Здравко Цветковски, Скопје
Ристо Малчески, Скопје

ЕДНА КЛАСА ЛИНЕАРНИ ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ И НИВНА ПРИМЕНА

Во оваа статија ќе ја разгледаме линеарната Диофантова равенка

$$x_1 + x_2 + ... + x_k = n, \tag{1}$$

при што прашањето на кое ќе побараме одговор е:

Колку е бројот на решенија на равенката (1) во множеството природни броеви, односно множеството ненегативни цели броеви, како и бројот на решенија при некои дополнителни ограничувања.

Одговорот на ова прашање ќе биде од корист и ќе има практична примена при решавање на одредени комбинаторни проблеми. Најпрво ќе ја разгледаме дадената равенка во множеството природни броеви.

Теорема 1. Бројот на решенија на равенката (1) во множеството природни броеви $\mathbb{N}$ е еднаков на C_{n-1}^{k-1}.

Доказ. Да разгледаме n единици наредени во ред, при што распоредуваме $k-1$ знаци + меѓу $k-1$ парови единици. Ова разместување на знаците + може да се направи на C_{n-1}^{k-1} начини при што секоја ваква можност ги распоредува единиците во k непразни подмножества.

Нека бројот на единиците во секое од овие подмножества е m_1, m_2,..., m_k (јасно $m_i > 0$). Тогаш $x_i = m_i$, $i = 1,2,...,k$ е решение на почетната равенка и сите решенија може да се добијат на овој начин. ■

Теорема 2. Бројот на решенија на равенката (1) во множеството ненегативни цели броеви $\mathbb{N}_0$ е еднаков на C_{n+k-1}^{k-1}, односно C_{n+k-1}^{n}.

Доказ. Ставаме смени $x_i = y_i - 1$, $i = 1,2,...,k$. Тогаш равенката (1) е еквивалентна со равенката

$$y_1 + y_2 + ... + y_k = n + k \tag{2}$$

каде $y_i = x_i + 1 \geq 1$, секој $i = 1,2,...,k$, т.е. $y_i \in \mathbb{N}$ за секој $i = 1,2,...,k$. Бидејќи на секое решение $(x_1, x_2,..., x_k)$ на равенката (1) му соодветствува единствено решение $(y_1, y_2,..., y_k)$ на равенката (2) и обратно, добиваме дека бројот на решенија на равенката (1) во множеството ненегативни цели броеви е еднаков на бројот на решенија на равенката (2) во множеството природни броеви, кој според теоремата 1 е еднаков на

$$C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^{n}. \blacksquare$$

Пример 1. Да се определи бројот на решенијата на равенката

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7,$$

а) во множеството природни броеви,

б) во множеството ненегативни цели броеви.

Решение: а) Според теоремата 1 бројот на решенијата на дадената равенка е $C_6^2 = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$ и тоа се тројките:

$$(1,1,5),\ (1,5,1),\ (5,1,1),\ (1,2,4),\ (1,4,2),\ (2,1,4),\ (2,4,1),\ (4,1,2),$$
$$(4,2,1),\ (1,3,3),\ (3,1,3),\ (3,3,1),\ (2,2,3),\ (2,3,2),\ (3,2,2).$$

б) Со смените $x_1 = y_1 - 1$, $x_2 = y_2 - 1$, $x_3 = y_3 - 1$ дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$y_1 + y_2 + y_3 = 10,$$

каде $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N}$. Сега од теоремата 1 следува дека бројот на решенијата на последната равенка е $C_{10-1}^{3-1} = C_9^2 = 36$ и е еднаков на бројот на решенија на равенката $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ во множеството ненегативни цели броеви.

Јасно, решението на задачата под б) може да се добие со примена на теоремата 2. ■

Теорема 3. Бројот на целобројни решенија на равенката (1), при што се исполнети условите $x_1 > a_1, x_2 > a_2, ..., x_k > a_k$ е еднаков на $C_{n-(a_1+a_2+...+a_k)}^{k-1}$

.

