Alija Muminagić, Frederiksberg,
Алекса Малчески, Скопје

КВАДРАТУРА НА КРУГ

Поголемиот дел од луѓето и ден денес при споменување на поимот квадратура на круг помислуваат на тежок или нерешлив проблем. Но, истоте овие луѓе не може да го формулираат овој проблем и не знаат од кое време и од кое место потекнува проблемот.

За овај, еден од најпознатите проблеми на античката геометрија (антички период е период од 700 год. п.н.е. до 476 година п.н.е.), ќе пишуваме во оваа статија.

Идејата е, како површината на кругот да го замениме со површина на квадрат, притоа користејќи само линијар и шестар. Многу истакнати математичари се занимавале со овој проблем и нивните обиди истиот да го решат траеле се до 1882 година кога германскиот математичар Carl Louis Ferdinand Lindemann (1852-1939) докажал дека бројот π е трансцентен број и со тоа докажал дека квадратурата на кругот е нерешлива само со линијар и шестар.

Сега ќе го формулираме шпроблемот: Само со линијар и шестар да се конструира квадрат чија плоштина е еднаква на плоштината на даден круг.

Значи имаме зададен круг со радиус r. Плоштината на овој круг $r^2\pi$. Да го запишеме бројот $r^2\pi$ во облик

$$r^2\pi = (\sqrt{2r\pi \cdot \tfrac{r}{2}})^2,$$

од каде што следува дека квадратот со страна

$$a = \sqrt{2r\pi \cdot \tfrac{r}{2}} \qquad (*)$$

има плоштина како и даденииот круг со радиус r.

Од (*) гледаме дека страната a на бараниот квадрат можеме да ја конструираме како геометриска средина на две отсечки со должини $2\pi r$ и $\frac{r}{2}$.

Значи, ако е можно да се конструира должина $2\pi r$ кога е дадено r, ние би можеле да конструираме и квадрат со страна a.

Обратно, ако е можно да се конструира квадрат со еднаква површина на даден круг со радиус r, ние можеме да конструираме и отсечка со должина $2\pi r$. Навистина, ако е a должината на страната на квадратот, тогаш

$$r^2\pi = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2\pi \cdot \tfrac{2}{r} = a^2 \cdot \tfrac{2}{r} \quad \Leftrightarrow$$

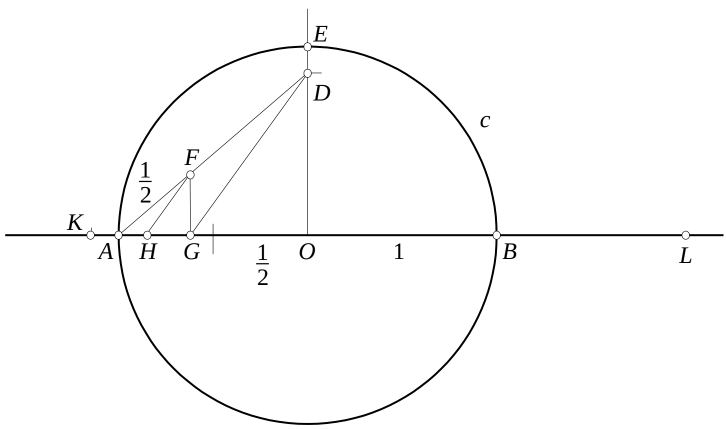
$$2\pi r = \tfrac{2a^2}{r}. \tag{**}$$

Од (**) гледаме дека должината $2\pi r$ е четврта пропорционала на отсечките со должини $2a, a$ и r.

Од претходно изнесеното следува дека проблемот на квадратура на круг се сведува на конструкција на отсечка со должина $2\pi r$, т.е. за $r=1$ на отсечка со должина 2π. Докажано е дека оваа конструкција не е изводлива, т.е. не е можна. Меѓутоа, најдени се многу интересни конструкции на отсечки чии должини се приближно еднакви на 2π. Една од нив ќе дадеме во продолжението на оваа статија, а истата ја дал холандскиот математичар Jakob de Gelder во 1849 година. Познато е дека

$$\pi \approx \tfrac{355}{113} = 3{,}1415929...$$

е најдоброто приближување на бројот π со дропка чиј именител и броител не се поголеми од 30000.



