Драгољуба Милошевић

Горњег Милановца

ВИШЕ ДОКАЗА ЗА ТЕОРЕМУ

Доказивање неке теореме на више начина веома лепо илуструје богатство идеја, досетки, инветивности и доста доприноси развоју квалитетног размишљања и математичке интуиције.

Овом приликом ћемо дати седам доказа једне теореме.

Теорема. У једнакокраком троуглу ABC, чији је угао при врху C једнак $20°$, важи

$$(*)\qquad a^3+b^3=3ab^2,$$

где је a дужина основице и b дужина крака тог троугла.

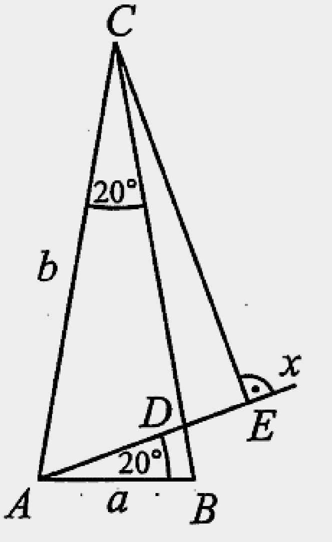
Доказ 1. Конструишимо полуправу Ax тако да је $\sphericalangle xAa=20°$ и на њој одаберимо тачке D и E тако да $D\in BC$ и $CE\perp AE$ (види слику 1). Троуглови ABC и BAD су слични, па је $\overline{BD}:a=a:b$, тј. $\overline{BD}=\dfrac{a^2}{b}$, што значи да је

$$(1)\qquad \overline{CD}=b-\frac{a^2}{b}.$$

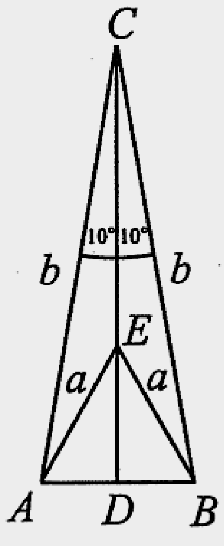
Будући да је $\sphericalangle CAE=60°$, у правоуглом троуглу ACE је $\overline{AE}=\dfrac{1}{2}b$ и $\overline{CE}=\dfrac{1}{2}b\sqrt{3}$ (према Питагориној теореми). Из правоуглог троугла CDE, због $\overline{CE}=\dfrac{1}{2}b\sqrt{3}$ и $\overline{DE}=\dfrac{1}{2}b-a$, добијамо

$$(2)\qquad \overline{CD}^2=\left(\frac{b}{2}-a\right)^2+\frac{3}{4}b^2.$$

На основу једнакости (1) и (2) добијамо тражену релацију $(*)$.



Слика 1.



Слика 2.

Доказ 2. На висини CD троугла ABC одредимо E тако да $\overline{AE} = a$. Троугао ABC је очигледно састављен од једног једнакостраничног троугла ABE и два подударна троугла ACE и BCE, па је $P_{ABC} = P_{ABE} + 2P_{ACE}$, тј. $\frac{1}{2}b^2\sin 20^\circ = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} + ab\sin 20^\circ$, односно

$$\sin 20^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{2b(b-2a)}. \tag{3}$$

На основу косинусне теореме примењене на троугао ABC имамо $a^2 = b^2+b^2-2\cdot b\cdot b\cdot \cos 20^\circ$, односно

$$\cos 20^\circ = 1 - \frac{a^2}{2b^2},$$

одакле, након сабирања, квадрирања и примене основне тригонометријске идентичности, добијамо

$$\sin 20^\circ = \frac{a^2}{4b^4}\left(4b^2 - a^2\right). \tag{4}$$

Из једнакости (3) и (4) следи $3a^2b^2 = (4b^2-a^2)(b-2a)^2$, тј. $a^4-b^4-a^3b+4ab^3-3a^2b^2 = 0$, а отуда, због $a \neq b$ и $a^3+b^3 = 3ab^2$.

Доказ 3. На основу косинусне теореме примењене на троугао AVD (слика 1) је

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdot\cos 60^\circ,$$

што је због (1), еквивалентно са

$$\left(b - \frac{a^2}{b}\right)^2 = b^2 + a^2 - ab,$$

а одавде добијамо и једнакост $a^3 + b^3 = 3ab^2$, тј. (∗).

