

Регионален натпревар 2020

I година

1А. 2Б. Дали постои цел број x таков што броевите $\frac{14x+5}{9}$ и $\frac{17x-5}{12}$ се истовремено цели броеви?

Решение. *Прв начин.* Дадените броеви да ги запишеме како $\frac{14x+5}{9} = x + \frac{5(x+1)}{9}$ и $\frac{17x-5}{12} = x + \frac{5(x-1)}{12}$. Нека постои цел број x таков што $5(x+1)$ е содржател на 9 и $5(x-1)$ е содржател на 12. Бидејќи $\text{NZD}(5,9)=1$ и $\text{NZD}(5,12)=1$, заклучуваме дека $x+1=9k$ и $x-1=12m$, за некои $k, m \in \mathbb{Z}$. Од последните две равенства следува $9k-1=12m+1$, односно $3(3k-4m)=2$, што е противречност. Конечно од добиената противречност следува дека не постои цел број x таков што броевите $\frac{14x+5}{9}$ и $\frac{17x-5}{12}$ се истовремено цели броеви.

Втор начин. Нека постои цел број x таков што истовремено и двата броја се цели. Тогаш постојат цели броеви k и m такви што $14x+5=9k$ и $17x-5=12m$. Според тоа,

$$17x-5-14x-5=12m-9k, \text{ т.е. } 3(x-4m+3k)=10,$$

за некои $k, m, x \in \mathbb{Z}$, што е противречност. Конечно од добиената противречност следува дека не постои цел број x таков што броевите $\frac{14x+5}{9}$ и $\frac{17x-5}{12}$ се истовремено цели броеви.

1Б. Ако на еден трицифрен број му се допише цифрата 1 од десно, се добива четирицифрен број кој е 3 пати поголем од бројот добиен со допишување на цифрата 2 од лево на дадениот трицифрен број. Кој е тој трицифрен број?

Решение. *Прв начин.* Нека бараниот трицифрен број е $\overline{abc}$. Од условот на задачата следува $\overline{abc1} = 3 \cdot \overline{2abc}$. Од последното равенство добиваме

$$10\overline{abc} + 1 = 3(2000 + \overline{abc}), \text{ т.е. } 7\overline{abc} = 5559.$$

Конечно, $\overline{abc} = 857$.

Втор начин. Нека бараниот трицифрен број е $\overline{abc}$. Од условот на задачата следува $\overline{abc1} = 3 \cdot \overline{2abc}$. Единствен едноцифрен број кој помножен

со 3 дава цифра на единиците 1 е бројот 7, па затоа $c=7$. Сега, $\overline{ab71}=3 \cdot \overline{2ab7}$. Во бројот на левата страна цифрата на десетките е 7, па како имаме пренос 2, добиваме дека производот на b и 3 треба да даде цифра на единиците 5. Затоа $b=5$. Значи, $\overline{a571}=3 \cdot \overline{2a57}$. Понатаму, во бројот на левата страна цифрата на стотките е 5, па како имаме пренос 1, добиваме дека производот на a и 3 треба да даде цифра на единиците 4. Затоа $a=8$. Конечно, $8571=3 \cdot 2857$.

2А. Во низа се запишани 2020 реални броеви. Збирот на секој број од низата и реципрочната вредност на следниот број е еднаков на 1. Производот на сите броеви е еднаков на 2020. Кои броеви се запишани на првото и на последното место во низата?

Решение. Нека ниата е $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$. Имаме $a_1 + \frac{1}{a_2} = 1$, па затоа $a_2 = \frac{1}{1-a_1}$. Аналогно, од $a_2 + \frac{1}{a_3} = 1$ следува $a_3 = \frac{1}{1-a_2} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-a_1}} = \frac{1-a_1}{-a_1} = 1 - \frac{1}{a_1}$. За четвртиот член на низата $a_4 = \frac{1}{1-a_3} = \frac{1}{1-(1-\frac{1}{a_1})} = a_1$. Пнатаму, членовите

на низата се повторуваат по секои три, односно низата е

$$a_1, a_2 = \frac{1}{1-a_1}, a_3 = 1 - \frac{1}{a_1}, a_4 = a_1, a_5 = \frac{1}{1-a_1}, a_6 = 1 - \frac{1}{a_1}, a_7 = a_1, \dots$$

Имаме, $2020 = 3 \cdot 673 + 1$ следува дека $a_{2020} = a_1$. За производот на првите три броја имаме $a_1 \cdot \frac{1}{1-a_1} \cdot (1 - \frac{1}{a_1}) = -1$. Тогаш

$$2020 = a_1 a_2 \dots a_{2020} = (-1)^{637} a_{2020} = -a_1,$$

од каде следува дека $a_{2020} = a_1 = -2020$.

3А. 4Б. Определи ги сите вредности на целиот број a за кои квадратниот трином $x^2 - 3ax + 2a^2 + 1$ може да се запише во облик $(x+b)(x+c)$ каде b и c се цели броеви.

Решение. Од условот на задачата имаме $x^2 - 3ax + 2a^2 + 1 = (x+b)(x+c)$, од каде следува $x^2 - 3ax + 2a^2 + 1 = x^2 + (b+c)x + bc$, па затоа

$$\begin{cases} -3a = b+c, \\ 2a^2 + 1 = bc. \end{cases}$$

Од првата равенка имаме $c = -3a - b$, па ако замениме во втората добиваме

$$2a^2 + 1 = -3ab + b^2, \text{ т.е. } (a+b)(2a+b) = -1.$$

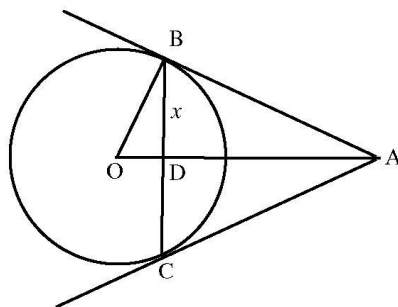
Но, a и b се цели броеви, па од последната равенка добиваме

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+3b=-1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a+b=-1 \\ 2a+3b=-1. \end{cases}$$

Од првиот систем добиваме $a = -2, b = 3$ и затоа $c = 3$, а од вториот добиваме $a = 2, b = -3$ и затоа $c = -3$. Конечно, решение на задачата е $a = \pm 2$.

3Б. Астронаут кој се наоѓа на висина од 525 km гледа дел од Земјата. Ако радиусот на Земјата е приближно 6300 km , пресметај го радиусот на кружната контура на делот од Земјата кој е видлив за астронаутот?

Решение. Бараниот радиус x на кружната контура на делот од Земјата видлив за астронаутот е висината BD кон хипотенузата OA во правоаголниот триаголник ABO , во кој $\overline{OB} = 6300 \text{ km}$ и $\overline{OA} = 6300 + 525 = 6825 \text{ km}$. Точката O е центарот на Земјата, а астронаутот се наоѓа во точката A (види цртеж). Тогаш,



$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2} = \sqrt{6825^2 - 6300^2} = 2625 \text{ km}.$$

Од сличноста на триаголниците ABO и ADB , двата се правоаголни и имаат еден заеднички агол, имаме дека $\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{BA} : \overline{BD}$, односно

$$6825 : 6300 = 2625 : x,$$

од каде добиваме $x = \frac{44100}{91} \text{ km}$.

4А. Дијаметарот на кружната основа на еден цилиндричен сад е еднаков на неговата висина. Садот се наоѓа на хоризонтална површина и е целосно наполнет со течност. Дали ако го навалиме садот така да неговата основа зафаќа агол од 30° со првобитната положба на основата, од садот ќе истече помалку или повеќе од третина од течноста во него? Образложи го одговорот.

