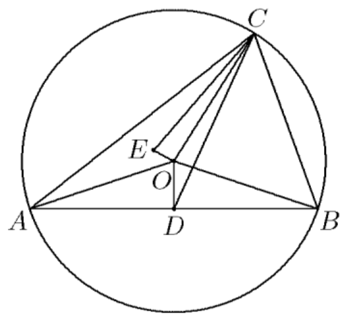
БМО 1985

1. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, а D е средината на AB. Нека E е тежиштето на $\triangle ACD$. Докажи, дека правата CD е нормална на OE ако и само ако $\overline{AB} = \overline{AC}$.

   Решение. *Прв начин.* Ќе ги користиме стандардните ознаки за елементите на триаголник. Ќе докажеме дека скаларниот производ на векторите $\overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{CD}$ е нула ако и само ако $\overline{AB} = \overline{AC}$. Бидејќи E е тежиштето на $\triangle ACD$, добиваме

   $$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3} \text{ и } \overrightarrow{CD} = \frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}.$$

   Освен тоа,

   $\overline{OD} = |R\cos\gamma|$, $\measuredangle OAC = \measuredangle OCA = |90^\circ - \beta|$,

   $\measuredangle OAB = |90^\circ - \gamma|$ и $\measuredangle OCB = |90^\circ - \alpha|$.

   Пресметуваме:

   $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CA} = Rb\sin\beta$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CB} = Rb\sin(\beta-\gamma)$,

   $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CA} = -Rb\sin\beta$, $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CB} = -Ra\sin\alpha$,

   $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{CA} = Rb\cos\gamma\sin\alpha$,

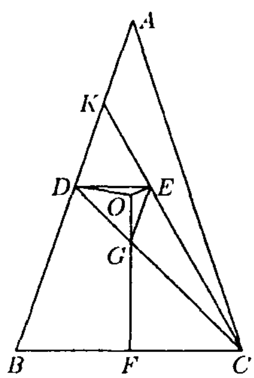
   $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{CB} = Ra\cos\gamma\sin\beta$.

   Ако искористиме дека $b\sin\alpha = a\sin\beta$, добиваме

   $$\begin{aligned}6\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\\ &= Ra(\sin(\beta-\gamma)+2\cos\gamma\sin\beta-\sin\alpha)\\ &= Ra(\sin(\beta-\gamma)+2\cos\gamma\sin\beta-\sin(\gamma+\beta))\\ &= 2Ra(\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma) = 2Ra\sin(\beta-\gamma).\end{aligned}$$

   Според тоа, скаларниот производ $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CD}$ е еднаков на нула ако и само ако $\sin(\beta-\gamma)=0$, т.е. ако и само ако $\beta=\gamma$, што значи ако и само ако $\overline{AB} = \overline{AC}$.

   Втор начин. Од условот на задачата следува $O \neq E$. Во спротивно $DE \perp AB$ и DE е тежишна линија во $\triangle ACD$ повлечена од темето D, т.е. $DE \perp AC$, што не е можно. Нека F и K се средините на BC и AD, соодветно. Бидејќи $\frac{\overline{GC}}{\overline{GD}} = 2$ и $\frac{\overline{EC}}{\overline{EK}} = 2$, од теоремата на Талес следува дека $EG \parallel AB$.

   Нека $OE \perp CD$. Но, $OD \perp AB$ и како $EG \parallel AB$, добиваме $OD \perp EG$. Значи, O е ортоцентар во $\triangle DGE$ и $OG \perp DE$. Од друга страна $\frac{\overline{KD}}{\overline{DB}} = \frac{1}{2}$, $\frac{\overline{KE}}{\overline{EC}} = \frac{1}{2}$ и од теоремата на Талес заклучуваме дека $DE \parallel BC$. Според тоа, $OG \perp BC$, што значи дека OG минува низ средината F на BC. Значи, тежишната линија AF во $\triangle ABC$ е и висина, па затоа $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Нека $\overline{AB} = \overline{AC}$. Тогаш $OG \perp BC$ и како $DE \parallel BC$, добиваме $OG \perp DE$. Аналогно на претходните разгледувања $OD \perp EG$, па значи O е ортоцентар на $\triangle DGE$, т.е. $OE \perp CD$.

2. Нека a,b,c,d се реални броеви од интервалот $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ такви што

$$\sin a + \sin b + \sin c + \sin d = 1,$$
$$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + \cos 2d \geq \tfrac{10}{3}.$$

Докажи дека $a,b,c,d \in [0,\frac{\pi}{6}]$.

Решение. Ако искористиме дека $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ добиваме

$$\tfrac{10}{3} \leq \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + \cos 2d = 4 - 2(\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c + \sin^2 d),$$

т.е.

$$\tfrac{1}{3} \geq \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c + \sin^2 d .$$

За да докажеме дека $a,b,c,d \in [0,\frac{\pi}{6}]$, доволно е да докажеме дека $\sin a, \sin b, \sin c, \sin d \in [0,\frac{1}{2}]$.

Ако ставиме $x = \sin a, y = \sin b, z = \sin c, t = \sin d$, треба да докажеме дека ако $x+y+z+t = 1$ и $x^2+y^2+z^2+t^2 \leq \frac{1}{3}$, тогаш $x,y,z,t \in [0,\frac{1}{2}]$. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц за броевите x,y,z и $1,1,1$ следува

$$(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2),$$

па ако земеме предвид дека

$$1-t = x+y+z, \quad \text{и} \quad x^2+y^2+z^2 \leq \tfrac{1}{3} - t^2,$$

добиваме дека

$$(1-t)^2 = (x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2) \leq 3(\tfrac{1}{3} - t^2),$$

т.е. $2t^2 - t \leq 0$. Оттука добиваме $t \in [0,\frac{1}{2}]$. Аналогно се докажува дека $x,y,z \in [0,\frac{1}{2}]$.

3. Нека E е бројната оска (т.е. ориентирана права со единечна отсечка на неа) и нека S е множеството точки од E кои имаат координати $19x+85y$, каде x и y се природни броеви. Точките од S се обоени во црвено, а останатите точки од E кои имаат целобројни координати се обоени во зелено. Дали постои

точка A од E (не задолжително со целобројна координата) таква што секои две точки B и C од E со целобројни координати кои се симетрични во однос на A да се различно обоени?

Решение. Ќе докажеме дека точката A со координата $\frac{19\cdot 85+19+85}{2}=\frac{1719}{2}$ го задоволува условот на задачата. За таа цел треба да докажеме дека секои две точки кои се симетрични во однос на A се разнобојни. Нека точките p и q се симетрични во однос на A. Тоа значи, дека $p+q=2A=1719$.

1) Нека точките p и q се црвени. Тогаш постојат природни броеви x_1, y_1, x_2 и y_2 такви што $p=19x_1+85y_1$, $q=19x_2+85y_2$. Оттука
$$19\cdot 85+19+85=19(x_1+x_2)+85(y_1+y_2),$$
односно
$$19\cdot 85=19(x_1+x_2-1)+85(y_1+y_2-1).$$
Броевите 19 и 85 се заемно прости, па од последното равенство следува дека x_1+x_2-1 е делив со 85, а y_1+y_2-1 е делив со 19.
Од $x_1+x_2-1\geq 1$ и $y_1+y_2-1\geq 1$ заклучуваме дека $x_1+x_2-1\geq 85$ и $y_1+y_2-1\geq 19$, што значи дека
$$19\cdot 85=19(x_1+x_2-1)+85(y_1+y_2-1)\geq 2\cdot 19\cdot 85,$$
што е противречност.

2) Нека претпоставиме дека p и q се зелени. Бидејќи 19 и 85 се заемно прости броеви, постојат x_1, y_1, x_2 и y_2 за кои што важи $p=19x_1+85y_1$, $q=19x_2+85y_2$. Притоа можеме да сметаме дека сме избрале решенија за кои x_1 и x_2 се можните најмали природни броеви. Бидејќи p и q се зелени, важи $y_1\leq 0, y_2\leq 0$. Ако $x_1>85$ од
$$19(x_1-85)+85(y_1+19)=19x_1+85y_1=p$$
добиваме противречност со минималноста на x_1. Според тоа, $x_1\leq 85$ и аналогно $x_2\leq 85$. Како во случајот 1) добиваме дека x_1+x_2-1 е делив со 85 и $x_1+x_2\geq 86$. Но, $x_1+x_2<2\cdot 85$, па затоа $x_1+x_2=86$. Тогаш
$$19\cdot 85+19+85=19(x_1+x_2)+85(y_1+y_2)=19\cdot 86+85(y_1+y_2),$$
па затоа $y_1+y_2=1$, што противречни на $y_1\leq 0, y_2\leq 0$.

Конечно, останува единствена можност p и q да се разнобојни точки.

4. На меѓународна средба учествувале 1985 лица. Меѓу секои три лица има двајца кои зборуваат еден ист јазик. Докажи, дека ако секој учесник зборува на не повеќе од 5 јазици, тогаш има барем 200 лица кои знаат еден ист јазик.

Решение. Ќе докажеме дека има учесник кој се разбира со најмалку 992 од преостанатите учесници. Ако има учесник, кој се разбира со сите останати учесници, тогаш тој се разбира со $1984>992$ учесници. Нека претпоставиме дека два учесника A и B не се разбираат. Од условот на задачата следува дека секој од останатите 1983 учесници се разбира или со A или со B. Од принципот на Дирихле следува дека еден од нив (на пример A) се разбира со 992 учесници.

Учесникот A говори најмногу 5 јазици и $992=5\cdot 198+2$, па од принципот на Дирихле заклучуваме дека барем 199 од учесниците со кои A се разбира на еден ист јазик. Овие 199 учесници заедно со A ја формираат бараната група од најмалку 200 лица кои говорат еден ист јазик.