Бројот $\overline{y8}=31\cdot8$, т.е. $10y+8=248$; $y=24$; $\overline{x6}=24\cdot9$; $10x+6=216$; $x=21$.

VI.3. Членовите на едно еколошко друштво работеле 4 дена. Првиот ден работеле во парови и секој пар бил послужен со едно шише кисела вода. Вториот ден работеле во групи по тројца и секоја група била послужена со едно шише лимонада. Третиот ден работеле во групи по четворица и секоја група била послужена со едно шише овошен сок. Четвртиот ден работеле поединечно и секој бил послужен со едно шише кока кола. Утврдено е дека вкупно биле потрошени 50 шишиња. Колку членови имало еколошкото друштво?

Решение: Кога работеле во парови, x членови добиле $\frac{1}{2}x$ шишиња. Кога работеле по тројца во група, добиле $\frac{1}{3}x$ шишиња, кога работеле по четворица $\frac{1}{4}x$ шишиња, кога работеле поединечно секој добил по едно шише. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+x=50$; $25x=50\cdot 12$; $x=24$.

VI.4. Во триаголник ABC е повлечена симетралата CC_1 на аголот при темето C. На страната AB е избрана точка D низ која е повлечена права p паралелно со симетралата CC_1. Правата p ја сече страната BC во точка M и продолжението на страната AC во точка N.

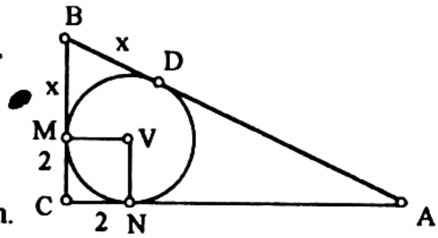
Докажи дека триаголникот MNC е рамнокрак .



Решение: $\angle 1=\angle 2$ - бидејќи CC_1 е симетрала на $\angle C$; $\angle 2=\angle 3$ - како наизменични агли при трансверзалата BC; $\angle 1=\angle 4$ - како согласни агли при трансверзалата AC;
Следува дека $\angle 3=\angle 4$, односно ΔMNC е рамнокрак.

VII.1. Кружница со дијаметар 4 cm е впишана во правоаголен триаголник со хипотенуза 19 cm.

Пресметај го периметарот на триаголникот.



Решение: Нека $\overline{BD}=x=\overline{BM}$; $\overline{AD}=19-x=\overline{AN}$; $L=\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}=$ $=19+(19-x+2)+(x+2)=42$, т.е. $L=42$ cm.

VII.2. Еден воз се движи од местото A до местото B со брзина од 50 km на час. Поради затворен сигнал, во местото C се задржал 5 минути. За да стигне навреме од C до B се движел со брзина од 60 km на час. Одреди го растојанието меѓу местата C и B.

Решение: Нека растојанието $\overline{BC} = x$. Ако возот продолжел без задржување, времето на движење од C до B е $t_2=\frac{x}{50}$. Со задржувањето од 5 минути, т.е. $\frac{1}{12}$ часа, времето $t_2=\frac{x}{60}+\frac{1}{12}$.

Бидејќи $t_1= t_2$ имаме $\frac{x}{50}=\frac{x}{60}+\frac{1}{12}$, од каде x=25 km.

VII.3. Просечната старост на 11 фудбалери од една екипа е за една година поголема од просечната старост на истата екипа без капитенот. Колку години повеќе има капитенот од просечната старост на целата екипа?

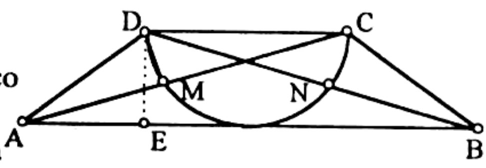
Решение: Нека x е бројот на годините на просечната старост на 11 фудбалери. Сите заедно имаат 11x години. Без капитенот, просечната старост на екипата е x-1 години, па останатите фудбалери имаат 10(x-1) години. Капитенот има 11x-10(x-1)=x+10, т.е. тој има 10 години повеќе од просечната старост на целата екипа.

VII.4. Помалата основа CD на трапез ABCD е дијаметар на кружница. Оваа кружница ја допира поголемата основа AB и ги преполовува дијагоналите на трапезот.

Одреди ги внатрешните агли на трапезот.

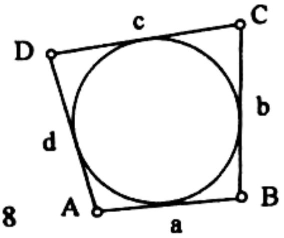
Решение: Нека M и N се пресечните точки на кружницата и дијагоналите, односно $\overline{AM} = \overline{MC}$ и $\overline{BN} = \overline{ND}$.