Решение. Ако го навалиме цилиндричниот сад така да неговата основа зафаќа агол од 30° со првобитната положба на основата, тогаш по истекувањето, течноста ќе заземе хоризонтална положба $D''C' \parallel AB$ (види

цртеж). Количината на истечената течност е еднаква на половината од волуменот на цилиндарот со оскин пресек $D''C''C'D'$. Нека $x = \overline{C''C'}$ е висината на овој цилиндар кој има еднаква основа со дадениот цилиндар, па $\overline{D''C''} = 2R$, каде R е радиусот на основата на дадениот цилиндар. Правоаголниот триаголник $C'C''D''$ е половина од рамностран триаголник, затоа што

$$\angle C'D''C'' = \angle ABA' = 30^\circ,$$

како агли со заемно паралелни краци, па затоа $\overline{D''C''} = 2x$. Од Питагоровата теорема имаме

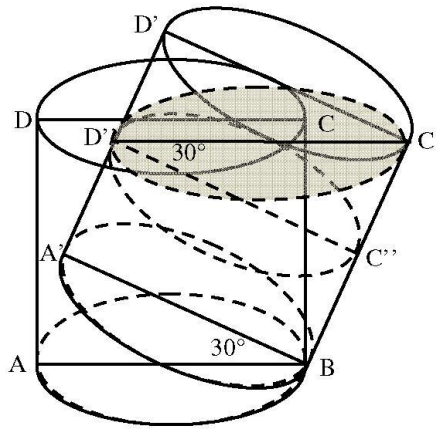
$$\overline{D''C''}^2 + \overline{C''C'}^2 = \overline{D'C'}^2,$$

односно $(2R)^2 + x^2 = (2x)^2$, од каде се добива $x = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$. Висината на дадениот цилиндар е $H = 2R$, па неговиот волумен е $V = 2\pi R^3$.

Тогаш волуменот на истечената вода е

$$V_1 = \frac{1}{2}\pi R^2 x = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 2\pi R^3 = \frac{\sqrt{3}}{6} V < \frac{1}{3} V,$$

односно од садот ќе истече помалку од третина од течноста



II година

1АБ. Најди ги сите природни броеви n за кои $n^2 + 25n + 19$ е полн квадрат.

Решение. Имаме

$$(n+4)^2 < n^2 + 25n + 19 < (n+13)^2.$$

Затоа $n^2 + 25n + 19$ може да биде еден од полните квадрати $(n+5)^2$, $(n+6)^2, \dots, (n+12)^2$. Ако

$$(n+5)^2 = n^2 + 25n + 19,$$

тогаш $15n = 6$, но оваа равенка нема решение во множеството природни броеви. Аналогно разгледувајќи ги преостанатите седум случај ги добиваме решенијата $n \in \{5, 34, 125\}$.

2АБ. Во множеството позитивни реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 2 - (y - z)^2 \\ y + \frac{1}{z} = 2 - (x - y)^2 \\ z + \frac{1}{x} = 2 - (z - x)^2. \end{cases}$$

Решение. Ги собираме равенките од системот и добиваме

$$x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 6 - (y - z)^2 - (x - y)^2 - (z - x)^2.$$

Од $a + \frac{1}{a} \geq 2$ за секој позитивен реален број a следува дека левата страна на последната равенка е поголема или еднаква на 6. Но, десната е помала или еднаква на 6, па затоа знак за равенство важи ако и само ако двете страни се еднакви на 6, односно ако и само ако $x = y = z = 1$.

3А. Ако $\frac{ay-bx}{c} = \frac{cx-az}{b} = \frac{bz-cy}{a}$ и $abc \neq 0$, докажи дека $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Решение. Од $\frac{ay-bx}{c} = \frac{cx-az}{b} = \frac{bz-cy}{a}$ следува $\frac{c(ay-bx)}{c^2} = \frac{b(cx-az)}{b^2} = \frac{a(bz-cy)}{a^2}$.

Понатаму, од својствата на продолжените пропорции следува

$$\frac{c(ay-bx)}{c^2} = \frac{b(cx-az)}{b^2} = \frac{a(bz-cy)}{a^2} = \frac{c(ay-bx) + b(cx-az) + a(bz-cy)}{a^2 + b^2 + c^2} = 0.$$

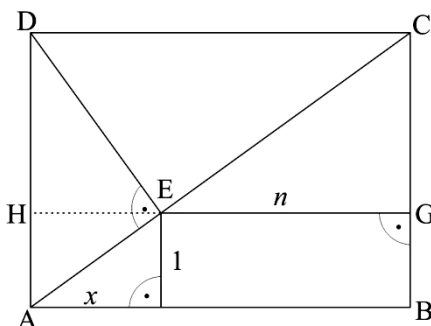
Но, $abc \neq 0$, па од последните равенства добиваме

$$ay - bx = cx - az = bz - cy = 0, \text{ т.е. } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

