Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија

B. Marinković

NEKE PRIMENE IDENTIČNIH TRANSFORMACIJA

Identične transformacije algebarskih izraza imaju vrlo veliku primenu. Pomoću njih se rešavaju mnogobrojni i raznovrsni teorijski i praktični problemi. To ćemo ilustrovati na nekim primerima.

A. Izračunavanje numeričke vrednosti algebarskih izraza

Učili ste o rastavljanju algebarskih izraza na činioce. A znate li zašto se izučava rastavljanje izraza (na primer polinoma) na činioce? Pa, reći ćete, da je to potrebno: pri traženju najvećeg zajedničkog činioca (mere) za nekoliko datih izraza, odnosno pri skraćivanju razlomaka; pri traženju najmanjeg zajedničkog sadržaoca za date izraze, odnosno pri dovođenju razlomaka na isti (zajednički) imenilac; pri ... i tu ćete verovatno stati.

Pokazaćemo kako se rastavljanje izraza na činioce može uspešno primeniti pri izračunavanju numeričke (brojne) vrednosti izraza.

1. Numerička ili brojna vrednost algebarskog izraza, kao što vam je poznato, izračunava se tako što se u dati izraz umesto opštih brojeva (promenljivih, tj. slova) stave (zamene) njihove zadate posebne vrednosti, a zatim se izvrše naznačene računske operacije shodno pravilu o redosledu računskih operacija.

Prema tome, ako biste, na primer, dobili zadatak da nađete numeričku vrednost izraza (označimo ga sa A):

$A = 8a^2 - 16ab + 8b^2$, za $a = 17{,}385$ i $b = 7{,}385$, onda bi to izgledalo ovako:

$$A = 8 \cdot 17{,}385^2 - 16 \cdot 17{,}385 \cdot 7{,}385 + 8 \cdot 7{,}385^2 =$$
$$= 8 \cdot 802{,}238225 - 16 \cdot 128{,}388225 + 8 \cdot 54{,}538225 =$$
$$= 2417{,}905800 - 2054{,}211600 + 436{,}305800 =$$
$$= 2854{,}211600 - 2054{,}211600 = 800.$$

Kao što vidite, računanja je bilo i previše, a to oduzima vreme i pruža veće mogućnosti da pogrešite.

Međutim, ako se dati izraz transformiše, tj. napiše u obliku

$$A = 8\,(a^2 - 2\,ab + b^2) = 8\,(a - b)^2,$$

pa potom izvrši zamenjivanje zadatih vrednosti za a i b, rezultat se dobija skoro neposredno:

$$A = 8 \cdot 10^2 = 800, \quad \text{jer je} \quad a - b = 10.$$

2. Zadatak. — Izračunati $63 \cdot 3{,}8 + 17 \cdot 3{,}8 + 20 \,.\, 3{,}8$.

a) Na vršeći prethodno transformisanje datog izraza, imali bismo:

$$239{,}4 + 64{,}6 + 76{,}0 = 380.$$

b) Ako prethodno izvučemo pred zagradu zajednički činilac, imaćemo: $3{,}8 \cdot (63 + 17 + 20)$, pa kako zbir u zagradi iznosi 100, to je, konačno, tražena vrednost jednaka $3{,}8 \cdot 100 = 380$.

Sva računanja smo mogli izvršiti napamet.

Koji je način jednostavniji?

3. Neka treba izračunati numeričku vrednost algebarskog razlomka

$$B = \frac{2x^2 + 2xy}{3x + 3y} \quad \text{ako je} \quad x = 6\frac{3}{4} \;\; \text{i} \;\; y = -\frac{4}{9}.$$

Dati izraz nema smisla kad je $3x + 3y = 0$. tj. $x + y = 0$. (Zašto?). Zato moramo pretpostaviti da je $x \neq -y$. Zadate vrednosti za x i y zadovoljavaju taj uslov.

Ako prethodno brojilac i imenilac datog izraza transformišemo pomoću rastavljanja na činioce, imaćemo:

$$B=\frac{2x^2+2xy}{3x+3y}=\frac{2x(x+y)}{3(x+y)} \quad \text{ili, posle skraćivanja,} \quad B=\frac{2}{3}x.$$

Poslednji izraz identički je jednak datom izrazu za sve vrednosti x i y (ako je $x\neq -y$), pa i za date vrednosti. Dakle,

$$B=\frac{2}{3}\cdot 6\frac{3}{4}=4\frac{1}{2}.$$

4. Posle ovoga, ako biste dobili zadatak da izračunate numeričku vrednost izraza

$$\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\frac{a+b+c}{4bc},$$

koji ima smisla za $bc\neq 0$ i $a+b+c\neq 0$,

$$\text{za } a=-0{,}75, \quad b=-\frac{1}{3} \quad \text{i} \quad c=0{,}5,$$

svakako se ne biste „zaleteli" pa odmah vršili zamenjivanje vrednosti za a, b i c u dati izraz, već biste pokušali da isti prethodno pojednostavite, tj. zamenite ga njemu identički jednakim, ali prostijim izrazom. Evo kako. Označimo li zadani izraz sa C, imaćemo:

$$C=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}:\frac{a+b+c}{4bc}=\frac{(b^2+2bc+c^2)-a^2}{2bc}:\frac{a+b+c}{4bc}=$$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{4bc}{a+b+c}=\frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{2bc}\cdot\frac{4bc}{a+b+c},$$

ili, posle skpaćivanja,

$$C=2(b+c-a).$$

Vrednost poslednjeg izraza, pa prema tome i datog (s kojim je on identički jednak), za zadate vrednosti promenljivih *a*, *b* i *c* biće:

$$C=2\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)=2\cdot\frac{11}{12}=1\frac{5}{6}.$$