Доказ. Воведуваме $x_i = y_i + a_i$, $i = 1,2,...,k$. Тогаш дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$y_1 + y_2 + ... + y_k = n - (a_1 + a_2 + ... + a_k) \qquad (3)$$

каде $y_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,2,...,k$. Бројот на решенијата на равенката (1) за кои се исполнети дадените услови е еднаков на бројот на решенија на равенката (3), кој според теоремата 1 е еднаков на $C_{n-(a_1+a_2+...+a_k)}^{k-1}$. ■

Пример 2. Да се определи бројот на целобројните решенија на равенката

$$x+y+z=20, \tag{4}$$

за кои важи $x>1$, $y>2$ и $z>3$.

Решение. Воведуваме смени $x=a+1, y=b+2, z=c+3$ и дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$a+b+c=14, \tag{5}$$

каде $a,b,c\in\mathbb{N}$. Бројот на решенија на равенката (4) е еднаков на бројот на решенијата на равенката (5) кој според теоремата 1 е еднаков на $C_{14-1}^{3-1}=C_{13}^{2}=78$.

Јасно, решението на задачата може да се добие од теоремата 3. ако се земе $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$. ■

Теорема 4. Бројот на решенијата на равенката (1) во множеството природни броеви за кои што се исполнети условите $x_i\le b_i$, за секој $i=1,2,,,,k$ е

$$S=n(U)-\sum_{i_1}n(A_{i_1})+\sum_{i_1\neq i_2}n(A_{i_1}A_{i_2})-...+(-1)^k n(A_1A_2...A_k).$$

каде A_i е множеството решенија на дадената равенка при услов $x_i>b_i$, $i=1,2,,,,k$, односно $n(A_i)$ е соодветниот број на решенија и $n(U)$ е бројот на решенија на равенката (1) во множеството природни броеви, т.е. $n(U)=C_{n-1}^{k-1}$.

Доказ. Непосредно следува од теоремата 1 и принципот на вклучување и исклучување. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

Од посебен интерес е кога границите b_i, $i=1,2,...,k$ во теоремата 4 се еднакви меѓу, т.е. ако $b_1=b_2=...=b_k=b$. Тогаш важат следниве идентитети

$$n(A_1)=n(A_2)=...=n(A_k)=C_{n-b-1}^{k-1},$$
$$n(A_1A_2)=n(A_1A_3)=...=n(A_{k-1}A_k)=C_{n-2b-1}^{k-1},$$
$$...$$
$$n(A_1A_2...A_k)=C_{n-kb-1}^{k-1}$$

Според тоа, точна е следнава теорема.

Теорема 5. Бројот на решенијата на равенката (1) во множеството природни броеви за кои важи $x_i\le b$, за секој $i=1,2,,,,k$ е еднаков на

$$C_{n-1}^{k-1}-C_k^1C_{n-b-1}^{k-1}+C_k^2C_{n-2b-1}^{k-1}-...+(-1)^kC_k^kC_{n-kb-1}^{k-1}.\ \blacksquare$$

Теорема 6. Во множеството природни броеви бројот на решенијата на равенката (1) за кои важи $a_i \le x_i \le b_i$, $i=1,2,,,,k$ каде a_i и b_i се цели броеви е еднаков на бројот на решенијата на равенката

$$y_1+y_2+...+y_k=n-(a_1+a_2+...+a_k)$$

во множеството природни броеви, при услови $y_i \le c_i, i=1,2,...,k$ каде $c_i=b_i-a_i$ за секој $i=1,2,...,k$. ■

Во продолжение на нашите разгледувања ќе презентираме повеќе задачи во кои ќе ги примениме претходно изнесените тврдења.

Задача 1. Да се определи бројот на решенијата на равенката

$$a+b+c+d+e=30,$$

а) во множеството природни броеви,

б) во множеството ненегативни цели броеви.

Решение: а) Според теоремата 1 бараниот број е C_{29}^4.

б) Според теоремата 2 бараниот број е $C_{30+5-1}^3=C_{34}^3$.♦

Задача 2. Да се докаже дека равенките

$$x_1+x_2+...+x_7=13 \text{ и } x_1+x_2+...+x_{14}=6$$

имаат еднаков број на решенија во множеството ненегативни цели броеви.