4А. Дијагоналите во правоаголникот $ABCD$ имаат должина d . Од темето D кон дијагоналата AC спуштена е нормала која што ја сече AC во точка E . Од точката E спуштаме нормали кон страните AB и BC , кои ги сечат AB и BC во точките F и G , соодветно. Ако $\overline{EF} = 1$, $\overline{EG} = n$, докажи дека

$$d^{\frac{2}{3}} = n^{\frac{2}{3}} + 1$$

Решение. Нека $\overline{AF} = x$. Тогаш $\overline{AE} = \sqrt{x^2 + 1}$. Нека правата EG ја сече страната AD на правоаголникот $ABCD$ во точка H . Тогаш триаголникот EDH е правоаголен и за него важи



$$\overline{DE}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{HE}^2 = \overline{DH}^2 + x^2.$$

Од правоаголникот триаголник AED имаме

$$\begin{aligned}\overline{DE}^2 &= \overline{AD}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 - (x^2 + 1) = (\overline{DH} + \overline{HA})^2 - (x^2 + 1) \\ &= (\overline{DH} + 1)^2 - (x^2 + 1).\end{aligned}$$

Од последните две равенства добиваме

$$\overline{DH}^2 + x^2 = (\overline{DH} + 1)^2 - (x^2 + 1)$$

и оттука наоѓаме $\overline{DH} = x^2$. Тогаш и $\overline{CG} = x^2$ и од сличноста на правоаголните триаголници AFE и EGC следува $\frac{1}{x} = \frac{x^2}{n}$, т.е. $n = x^3$. Од правоаголникот триаголник ABC следува

$$d^2 = (x + x^3)^2 + (1 + x^2)^2 = (1 + x^2)^2(1 + x^2) = (1 + x^2)^3.$$

Според тоа,

$$d^{\frac{2}{3}} = 1 + x^2 = n^{\frac{2}{3}} + 1.$$

3Б. Во множеството на цели броеви реши ја равенката

$$\frac{x+6}{y} + \frac{10}{xy} = \frac{y-4}{x}.$$

Решение. Јасно, $x, y \neq 0$. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенката

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 10 &= y^2 - 4y, \\ (y-2)^2 - (x+3)^2 &= 5, \\ (y-x-5)(y+x+1) &= 5.\end{aligned}$$

Бидејќи $x, y \in \mathbb{Z}$ од последната равенка ги добиваме системите равенки

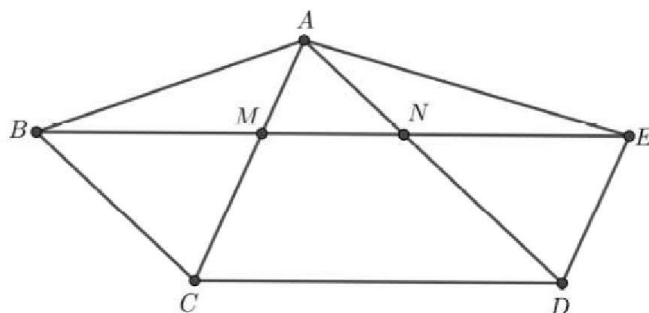
$$\begin{cases} y-x-5=1 \\ y+x+1=5 \end{cases} \quad \begin{cases} y-x-5=-1 \\ y+x+1=-5 \end{cases} \quad \begin{cases} y-x-5=5 \\ y+x+1=1 \end{cases} \quad \begin{cases} y-x-5=-5 \\ y+x+1=-1 \end{cases}$$

чиј решенија се

$$(x, y) = (-1, 5); (x, y) = (-5, -1); (x, y) = (-5, -5), (x, y) = (-1, -1),$$

и тоа се решенијата на почетната равенка.

