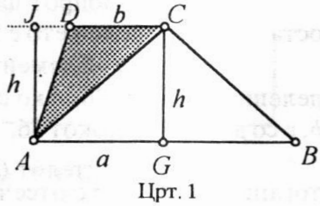
Илија Јанев, Скопје

ПОВЕЌЕ ДОКАЗИ НА ЕДНА ТЕОРЕМА

Во овој напис ќе се задржиме на еден сегмент од работата на една школа. Реализирајќи ја темата "*Докази во математиката*" беше докажана теорема за плоштина на трапез. Наредниот час некои ученици имаа по три, некои по четири, а еден ученик дури пет докази на теоремата. Овде ви нудиме шест докази на спомнатата теорема. Притоа, ќе користиме дека **плоштината на трапез е еднаква на збирот од плоштините на неговите делови - многуаголници што не се преклопуваат,** како и тоа дека при ротација или централна симетрија фигура се пресликува во складна фигура, а **складните фигури имаат еднакви плоштини.**

Теорема. *Плоштината на трапезот е еднаква на производот од полузбирот на основите a и b и висината h, т.е.* $P=\frac{a+b}{2}h$.

Прв доказ. Со дијагоналата AC, трапезот $ABCD$ со основи $\overline{AB}=a$ и $\overline{CD}=b$ и висина $\overline{CG}=h$ (црт.1) го разбиваме на два триаголника: ABC со основа а и висина h и CDA со основа b и висина h.

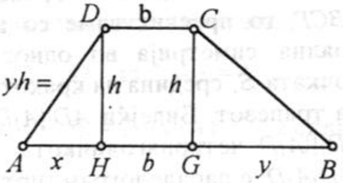


Црт. 1

Тогаш, $P_{CDA}=\frac{1}{2}bh$, $P_{ABC}=\frac{1}{2}ah$,

$$P=P_{ABCD}=P_{ABC}+P_{CDA}=\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh,\ \text{т.е. } P=\frac{a+b}{2}h.$$

Втор доказ. Со висините $\overline{DH}=h$ и $\overline{CG}=h$, трапезот $ABCD$ е разбиен на два триаголника и еден правоаголник (црт. 2) па имаме:

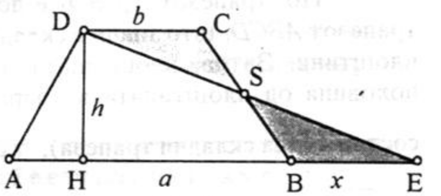


Црт. 2

$$P=P_{AHD}+P_{HGCD}+P_{GBC}=\frac{1}{2}xh+bh+\frac{1}{2}yh=$$

$\frac{1}{2}(x+2b+y)h=\frac{1}{2}(x+b+y+b)h$, бидејќи $x+b+y=a$, следува $P=\frac{a+b}{2}h$.

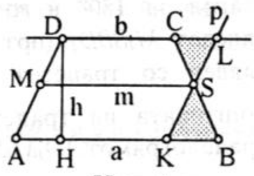
Трет доказ. Нека S е средина на кракот BC на трапезот $ABCD$, а E пресек на правите DS и AB (црт. 3). Триаголниците SBE и SCD се складни според признакот ACA ($\angle B=\angle C$, $\overline{SB}=\overline{SC}$, $\angle BSE=\angle CSD$), па нивните плоштини се еднакви, т.е.



Црт. 3

$P_{SBE}=P_{SCD}$; тогаш $P=P_{AED}=\frac{1}{2}(a+x)h$. Бидејќи $x=b$, конечно добиваме $P=\frac{a+b}{2}h$.

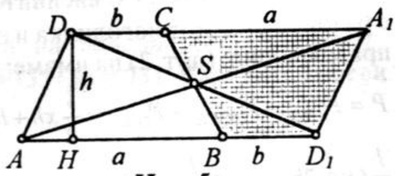
Четврти доказ: Нека M и S се средини на краците AD и BC на трапезот $ABCD$, тогаш $\overline{MS}=m=\frac{a+b}{2}$ е средна линија на тој трапез. Низ S повлекуваме права p паралелна со кракот AD и во пресеците со правите AB и CD ги добиваме точките K и L, соодветно (црт. 4). Бидејќи триаголниците SBK и SCL се складни, според признакот ACA ($\angle B=\angle C$, $\overline{SB}=\overline{SC}$, $\angle BSK=\angle CSL$), имаме: $P_{SBK}=P_{SCL}$.



Црт. 4

Следствено, плоштината на трапезот $ABCD$ е еднаква на плоштината на паралелограмот $AKLD$ ($AK||DL$ и $KL||AD$ - по конструкција), т.е. $P = m\cdot h = \frac{a+b}{2}h$.

Петти доказ. Трапезот $ABCD$ го пресликуваме со централна симетрија во однос на точката S, средина на кракот BC на трапезот. Бидејќи $AD||A_1D_1$ и $AD_1||A_1D$, четириаголникот AD_1A_1D е паралелограм (црт. 5),



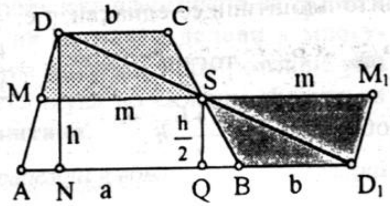
Црт. 5

со основа $\overline{AD_1} = a+b$ и висина $\overline{DH} = h$, па неговата плоштина е еднаква на $(a+b)h$.

Но, трапезот A_1CBD_1 е добиен со централна симетрија на трапезот $ABCD$, што значи е складен со него, т.е. тие имаат еднакви плоштини. Затоа, плоштината на трапезот $ABCD$ е еднаква на половина од плоштината на паралелограмот AD_1A_1D (којшто се состои од два складни трапеза), т.е. $P = \frac{a+b}{2}h$.

Шести доказ. Нека MS е средна линија на трапезот $ABCD$; тогаш и четириаголниците $ABSM$ и $MSCD$ се трапези. (Зошто?)

Го ротираме, на пример, трапезот $MSCD$ околу точката S за агол од 180° и го добиваме трапезот M_1SBD_1 (црт. 6), кој е



Црт. 6

складен со трапезот $MSCD$. Значи: $P_{MSCD} = P_{M_1SBD_1}$. Тогаш плоштината на трапезот $ABCD$ е еднаква на плоштината на паралелограмот AD_1M_1M (зошто?) чија основа

$\overline{AD_1} = a+b$, а висина $\overline{SQ} = \frac{h}{2}$. $P=(a+b)\frac{h}{2}$, т.е $P = \frac{a+b}{2}h$.

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус