II РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Десет години републички натпревари по математика 1976-1985
подготвена од Илија Јанев и Коста Мишовски

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Некој двоцифрен број е делив со 2. Ако тој број се намали за 27, ќе се добие број напишан со истите цифри, но во обратен ред. Кој е тој број?

2. Во рамнокрак триаголник ABC со основа AB, низ пресечната точка M на бисектрисите на внатрешните агли е повлечена права паралелна со основата, која ги сече крациите AC и BC во точките K и T респективно (по тој редослед).

а) Докажи дека $\overline{KT} = \overline{AK} + \overline{BT}$.

б) Пресметај го периметарот на триаголникот ABM, ако $\measuredangle AMB = 120^{0}$, а растојанието од точката M до правата AB е s.

3. Правилна четиристрана пирамида SABCD, чијшто врв е во точката S, е пресечна со три рамнини, од кои првата минува низ точките S, A, M, втората низ точките S, A, K и третата низ точките S, M, K, каде што точките M и K се средини на рабовите BC и CD, респективно. Пресметај го волуменот на пирамидата SAMK, ако основниот раб на пирамидата SABCD е 6 cm, а нејзината висина 10 cm.

4. Учесник во авторели првиот ден изминал $\frac{3}{8}$ од патот, вториот ден $\frac{9}{20}$ од другиот дел и третиот ден 330 km. Колку бил долг патот на авторелито?

5. Од 6 еднакви по големина топчиња, едно нема иста маса како другите. Како ќе се определи топчето со различна маса со најмал број мерења на вага без тегови?

5. (1977.VIII.1)

I. Ако е x цифрата на десетките, а y цифрата на единиците, тогаш двоцифрениот број е $\overline{xy} = 10x + y$, а бројот напишан со истите цифри, но во обратен ред е $\overline{yx} = 10y + x$.

Од условот на задачата е:

$$\overline{xy} - 27 = \overline{yx}$$

или

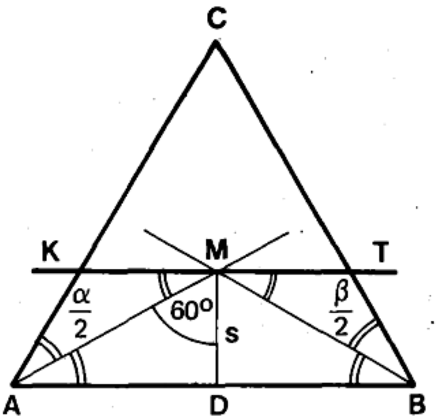
$$10x + y - 27 = 10y + x$$
$$9x - 9y = 27$$
$$x - y = 3$$
$$x = y + 3.$$

Бидејќи е $x, y, \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ и $x \neq 0$ следуваат следниве подови за решенија (x, y) : $(9, 6)$, $(8, 5)$, $(7, 4)$, $(6, 3)$, $(5, 2)$ $(4, 1)$ и $(3, 0)$. Бидејќи се бараат парни двоцифрени броеви, тогаш задачата ја задоволуваат само броевите 96, 74, 52 и 30.

Одговор: 96, 74, 52 и 30.

6. (1977.VIII.2)

I. Нека е даден $\triangle ABC$ и нека AM и BM се бисектрисите на аглите при основата, а KT е правата што минува низ точката M и е паралелна со основата AB (види цртеж 5).



Црт. 5

а) Бидејќи е $\measuredangle KAM = \measuredangle KMA$, како наизменични агли следува дека $\triangle AMK$ е рамнокрак, односно

$$\overline{KM} = \overline{KA} \qquad (1)$$

Аналогно се докажува дека $\triangle BTM$ е рамнокрак, со основа BM,

т.е. $$\overline{BT} = \overline{MT} \qquad (2)$$

Сега ќе имаме:

$$\overline{KT} = \overline{KM} + \overline{MT} = \overline{AK} + \overline{BT}$$

што и требаше да се докаже.

б) Од $\measuredangle AMB = 120^{\circ}$ следува

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} = 30^{\circ}, \text{ т.е. } \quad \alpha = \beta = 60^{\circ},$$

што значи дека $\triangle ABC$ е рамностран.