4Б. Во петаголникот $ABCDE$ триаголниците ABC , BCD , CDE и DEA имаат еднакви плоштини. Правите AC и AD ја сечат BE во точките M и N , соодветно. Докажи дека $\overline{BM} = \overline{NE}$.



Решение. Од еднаквоста на плоштините на триаголниците ABC и BCD следува дека тие имаат еднакви висини спуштени од A и D кон заедничката страна BC . Затоа правите AD и BC се паралелни. Слично, од еднаквоста на плоштините на триаголниците BCD и CDE , следува дека правите BE и CD се паралелни, а од еднаквоста на плоштините на триаголниците CDE и DEA следува дека правите AC и DE се паралелни. Од паралелноста на AD и BC и на BE и CD , добиваме дека четириаголникот $CDNB$ е паралелограм, а од паралелноста на BE и CD и на AC и DE , добиваме дека четириаголникот $CDEM$ е паралелограм. Од паралелограмот $CDNB$ следува дека $\overline{CD} = \overline{NB}$, а од паралелограмот $CDEM$ следува дека $\overline{CD} = \overline{EM}$. Затоа, $\overline{EM} = \overline{NB}$ и оттука имаме

$$\overline{NM} + \overline{MB} = \overline{EN} + \overline{NM},$$

односно $\overline{BM} = \overline{NE}$, што и требаше да се докаже

III година

1АБ. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases}$$

Решение. Прво да забележиме дека мора да е $x, y, z > 0$. Дадениот систем е последователно еквивалентен на системите

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_{2^2} y + \log_{2^2} z = 2 \\ \log_3 y + \log_{3^2} z + \log_{3^2} x = 2 \\ \log_4 z + \log_{4^2} x + \log_{4^2} y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 y + \frac{1}{2} \log_2 z = 2 \\ \log_3 y + \frac{1}{2} \log_3 z + \frac{1}{2} \log_3 x = 2 \\ \log_4 z + \frac{1}{2} \log_4 x + \frac{1}{2} \log_4 y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 \sqrt{y} + \log_2 \sqrt{z} = 2 \\ \log_3 y + \log_3 \sqrt{z} + \log_3 \sqrt{x} = 2 \\ \log_4 z + \log_4 \sqrt{x} + \log_4 \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \sqrt{y} \sqrt{z} = 2 \\ \log_3 y \sqrt{z} \sqrt{x} = 2 \\ \log_4 z \sqrt{x} \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \sqrt{y} \sqrt{z} = 4 \\ y \sqrt{z} \sqrt{x} = 9 \\ z \sqrt{x} \sqrt{y} = 16 \end{cases}$$

Ако ги помножиме трите равенки добиваме $x^2 y^2 z^2 = 24^2$. Бидејќи $xyz > 0$ заклучуваме $xyz = 24$. Сега $\frac{xyz}{x \sqrt{y} \sqrt{z}} = \frac{24}{4}$, од каде добиваме $yz = 6$. Според тоа, $x = \frac{xyz}{yz} = \frac{24}{6} = 4$. Со аналогна постапка наоѓаме $y = \frac{27}{8}$ и $z = \frac{32}{3}$.

2АБ. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{\sin x} - \sqrt{\sin x + \cos x} = \cos x.$$

Решение. За дефиниционата област на равенката важи $\cos x \geq 0$ и $\sin x + \cos x \geq 0$. Од друга страна за позитивниот $\sin x$ знаеме дека $\sin x \leq \sqrt{\sin x}$, па од $\cos x \geq 0$ важи и $\sin x \leq \sqrt{\sin x + \cos x}$. Тогаш равенката е дефинирана ако и само ако $\sin x = \sqrt{\sin x + \cos x}$. Од последново, заради позитивноста на двете страни на равенството, со квадрирање добиваме равенка $\sin^2 x = \sin x + \cos x$, т.е. $\sin x(\sin x - 1) = \cos x$ каде $\sin x, \cos x \geq 0$, а $\sin x - 1 \leq 0$. Тогаш равенство важи ако и само ако $\sin x = 1$ и јасно $\cos x = 0$. Значи, решение на равенката е $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3А. Дадено е множеството квадратни функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, за кои $a < b$ и $f(x) \geq 0$ за секој $x \in \mathbb{R}$. Определи ја најмалата можна вредност на изразот $A = \frac{a+b+c}{b-a}$.