Решение. Бројот на решенија на равенката $x_1+x_2+...+x_7=13$ во множеството $\mathbb{N}_0$ е еднаков на $C_{13+7-1}^{7-1}=C_{19}^6$, а бројот на решенијата на равенката $x_1+x_2+...+x_{14}=6$ во множеството $\mathbb{N}_0$ е еднаков на $C_{6+14-1}^{14-1}=C_{19}^{13}$. Сега тврдењето на задачата следува од равенството $C_{19}^{13}=C_{19}^{19-13}=C_{19}^6$. ■

Задача 3. На колку начини 20 топчиња може да се распоредат во 7 кутии.

Решение. Ако x_i е бројот на топчиња во i-та кутија, тогаш бројот на распореди на топчињата е еднаков на бројот на решенија на равенката

$$x_1+x_2+...+x_7=20,$$

каде $x_i \in \mathbb{N}_0$ за $i=1,2,...,7$. Според теоремата 2. бројот на решенијата на последната равенка е $C_{20+7-1}^{7-1}=260260$.

Конечно, бараниот број на распореди е 260260. ■

Задача 4. Да се определи бројот на петцифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 8.

Решение. Треба да се определат сите броеви $\overline{x_1 x_2 ... x_5}$, за кои важи

$$x_1 + x_2 + ... + x_5 = 8,$$

при што $x_1 > 0$. Воведуваме замени $x_1 = y_1 + 1$ $y_i = x_i$, $i = 2,3,4,5$. Јасно $y_i \in \mathbb{N}_0$ за $i = 1,2,...,5$ и ја добиваме равенката $y_1 + y_2 + ... + y_5 = 7$ при што бројот на решенија на равенката $x_1 + x_2 + ... + x_5 = 8$ при услов $x_1 > 0$ е еднаков на бројот на решенија на равенката $y_1 + y_2 + ... + y_5 = 7$ во множеството $\mathbb{N}_0$ и тој според теоремата 2 е еднаков на $C_{7+5-1}^{5-1} = C_{11}^{4} = 330$.

Според ова постојат 330 петцифрени броеви чиј збир на цифри е 8. ■

Задача 5. Колку природни броеви има меѓу 100 и 1000000 кои имаат збир на цифри еднаков на 5.

Решение. Јасно бројот може да биде трицифрен, четирицифрен, петцифрен и шестцифрен.

Ако бараниот број е трицифрен, т.е. $\overline{x_1 x_2 x_3}$, треба да го определиме бројот на решенија на равенката $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ во множеството ненегативни цели броеви при што $x_1 > 0$. Ставаме $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2 - 1$, $x_3 = y_3 - 1$ тогаш дадената равенка е еквивалентна со равенката $y_1 + y_2 + y_3 = 7$, каде $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N}$. Бројот на решенија на последнава равенка, според теоремата 1 е $C_6^2 = 15$. Аналогно се добива дека бројот на четирицифрени броеви со збир на цифри еднаков на 5 е $C_7^3 = 35$, петцифрени има $C_8^4 = 70$ и шестцифрени има $C_9^5 = 126$.

Според тоа, бараниот број е $15 + 35 + 70 + 126 = 246$. ■

Задача 6. На колку начини 20 топчиња може да се распоредат во 7 кутии, така што во секоја од кутиите да има барем по едно топче.

Решение. Бројот на распореди е еднаков на бројот на решенија на равенката $x_1 + x_2 + ... + x_7 = 20$ каде $x_i \in \mathbb{N}$ за $i = 1,2,...,7$, и x_i го означува бројот на топчиња во i-та кутија за $i = 1,2,...,7$. Според теоремата 1 овој број е еднаков на $C_{20-1}^{7-1} = C_{19}^{6} = 27132$. ■

Задача 7. На колку начини 20 топчиња може да се распоредат во 7 кутии, така што во секоја од кутиите да има барем по две топчиња.