Доказ 4. Нека је троугао ABE једнакостраничан, $\overline{AF} = \overline{AC}$, $\overline{CD} = h$ и $\overline{CH} = h_1$, при чему су h и h_1 висине троуглова ABC и ACF редом (видети слику 3). Ако површину троугла ABC изразимо на два начина, добијамо да је $P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}bh_1$, одакле је $h_1 = \frac{ah}{b}$. Правоугли троугао HCE има угао од 30° ($\sphericalangle CEH$), па је $\overline{CE} = 2\cdot\overline{CH} = 2h_1 = \frac{2ah}{b}$ и тада $\frac{1}{2}a\sqrt{3} = \overline{DE} = \overline{CD} - \overline{CE} = h - \frac{2ah}{b}$, тј.

$$\frac{1}{2}a\sqrt{3} = h\left(1 - \frac{2a}{b}\right). \tag{5}$$

Применом Питагорине теореме на правоугли троугао ACD имамо $h^2 = b^2 - \frac{1}{4}a^2$, па квадрирањем једнакости (5) добијамо

$$\frac{3}{4}a^2 = \left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right)\left(1 - \frac{2a}{b}\right)^2. \tag{6}$$

Ако у (6) ставимо $a = k \cdot b$, имамо $k^4 - k^3 - 3k^2 + 4k - 1 = (k-1)(k^3 - k + 1) = 0$, а ова једнакост је, због $k \neq 1$, еквивалентна са $k^3 - k + 1 = 0$. Последња једнакост је еквивалентна даље са $a^3 + b^3 = 3ab^2$, јер је $k = \frac{a}{b}$.

Доказ 5. На основу косинусне теореме примењене на троугао ACE (видети слику 3), имамо

$$b^2 = a^2 + x^2 + ax\sqrt{3}, \tag{7}$$

јер је $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Продужимо страницу AE за $\overline{AG} = b$ (тачка A је између тачака G и E). Троуглови ACE и CGE су слични (види слику 4), па је $(a+b) : x = x : a$, тј.

$$x^2 = a(a+b). \tag{8}$$

Сменом (8) у (7) добијамо

$$x = \frac{1}{a\sqrt{3}}(a+b)(b-2a), \tag{9}$$

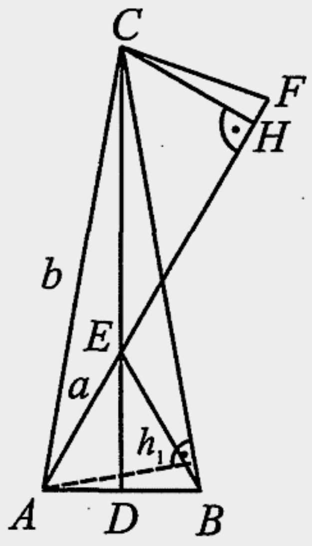
а одавде, након квадрирања и

$$x^2 = \frac{1}{3a^2}(a+b)^2(b-2a)^2. \tag{10}$$

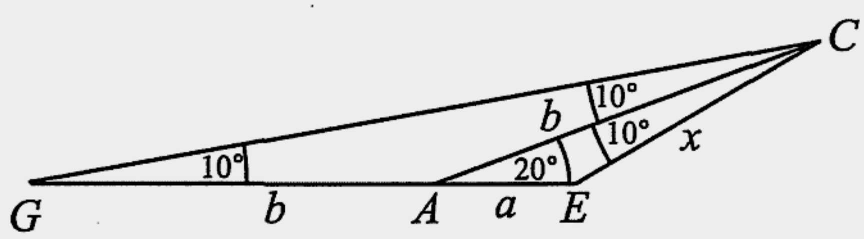
Из једнакости (8) и (10) следи

$$a = \frac{1}{3a^2}(a+b)(b-2a)^2,$$

што је еквивалентно траженој једнакости $(*)$.



Слика 3.



Слика 4.

Доказ 6. Како је $a = 2b\sin 10°$ и $a^2 = 2b^2(1-\cos 20°)$, то множењем ових двеју једнакости добијамо

$$a^3 = 4b^3(\sin 10° - \sin 10° \cdot \cos 20°).$$

Због $\sin 10° \cos 20° = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin 10°$, претходна једнакост постаје $a^3 = 2b^3\left(3\sin 10° - \frac{1}{2}\right)$, а одавде имамо $a^3 + b^3 = 6b^3 \sin 10° = 3 \cdot (2 \cdot b \cdot \sin 10°) \cdot b^2$, тј. $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Доказ 7. С обзиром да важи $a = 2b\sin 10°$, то је тражена једнакост $(*)$ еквивалентна са $1 + 8\sin^3 10° = 6\sin 10°$, односно са

$$\sin 30° = 3\sin 10° - 4\sin^3 10°.$$

Последња једнакост је тачна, јер је посебан случај опште и познате тригонометријске формуле $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t, t \in \mathbb{R}$.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2007/08 година