$\angle DMC=90^\circ$ - како периферен агол над дијаметарот CD.
Според тоа ΔACD е рамнокрак со основа AC и краци AD и CD.
И ΔDBC е рамнокрак со основа DB па $\overline{DC} = \overline{BC}$. Следува дека $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{BC}$, односно трапезот ABCD е рамнокрак. Висината $\overline{DE} = r = \frac{1}{2}\overline{DC} = \frac{1}{2}\overline{AD}$, па $\angle DAM=30^\circ$ -



како агол во правоаголен триаголник наспроти катетата што е половина од хипотенузата. $\angle CBN=30^{\circ}$ и $\angle ADC=\angle DCB=120^{\circ}$.

VIII.1. Трите страни на еден тангентен четириаголник се однесуваат како 1:2:3. Одреди ги должините на страните на четириаголникот ако неговиот периметар е 36 cm.



Решение: Од a:b:c=1:2:3 имаме a=k, b=2k, c=3k. Бидејќи четириаголникот е тагентен следува: a+c=b+d =36:2=18 cm. Од a+c=18, следува k+3k=18 или k=4,5. Според тоа a=4,5 cm, b=9 cm, c=13,5 cm; од b+d=18, следи d=9 cm.

VIII.2. Збирот на квадратите на три последователни непарни природни броеви е четирицифрен број запишан со исти цифри. Одреди ги тие броеви.

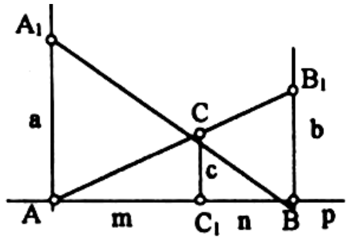
Решение: Ако бараните броеви се: 2n-1, 2n+1 и 2n+3, тогаш $(2n-1)^2+ +(2n+1)^2+(2n+3)^2=\overline{xxxx}$, $x\in\{1, 2, 3, ...,9\}$; $12n(n+1)=x\cdot1111-11$, $2\cdot2\cdot3n(n+1)= 11(101x-1)$. На левата страна имаме парен број. Затоа $x\in\{1, 3, 5, 7, 9\}$. За x=1 имаме $12n(n+1)=10\cdot10\cdot11$, односно не постои природен број што го задоволува ова равенство. За x=3, x=7 и x=9, на ист начин се утврдува дека не постои природен број што го задоволува равенството. За x=5 имаме $12n(n+1)= =11(505-1)=12\cdot21\cdot22$. Според тоа n=21,па бараните броеви се:2n-1=41, 2n+1=43 и 2n+3=45.

Забелешка: Решението е поедноставно ако се претпостави дека n е непарен број. Тогаш и n-2 и n+2 се напарни броеви, па од $(n-2)^2+n^2+ +(n+2)^2=\overline{xxxx}$, односно $3(n^2+2)+2=\overline{xxxx}$, следува дека четирицифрениот број при делење со 3 дава остаток 2, а таков е само бројот $5555(=3\cdot1851+2)$.

VIII.3. Дадени се две произволни точки A и B на права p. Во овие точки се повлечени нормалите AA_1 и BB_1 на правата p така што $\overline{AA_1}>\overline{BB_1}$ и точките A_1 и B_1 се наоѓаат на иста страна од правата p. Од пресечната точка C на правите AB_1 и A_1B е повлечена нормалата CC_1 на правата p $(C_1\in p)$.

Пресметај ја должината на отсечката CC_1 со помош на должините на отсечките AA_1 и BB_1.

Решение: Нека $\overline{AC_1} = m$, $\overline{C_1B} = n$, $\overline{AA_1} = a$, $\overline{BB_1} = b$.



Од $AA_1 \| BB_1 \| CC_1$ и $AA_1 \perp p$, $BB_1 \perp p$, $CC_1 \perp p$, следува $\Delta ABA_1 \sim \Delta CC_1B$, па $\frac{c}{a} = \frac{n}{m+n}$ ....(1),

а од $\Delta ABB_1 \sim \Delta ACC_1$, следува $\frac{c}{b} = \frac{m}{m+n}$ ....(2)

Ако ги собереме равенствата (1) и (2) се добива:

$\frac{c}{a} + \frac{c}{b} = \frac{n}{m+n} + \frac{m}{m+n} = 1$ односно $c \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1$, па $c = \frac{ab}{a+b}$. Од последното равенство се гледа дека должината на c не зависи од m и n, т.е. од должината на AB.

VIII.4. Погоните A и B на една фабрика можат да завршат една работа за 12 дена. После 2 дена погонот A престанал со работа поради ремонт, па целата работа ја завршил погонот B. За исто време погонот B може да заврши $66\frac{2}{3}$% од работата на погонот A.

Најди за колку дена била завршена работата.

Решение: Нека погонот B може да ја заврши работата за x дена. Тогаш, погонот A ќе ја заврши за $\frac{2}{3}x$ дена. За 1 ден двата погони ќе завршат $\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{2}{3}x} = \frac{1}{12}$. Одовде се добива: x=30, односно погонот B сам би ја завршил работата за 30 дена. За 2 дена било завршено $\frac{1}{6}$ од работата. Погонот сам работел $30 \cdot \frac{5}{6} = 25$ дена. Работата била завршена за 25+2=27 дена.