Конструкција на отсечка со должина $\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113} = 3 + \frac{4^2}{7^2+8^2}$

Цртаме кружница $C(0, r=1)$. Во точката O конструираме нормала и пресекот на таа нормала и полукружницата ќе го означиме со E (цртеж горе). На отсечката OE ќе определиме точка D така што $\overline{OD} = \frac{7}{8}$. Ги поврзуваме точките A и D и на AD ќе определиме точка F така што $\overline{AF} = \frac{1}{2}$. Сега ќе конструираме $FG \parallel OE$ и $FH \parallel DG$. Сега, применувајќи ја Питагоровата теорема за триаголникот $\triangle ADO$ добиваме:

$$\overline{AD}^2=\overline{AO}^2+\overline{OD}^2=1^2+(\tfrac{7}{8})^2=1+\tfrac{49}{64}=\tfrac{113}{64}\,.$$

Од сличноста на триаголниците $\triangle AFG$ и $\triangle ADO$ имаме :

$$\overline{AF}:\overline{AD}=\overline{AG}:\overline{AO}\;\Leftrightarrow\;\overline{AG}=\frac{\overline{AF}\cdot\overline{AO}}{\overline{AD}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{\sqrt{\frac{113}{64}}}=\frac{4}{\sqrt{113}}\,,$$

а од $\triangle AHF\sim\triangle AGD$ добиваме дека

$$\overline{AH}:\overline{AF}=\overline{AG}:\overline{AD}\;\Leftrightarrow\;\overline{AH}=\frac{\overline{AF}\cdot\overline{AG}}{\overline{AD}}\,.$$

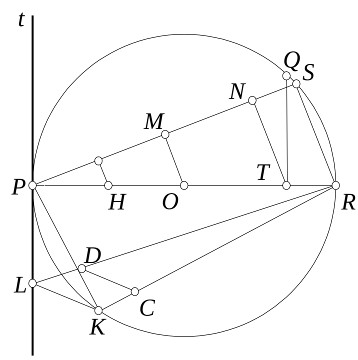
Заменувајќи во последното равенство $\overline{AG}=\frac{4}{\sqrt{113}}$, $\overline{AF}=\frac{1}{2}$ и $\overline{AD}=\frac{\sqrt{113}}{8}$, добиваме

$$\overline{AH}=\frac{\frac{4}{\sqrt{113}}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{113}}{8}}=\frac{16}{113}\,.$$

Ќе го продолжиме сега дијаметарот AB преку точките A и B и ќе ги опрделиме точките K и L за кои $\overline{KA}=\overline{AH}$ и $\overline{BL}=\overline{OB}$. На тој начин добиваме:

$$\overline{KL}=\overline{KA}+\overline{AO}+\overline{OB}+\overline{BL}=\overline{AH}+\overline{AO}+\overline{OB}+\overline{OB}=\frac{16}{113}+1+1+1=3+\frac{16}{113}\approx\pi\,.$$

Сега ќе разгледаме како проблемот на квадратура на кругот го решавал познатиот индиски математичар Srinivasa Ramanujan (1887-1920).



Нека k е дадена кружница со центар во точката O и со дијаметар $\overline{PR}=d$. Нека точката H средина на радиусот OP и точката T која припаѓа на OR е таква што $\overline{TR}=\frac{1}{6}d$ (точката T е поблиска на точката R). Конструираме нормала во точката T и пресечната точка на таа нормала со дадената кружница ќе ја означиме со Q (види цртеж десно). Цртаме тетива RS таква што $\overline{RS}=\overline{TQ}$ и ги поврзуваме S и P. Подножјата на нормалите конструирани од точките O и T на PS ќе ги означиме со M и N. На кружницата конструираме точка K таква што $\overline{PK}=\overline{PM}$ и тангента t во точката P. На тангентата t определуваме точка L таква што $\overline{PL}=\overline{MN}$ и ги повлекуваме отсечките RL, RK и LK. На отсечката RK земаме точка C таква што $\overline{RC}=\overline{RH}$ и низ точката C конструираме паралела со LK.