Решение. Бараниот број е еднаков на бројот на решенија на равенката $x_1+x_2+...+x_7=20$ каде $x_i>1$ за секој $i=1,2,...,7$, и x_i го означува бројот на топчиња во i-та кутија за $i=1,2,...,7$. Според теоремата 3 овој број е еднаков на $C_{12}^{6}=6237$. ■

Задача 8. Да се определи бројот на целобројни решенија на равенката $a+b+c+d=30$, такви што $a,b,c,d>5$.

Решение. Ставаме смени $a=x+5$, $b=y+5$, $c=z+5$ и $d=t+5$. Јасно, $x,y,z,t\in\mathbb{N}$ и дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$x+y+z+t=10.$$

Значи, бројот на решенија на равенката $a+b+c+d=30$ при услови $a,b,c,d>5$ е еднаков на бројот на решенија на равенката $x+y+z+t=10$ во множеството природни броеви, кој според теоремата 1 е еднаков на $C_9^3=84$. ■

Задача 9. Ѓорѓи, Филип и Ана треба да поделат 30 бонбони. На колку начини може да се направи поделба на бонбоните ако:

а) Ѓорѓи треба да добие најмалку 4 , а Ана најмалку 10 бонбони.

б) Секој од нив треба да добие по најмалку 5 бонбони.

Решение. Нека означиме: a-бројот на бонбони што ги добил Ѓорѓи, b-бројот на бонбони што ги добил Филип, c-бројот на бонбони што ги добила Ана.

а) Воведуваме смени $a=x+4$, $b=y$, $c=z+10$. Тогаш $x,y,z\in\mathbb{N}_0$. Сега дадената равенка е еквивалентна со равенката $x+y+z=16$ од каде според теоремата 2 следува дека бараниот број на поделби е $C_{18}^{2}=171$.

б) Ставаме $a=x+5$, $b=y+5$ и $c=z+5$. Тогаш треба да го определиме бројот на решенија на равенката $x+y+z=15$, каде $x,y,z\in\mathbb{N}_0$. Од теоремата 2 добиваме дека бараниот број е $C_{17}^{2}=136$. ■

Задача 10. Во множеството природни броеви да се определи бројот на решенија на равенката

$$x+y+z=7,$$

каде $x \leq 3$, $y \leq 4$, $z \leq 5$.

Решение. Нека A_1, A_2 и A_3 се множествата решенија на дадената равенка при услови $x > 3$, $y > 4$ и $z > 5$, соодветно. Тогаш според теоремата 4 бројот на решенијата на дадената равенка е

$$n(U) - \left(n(A_1) + n(A_2) + n(A_3)\right) + \left(n(A_1A_2) + n(A_1A_3) + n(A_2A_3)\right) - n(A_1A_2A_3) .$$

Според теоремата 1 вкупниот број на решенија е $n(U) = C_6^2 = 15$. Според теоремата 3 имаме:

$$n(A_1) = C_3^2 = 3,\ n(A_2) = C_2^2 = 1,\ n(A_3) = 0,$$
$$n(A_1A_2) = n(A_1A_3) = n(A_2A_3) = 0 \text{ и } n(A_1A_2A_3) = 0 .$$

Сега лесно добиваме дека бараниот број решенија е $15 - (3+1) = 11$. ■

Задача 11. Во еден сад има 9 бели, 4 црвени и 7 црни топчиња. На колку различни начини може да се изберат 5 од нив.

Решение. При било кој избор со x да го означиме бројот на избрани бели топчиња, со y бројот на црвени топчиња и со z бројот на избрани црни топчиња. Тогаш треба да го определиме бројот на решенија на равенката $x + y + z = 5$ при услови $x \leq 9$, $y \leq 4$, $z \leq 7$.

Според теоремата 2 во множеството $\mathbb{N}_0$ вкупниот број на решенија на дадената равенка е $C_7^2 = 21$. Нека A_1 е множеството решенија при $x > 9$, A_2 множеството решенија при $y > 4$ и A_3 е множеството решенија при $z > 7$. Тогаш имаме

$$n(A_1) = n(A_3) = 0,\ n(A_2) = C_2^2 = 1,$$
$$n(A_1A_2) = n(A_1A_3) = n(A_2A_3) = 0 \text{ и}$$
$$n(A_1A_2A_3) = 0 .$$

Јасно, бараниот број на решенија е $21 - 1 = 20$.♦

Задача 12. Во множеството природни броеви да се определи бројот на решенија на равенката $x + y + z = 15$, каде $x \leq 5$, $y \leq 6$, $z \leq 8$.