5. Na osnovu napred navedenih primera može se izvesti sledeće praktično u p u t s t v o:

Kada dobijete zadatak da izračunate numeričku vrednost nekog algebarskog izraza, nemojte žuriti da odmah zamenite opšte brojeve (promenljive, tj. argumente) koji figurišu u tom izrazu njihovim datim posebnim vrednostima, već najpre pokušajte da taj izraz identičkim transformacijama (vršenjem naznačenih operacija, rastavljanjem na činioce, skraćivanjem razlomaka i sl.) zamenite nekim njemu identički jednakim izrazom koji je jednostavniji za traženo izračunavanje, pa tek onda vršite zamenjivanje opštih brojeva (promenljivih) u izrazu njihovim datim posebnim vrednostima.

Imajući na umu ono što je napred rečeno, moći ćete čak i napamet nalaziti brojne (numeričke) vrednosti mnogih izraza. Na primer:

1) za $a=7{,}58$ vrednost izraza $52a+12a+36a$, tj. $(52+ +12+36)\ a=100a$, iznosiće $100\cdot 7{,}58=758$;

2) izraz $\dfrac{a^2-4}{a+2}$ uz uslov $a\neq -2$ (zašto?) identički je jednak sa izrazom $(a-2)$, te je njegova numerička vrednost, na primer za $a=2{,}5$, jednaka $0{,}5$;

3) $\left(5\frac{3}{4}\right)^2-\left(2\frac{1}{4}\right)^2=\left(5\frac{3}{4}+2\frac{1}{4}\right)\left(5\frac{3}{4}-2\frac{1}{4}\right)=8\cdot 3\frac{1}{2}=28.$

B. Kvadrat polinoma

Poznato vam je kako se kvadrira binom, to jest

$$(X+Y)^2=X^2+2\,XY+Y^2. \qquad (1)$$

A kako biste izračunali kvadrat polinoma, na primer $(a+b+c)^2$?

U ovom slučaju opet nam mogu pomoći identične transformacije. Naime, pri identičnim transformacijama se često koriste dva pravila: pravilo zamene promenljive i pravilo zamenjivanja izraza.

I. *Pravilo zamene promenljive* sastoji se u ovome: u identitetu se ma koja promenljiva (opšti broj) može zameniti algebarskim izrazom (čije su vrednosti iz istog skupa kao i vrednosti promenljive koja se zamenjuje) i pri tome će se opet dobiti identitet.

Na primer, ako u identitetu (1) promenljivu X zamenimo izrazom $(a+b)$, a promenljivu Y izrazom c, dobićemo novi identitet:

$$[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)\cdot c+c^2. \qquad (2)$$

Dopuštene vrednosti promenljivih u (1) i (2) su iz istog skupa (racionalni brojevi).

II. *Pravilo zamenjivanja jednakim izrazom* sastoji se u sledećem: u identitetu možemo svaki izraz zameniti njemu identičnim (jednakim) izrazom i pri tome ćemo opet dobiti identitet.

Ako, koristeći se tim pravilom, u identitetu (2) izraz $(a+b)^2$ zamenimo njemu identičnim izrazom $a^2+2ab+b^2$, a izraz $2(a+b)c$ izrazom $2ac+2bc$, opet ćemo dobiti identitet:

$$[(a+b)+c]^2=(a^2+2ab+b^2)+(2ac+2bc)+c^2. \qquad (3)$$

Kad kažemo da u identitetu (3) možemo zagrade izostaviti, mi u suštini opet primenjujemo II pravilo, pa dobijamo identitet

$$(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2, \qquad (4)$$

to jest

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \qquad (5)$$

Znači, iz identiteta (1) dobili smo identitet (5) primenom I i II pravila, koristeći pri tome zakone komutacije i asocijacije za sabiranje. Drugim rečima, da bismo izraz $(a+b+c)^2$ transformisali u izraz $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$, iskoristili smo identitet (1), zakone komutacije i asocijacije za sabiranje i I i II pravilo.

Identitet (5) nam ukazuje kako se polinom može kvadrirati: kvadrira se posebno svaki član polinoma pa se zbiru dobijenih kvadrata dodaju dvostruki proizvodi svakog člana polinoma sa svim narednim članovima. Na primer,

$$(3x+5y-7z+4)^2=(3x)^2+(5y)^2+(-7z)^2+4^2+2\cdot 3x\cdot 5y+$$
$$+2\cdot 3x(-7z)+2\cdot 3x\cdot 4+2\cdot 5y(-7z)+2\cdot 5y\cdot 4+2(-7z)\cdot 4,$$

ili, pošto se izvrše operacije na desnoj strani,

$$(3x+5y-7z+4)^2=9x^2+25y^2+49z^2+16+30xy-42xz+$$
$$+24x-10yz+40y-56z.$$

Proveri poslednji identitet, na primer, za:

1) $x=y=z=1$, 2) $x=2$, $y=1$, $z=-1$.