Решение. Прв начин. Од $f(x) \geq 0$ за секој $x \in \mathbb{R}$ следува дека $a > 0$ и $b^2 - 4ac \leq 0$, односно $a > 0$ и $\frac{b^2}{a} \leq c$. Од условот $a < b$ имаме $b - a > 0$, па затоа $a, b, c > 0$. Понатаму, имаме

$$A = \frac{a+b+c}{b-a} \geq \frac{a+b+\frac{b^2}{4a}}{b-a} = \frac{4a^2+4ab+b^2}{4a(b-a)}.$$

Ако ставиме $b - a = y > 0$, добиваме $b = a + y$, па затоа

$$A \geq \frac{4a^2+4a(a+y)+(a+y)^2}{4ay} = \frac{9a^2+6ay+y^2}{4ay} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2ay} \cdot \frac{9a^2+y^2}{2} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2ay} \sqrt{9a^2 y^2} = 3.$$

Најмалата вредност која A ја достигнува е $A = 3$ и истата се добива за

$$9a^2 = y^2 \text{ и } c = \frac{b^2}{4a}, \text{ т.е. } y = 3a, b = a + y = 4a \text{ и } c = 4a.$$

Значи, $A_{\min} = 3$ за $b = c = 4a$.

Втор начин. Како и во првиот начин на решавање заклучуваме $a > 0$ и $\frac{b^2}{a} \leq c$. Нека $t = \frac{b}{a}$. Јасно, $t > 1$. Имаме

$$A = \frac{a+b+c}{b-a} = 1 + \frac{2a+c}{b-a} \geq 1 + \frac{2a+\frac{b^2}{4a}}{b-a} = 1 + \frac{8+t^2}{4(t-1)} = 1 + \frac{(t-4)^2+8(t-1)}{4(t-1)} = 3 + \frac{(t-4)^2}{4(t-1)} \geq 3,$$

при што најмалата можна вредност е 3 и ситата се достигнува за $t = 4$. Според тоа, $A_{\min} = 3$ за $b = c = 4a$.

4А. Нека O е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC . Докажи дека

$$\overline{AO}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{BO}^2 \cdot \overline{AC} + \overline{CO}^2 \cdot \overline{AB} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC}.$$

Решение. Користејќи ги стандардните ознаки за триаголникот, каде r е радиусот на впишаната кружница, добиваме $\overline{AO} = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. Според косинусната теорема за триаголникот важи

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

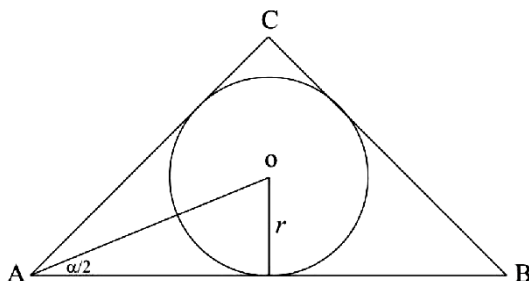
т.е. $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$, од каде добиваме

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}.$$

Значи, $\overline{AO}^2 = \frac{r^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{r^2 bc}{(s-b)(s-c)}$. Ако ги искористиме аналогните равенства

за $\overline{BO}^2$ и $\overline{CO}^2$, добиваме

$$\begin{aligned} \overline{AO}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{BO}^2 \cdot \overline{AC} + \overline{CO}^2 \cdot \overline{AB} &= \frac{r^2 abc}{(s-b)(s-c)} + \frac{r^2 abc}{(s-c)(s-a)} + \frac{r^2 abc}{(s-a)(s-b)} \\ &= \frac{r^2 abc}{(s-a)(s-b)(s-c)} (s-a + s-b + s-c) \\ &= \frac{sr^2 abc}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{P^2 abc}{P^2} = abc \\ &= \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC}, \end{aligned}$$

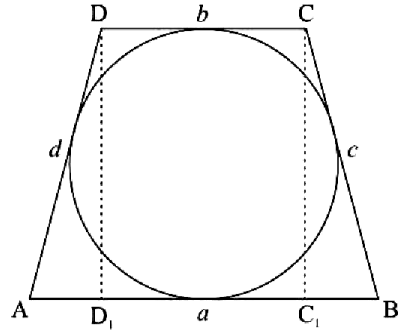


што и требаше да се докаже.