Решение. Нека A_1, A_2 и A_3 се множествата решенија на дадената равенка при услови $x > 5$, $y > 6$ и $z > 8$, соодветно. Тогаш според теоремата 4 имаме дека бараниот број на решенија е

$$n(U) - \left(n(A_1) + n(A_2) + n(A_3)\right) + \left(n(A_1A_2) + n(A_1A_3) + n(A_2A_3)\right) - n(A_1A_2A_3) .$$

Понатаму, според теоремата 1 имаме $n(U)=C_{14}^{2}=91$, а додека од теоремата 3 следува дека

$$n(A_1)=C_9^2=36\,,\; n(A_2)=C_8^2=28\,,\; n(A_3)=C_6^2=15\,,$$
$$n(A_1A_2)=C_3^2=3\,,\; n(A_1A_3)=n(A_2A_3)=0 \text{ и}$$
$$n(A_1A_2A_3)=0\,.$$

Конечно, бараниот број решенија е $91-(36+28+15)+3=15$. ■

Задача 13. Да се определи бројот на решенија на равенката

$$x+y+z=24,$$

за кои важи $1\le x,y,z\le 9$.

Решение. Вкупниот број на решенија на дадената равенка во множеството природни броеви е $n(U)=C_{23}^{2}=253$.

Нека A_1 е множеството решенија на дадената равенка при $x>9$, A_2 е множеството решенија на дадената равенка при $y>9$ и A_3 е множеството решенија на дадената равенка при $z>9$. Тогаш имаме

$$n(A_1)=n(A_2)=n(A_3)=C_{14}^2=91,$$
$$n(A_1A_2)=n(A_1A_3)=n(A_2A_3)=C_5^2=10 \text{ и}$$
$$n(A_1A_2A_3)=0\,.$$

Според теоремата 4 бараниот број е

$$n(U)-\big(n(A_1)+n(A_2)+n(A_3)\big)+\big(n(A_1A_2)+n(A_1A_3)+n(A_2A_3)\big)-n(A_1A_2A_3)$$

т.е. $253-3\cdot 91+3\cdot 10-0=10$. ■

Задача 14. Да се определи бројот на решенија на равенката

$$x+y+z=24,$$

за кои важи $1\le x\le 5$, $12\le y\le 18$, $-1\le z\le 12$.

Решение. Според теоремата 6 бројот на решенија на дадената равенка при дадените услови е еднаков на бројот на решенија на равенката $X+Y+Z=12$ во множеството природни броеви при услови $X\le 4$, $Y\le 6$, $Z\le 13$. Нека A_1, A_2 и A_3 се множествата решенија на дадената равенка при услови $X>4$, $Y>6$ и $Z>13$, соодветно. Тогаш вкупниот број на решенија на равенката $X+Y+Z=12$ во множеството природни броеви е $n(U)=C_{12}^2=66$. Според теоремата 3 имаме дека

$$n(A_1)=C_7^2=21,\; n(A_2)=C_5^2=10\,,\; n(A_3)=0\,.$$

$n(A_1A_2) = n(A_1A_3) = n(A_2A_3) = 0$ и

$n(A_1A_2A_3) = 0$.

Конечно, бараниот број е $66-(21+10)=35$. ■

На крајот од нашите разгледувања на читателот му предлагаме самостојно да ги реши следниве задачи.

Задача 15. Да се определи бројот на сите броеви поголеми од 732, кои имаат најмногу 5 цифри и чиј збир на цифри е 7.

Задача 16. Природниот број го нарекуваме *среќен* ако збирот на неговите цифри е 7. Нека $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е низата од *среќни* броеви подредени во растечки редослед. Ако $a_n = 2005$, да се пресмета a_{5n}.