Пресечната точка на таа паралела и правата RL ќе ја означиме со D. Ќе покажеме дека $\overline{RD} = r\sqrt{\pi}$ е страна на бараниот квадрат.

Доказ. Според конструкцијата TQ е геометриска средина на отсечките PT и TR. Според тоа,

$$\overline{TQ} = \sqrt{\overline{PT} \cdot \overline{TR}} = \sqrt{\frac{5}{6}d \cdot \frac{1}{6}d} = \frac{\sqrt{5}}{6}d = \overline{RS} \ .$$

Од $\measuredangle PSR = 90^\circ$, како агол над дијаметар на кружница, според Питагоровата теорема за $\triangle PRS$ имаме: $\overline{PS}^2 = \overline{PR}^2 - \overline{RS}^2 = d^2 - \frac{5d^2}{36} = \frac{31}{36}d^2$.
Понатаму имаме $\triangle POM \sim \triangle PTN \sim \triangle PRS$, а од тие сличности добиваме:

$$\overline{PM} : \overline{PO} = \overline{PS} : \overline{PR} \iff \overline{PM} = \frac{\overline{PS} \cdot \overline{PO}}{\overline{PR}} = \frac{\frac{\sqrt{31}}{6}d \cdot \frac{1}{2}d}{d} = \frac{\sqrt{31}}{12}d$$

$$\overline{PN} : \overline{PT} = \overline{PS} : \overline{PR} \iff \overline{PN} = \frac{\overline{PS} \cdot \overline{PT}}{\overline{PR}} = \frac{\frac{\sqrt{31}}{6}d \cdot \frac{5}{6}d}{d} = \frac{5\sqrt{31}}{36}d \ .$$

Сега имаме

$$\overline{MN} = \overline{PL} = \overline{PN} - \overline{PM} = \frac{5\sqrt{31}}{36}d - \frac{\sqrt{31}}{12}d = \frac{\sqrt{31}}{18}d \ .$$

Со примена на Питагоровата теорема за $\triangle PKR$ и $vPLR$ добиваме:

$$\overline{RK}^2 = \overline{PR}^2 - \overline{PK}^2 = d^2 - \frac{31}{144}d^2 = \frac{113}{144}d^2$$

$$\overline{RL}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{PL}^2 = d^2 + \frac{31}{324}d^2 = \frac{355}{324}d^2 \ .$$

Сега, од $\overline{RK} : \overline{RL} = \overline{RC} : \overline{RD}$ следува дека

$$\overline{RD} = \frac{\overline{RL} \cdot \overline{RC}}{\overline{RK}} = \frac{\frac{\sqrt{355}}{18}d \cdot \frac{3}{4}d}{\frac{\sqrt{113}}{12}d} = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{355}{113}} = \frac{d}{2}\sqrt{\pi} = r\sqrt{\pi}$$

(бидејќи $\overline{RC} = \overline{RH} = \frac{3}{4}d$ и $\frac{335}{113} \approx \pi$) и доказот е готов.

Литература

[1] Jans Carstensen, Alija Muminagić, MATEMATISKE PERLER, Frederiksberg, 2004

[2] Dominik Palman, GEOMETRISKE KONSTRUKCIJE, Element, Zagreb, 1996

[3] Function, A school Mathematics Journal, Monash University (Vol. 25, February 2001)

[4] Petr Backmann, A HISTORY OF π (pi), st. Martin's Press, New York, 1971

Статијата прв пат е објавена во списанието Сигма на СММ