3Б. Околу кружница со радиус r опишан е трапез чии агли при подолгата основа се α, β . Докажи дека односот на плоштините на трапезот и кругот е $\frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right)$.

Решение. Нека C_1, D_1 се подножјата на висините повлечени од C, D на основата AB . Трапезот е тангентен, па неговата висина е $2r$ и важи $a+b=c+d$. Од $\triangle AD_1D$ добиваме $\overline{AD} = d = \frac{2r}{\sin \alpha}$, а од $\triangle BC_1C$ добиваме $\overline{BC} = c = \frac{2r}{\sin \beta}$.

Значи, плоштината на трапезот е $P = \frac{a+b}{2} 2r = (c+d)r = r \left(\frac{2r}{\sin \alpha} + \frac{2r}{\sin \beta} \right)$.



Плоштината на кругот е πr^2 , па затоа односот на двете плоштини е $\frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right)$.

4Б. Нека a, b се позитивни реални броеви за кои важи $ab=1$. Докажи го неравенството

$$(a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(b^5 + b^4 + b^3 + b^2 + b + 1) \geq 4(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1).$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Имаме,

$$a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = (a^3 + 1)(a^2 + a + 1) \text{ и}$$

$$b^5 + b^4 + b^3 + b^2 + b + 1 = (b^3 + 1)(b^2 + b + 1).$$

Затоа даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(a^3 + 1)(b^3 + 1) \geq 4.$$

Но, a, b се позитивни реални броеви, па од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и равенството $ab=1$ следува

$$(a^3 + 1)(b^3 + 1) \geq 2\sqrt{a^3} \cdot \sqrt{b^3} = 4\sqrt{(ab)^3} = 4.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=1$.

IV година

1АБ. Ако решенијата на равенката $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ формираат геометриска прогресија, докажи дека $q^3 = p^3 r$.

Решение. Нека x_1, x_2, x_3 се решенијата на дадената равенка. Од Виетовите формули следува дека

$$x_1 + x_2 + x_3 = p, \quad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = q, \quad x_1 x_2 x_3 = r,$$

Корените на равенката формираат геометриска прогресија, па важи и равенството $x_1 x_3 = x_2^2$. Од првата равенка имаме $x_1 + x_3 = p - x_2$, па со замена во втората равенка добиваме: $x_2(p - x_2) + x_2^2 = q$ од каде добиваме $x_2 = \frac{q}{p}$. Со замена во на условот за прогресија во $x_1 x_2 x_3 = r$ добиваме $x_2^3 = r$. Од равенствата $x_2 = \frac{q}{p}$ и $x_2^3 = r$ следува равенството $(\frac{q}{p})^3 = r$, кое е еквивалентно со бараното равенство.

2А. Нека n е непарен природен број. Докажи дека множеството

$$A = \left\{ \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \right\}$$

содржи непарен број непарни броеви.

Решение. Јасно, тврдењето важи за $n=1$. Нека $n > 1$. Доволно е да докажеме дека збирот на елементите на множеството A е непарен број. Нека S_n е збирот на биномните коефициенти $\binom{n}{i}, i=1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$. Од $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, k=1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$ следува

$$S_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2} + \dots + \binom{n}{\frac{n+1}{2}}.$$

Значи,

$$2S_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}} + \dots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} = 2^n - 2,$$

па затоа $S_n = 2^{n-1} - 1$, што и требаше да се докаже

2Б. Во едно населено место, сите телефонски броеви имаат по шест цифри кои се подредени по строго растечки или строго опаѓачки редослед, при што првата цифра во бројот не може да биде 0. Колкав е најголемиот број на телефонски броеви кои може да постојат во ова место?