Од $\triangle ADM$ имаме

$\overline{MD} = s$

$\overline{AM} = \overline{BM} = 2\overline{MD} = 2s$

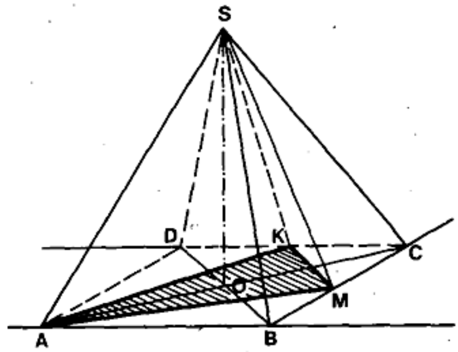
$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{MD}^2} = \sqrt{4s^2 - s^2} = s\sqrt{3} \Rightarrow \overline{AB} = 2s\sqrt{3}$

Периметарот на $\triangle ABM$ е

$$L = \overline{AM} + \overline{BM} + \overline{AB} = 2s + 2s + 2s\sqrt{3} = 2s\,(2 + \sqrt{3}).$$

Одговор: $L = 2s\,(2 + \sqrt{3})$ cm.

7. (1977.VIII.3)



Црт. 6

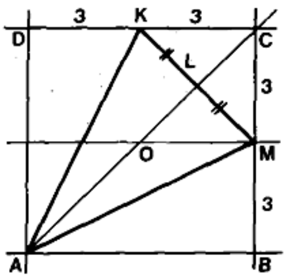
I. Нека е дадена пирамидата SABCD, со основа квадрат и со врв S. По отстранувањето на отсечените делови, се добива пирамидата SAMK, чијашто основа е рамнокракиот $\triangle$ AMK. (црт. 6). За да го пресметаме нејзиниот волумен, треба прво да ја пресметаме *плоштината на основата*, т.е. плоштината на $\triangle$ AMK.

Плоштината на основата е: (види црт. 7.).

$$B = P_{ABCD} - (P_{ABM} + P_{MCK} + P_{ADK})$$

$$= 36 - \left(\frac{6 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 3}{2} + \frac{6 \cdot 3}{2}\right)$$

$$= 36 - 22,5 = 13,5$$



Црт. 7

Волуменот на пирамидата SAMK е:

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 13,5 \cdot 10 = 45.$$

II. Плоштината B на $\triangle$ AMK можеме да ја определиме и поинаку:

$$B = \frac{1}{2} \overline{MK} \cdot \overline{LA}.$$

Од $\triangle$ MCK имаме $\overline{KM} = 3\sqrt{2}$. Понатаму е

$$\overline{AL} = \overline{AC} - \overline{LC} = 6\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

Сега е:

$$B = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2} = \frac{27}{2}.$$

За волуменот и во овој случај добиваме

$$V = 45\,cm^3.$$

Одговор: $V = 45\,cm^3$.

8. (1977.VIII.4)

I. Нека ја означиме со x должината на патот на авторелито. Првиот ден учесникот изминал $\frac{3}{8}$ од патот, т.е. изминал $\frac{3}{8}x$ од патот, а му останало уште: $x - \frac{3}{8}x = \frac{5}{8}x$ од патот.

Вториот ден изминал $\frac{9}{20}$ од преостанатиот пат, т.е. $\frac{9}{20} \cdot (\frac{5}{8}x)$.

Третиот ден изминал 330 km.
Тогаш вкупниот пат би бил:
$$\frac{3}{8}x + \frac{9}{20} \cdot (\frac{5}{8}x) + 330 = x,$$
од каде што имаме

$$60x + 45x + 52800 = 160x$$
$$52800 = 55x$$
или $x = 960.$

Одговор: 960 km.

9. (1977.VIII.5)

I. Шесте топчиња ќе ги поделиме во три групи од по две топчиња. Нека ги обележиме со A и B, C и D, E и F. За првото мерење ги ставаме топчињата A и B на еден тас, а C и D на друг тас. Постојат две можности.

1°. Вагата е во рамнотежа, што значи дека топчињата A, B, C и D се „исправни", па затоа „неисправното" топче е или E или F. За да определиме кое топче е, неисправно ќе извршиме уште едно мерење, со кое, на пример, топчето E го споредуваме со „исправното" топче A. Ако вагата е во рамнотежа, тогаш неисправно е топчето F; ако пак вагата не е во рамнотежа, тогаш очигледно топчето E е „неисправното". Значи, во овој случај со две мерења дознаваме кое топче е „неисправно".

2°. Вагата не е во рамнотежа. Во овој случај неисправното топче е едно од топчињата A, B, C или D, а „исправни" се топчињата E и F.

Со второто мерење ги споредуваме топчињата A и B. Ако „неисправното" топче е меѓу нив тоа ќе биде потешкото од нив. Ако пак A и B се „исправни", вагата е во рамнотежа, што пак значи дека едно од топчињата C и D е полесно од другите топчиња. Тоа го дознаваме со третото мерење, со кое ги споредуваме топчињата C и D.

Значи со намјалку три мерења можеме со сигурност да утврдиме кое топче има различна маса од другите топчиња.

Одговор: три мерења.