Решение. Ќе ставиме $n = n_1 + n_2$, каде n_1 е бројот на телефонски броеви кои имаат цифри по строго растечки редослед, а n_2 е бројот на телефонски броеви кои имаат цифри по строго опаѓачки редослед. Секој број чиито цифри имаат *строго опаѓачки* редослед, се добива така што се избираат шест цифри од вкупно 10, кои потоа се редат од најголем до најмал. Според тоа, такви броеви може да имаме вкупно $n_2 = \binom{10}{6} = 210$. Слично, секој број чиито цифри имаат *строго растечки* редослед се добива така што се бираат цифрите, а потоа се редаат од најмалиот до најголемиот. Овде на располагање имаме 9 цифри, бидејќи броевите не може да почнуваат на 0, а таа ќе биде најмалата цифра во секоја можна комбинација која ја содржи. Значи, $n_1 = \binom{9}{6} = 84$. Тогаш максималниот број на телефонски броеви кои може да постојат во ова место е

$$n = 84 + 210 = 294.$$

ЗАБ. Докажи дека

$$\frac{1}{2021} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2019}{2020} < \sqrt{\frac{1}{2021}}.$$

Решение. Ќе го разгледаме бројот $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2019}{2020}$. Лесно се докажува дека за секој природен број n се исполнети неравенствата

$$\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1} \text{ и } \frac{n}{n+2} < \frac{n}{n+1}.$$

Ако за $n=1,2,\dots,2019$ ги помножиме неравенствата добиени од ворото неравенство, имаме

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2019}{2020} > \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdots \frac{2019}{2021} = \frac{1}{2021},$$

т.е. точно е левото од дадените неравенства. Ако за $n=2,3,\dots,2020$ го искористиме првото неравенство, добиваме

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2019}{2020} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2020}{2021} = A = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2020}{2019} \cdot \frac{1}{2021} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{2021}.$$

Според тоа, $A^2 < \frac{1}{2021}$, т.е. $A < \sqrt{\frac{1}{2021}}$, т.е. точно е десното од дадените неравенства.

4А. Определи ги сите функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ за кои важи

$$f(f(xy)) = xf(y) + 3f(xy).$$

Решение. Ако во равенството од задачата променливите x и y си ги заменат местата, добиваме ново равенство $f(f(yx)) = yf(x) + 3f(yx)$. Би-

дејќи $xu = ux$, со изедначување добиваме $uf(x) = xf(y)$. Ако сега замениме $y=1$, имаме $f(x) = f(1)x$. Натаму, ако во равенство од условот на задачата замениме $x=1, y=1$, добиваме $f(f(1)) = f(1) + 3f(1)$ односно $f(f(1)) = 4f(1)$. Ако во $f(x) = f(1)x$ на местото на x ставиме $f(1)$ добиваме: $f(f(1)) = f(1)^2$, па затоа $f(1)^2 = 4f(1)$, од каде добиваме $f(1) = 0$ или $f(1) = 4$. Конечно, решенија на равенката се функциите $f(x) = 0$ и $f(x) = 4x$.

4Б. Во триаголникот ABC познати се координатите на точките $A_1(-1,0)$, средина на страната BC , $B_1(2,1)$, средина на страната AC и $C_1(0,3)$, средина на страната AB . Определи ги координатите на темињата на овој триаголник.

Решение. Нека координатите на темињата се $A(a',a'')$, $B(b',b'')$ и $C(c',c'')$. Тогаш бидејќи $A_1(-1,0)$ е средина на страната BC добиваме $\frac{b'+c'}{2} = -1, \frac{b''+c''}{2} = 0$. Аналогно ги добиваме равенките

$$\frac{a'+b'}{2} = 0, \frac{a''+b''}{2} = 3, \frac{a'+c'}{2} = 2, \frac{a''+c''}{2} = 1.$$

Сега, решавајќи ги системите

$$\frac{a'+b'}{2} = 0, \frac{b'+c'}{2} = -1, \frac{a'+c'}{2} = 2,$$

$$\frac{a''+c''}{2} = 3, \frac{b''+c''}{2} = 0, \frac{a''+c''}{2} = 1,$$

за координатите на темињата на триаголникот добиваме $A(3,4)$, $B(-3,2)$ и $C(1,-2)$.

