МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 11 (2025), 89 – 113
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-11.html

СТРОГО КОНВЕКСНИ И РАМНОМЕРНО КОНВЕКСНИ НОРМИРАНИ ПРОСТОРИ

Ристо Малчески [1]

Самоил Малчески [2]

1. ВОВЕД

Изучувањето на строго конвексните и рамномерно конвексните нормирани простори е важно за осознавањето на геометриската структура на нормираните простори. Оттука, од посебен интерес е наоѓањето на потребни и доволни услови за да еден нормиран простор биде строго конвексен, односно рамномерно конвексен. Токму карактеризациите на строго конвексните и рамномерно конвексните нормирани простори и презентирањето на соодветни примери е основната цел на овој стручен труд.

Дефиниција 1.1. Нека L е реален векторски простор и $\|\cdot\|$ е реална функција на L за која важи:

i) $\|a\|\geq 0$, за секои $a\in L$ и $\|a\|=0$ ако и само ако $a=0$;

ii) $\|\alpha a\|=|\alpha|\cdot\|a\|$, за секој $a\in L$ и за секој $\alpha\in\mathbb{R}$,

iii) $\|a+b\|\leq\|a\|+\|b\|$, за секои $a,b\in L$.

Функцијата $\|\cdot\|$ се нарекува *норма* на L, а $(L,\|\cdot\|)$ се нарекува *нормиран просто*р. Неравенството *iii*) е познато како *неравенство на триаголник*.

Теорема 1.2. Нека $(L,\|\cdot\|)$ е нормиран простор и $x_i\in L$, $i=1,\dots,n$.

а) Ако $\alpha_i\geq 0, i=1,2,\dots,n$, тогаш

$$\|\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_nx_n\|\leq\alpha_1\|x_1\|+\alpha_2\|x_2\|+\dots+\alpha_n\|x_n\|. \qquad (1)$$

б) Ако $\alpha_1>0$ и $\alpha_i\leq 0$, за $i=2,3,\dots,n$, тогаш

$$\|\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_nx_n\|\geq\alpha_1\|x_1\|+\alpha_2\|x_2\|+\dots+\alpha_n\|x_n\|. \qquad (2)$$

Доказ. а) Непосредно следува од аксиомите *ii*) и *iii*) во дефиницијата 1.1 и принципот на математичка индукција.

б) Од неравенството (1) следува неравенството

$$\begin{aligned}\|\alpha_1 x_1\| &= \|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n - (\alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n)\| \\ &\le \|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n\| + \|-(\alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n)\| \\ &\le \|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n\| + (-\alpha_2)\|x_2\| + \ldots + (-\alpha_n)\|x_n\|\end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството (2). ■

Забелешка 1.3. Ако во неравенството (1) ставиме $\alpha_i = 1, i = 1,\ldots,n$ добиваме дека за секои $x_i \in L$, $i = 1,\ldots,n$ точно е неравенството

$$\|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\| \le \|x_1\| + \|x_2\| + \ldots + \|x_n\|. \tag{3}$$

Теорема 1.4. Нека $(L, \|\cdot\|)$ е нормиран простор и $x_i \in L$, $i = 1,2,\ldots,n$. Тогаш

$$\|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \ldots + \|x_n\|, \tag{4}$$

ако и само ако

$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n\| = \alpha_1\|x_1\| + \alpha_2\|x_2\| + \ldots + \alpha_n\|x_n\|, \tag{5}$$

за секои $\alpha_i > 0, i = 1,2,\ldots,n$.

Доказ. Ако за секои $\alpha_i > 0, i = 1,2,\ldots,n$ е точно равенството (5), тогаш ставаме $\alpha_i = 1, i = 1,2,\ldots,n$ и го добиваме равенството (4).

Обратно, нека е исполнето равенството (4) и нека $\alpha_i > 0, i = 1,2,\ldots,n$. Без ограничување на општоста можеме да земеме $\alpha_1 = \max\limits_{1 \le i \le n} \alpha_i$. Тогаш од равенството (4) и од теоремата 1.2 следува

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \|x_i\| &= \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \sum_{i=1}^{n} (\alpha_1 - \alpha_i)\|x_i\| = \alpha_1 \|\sum_{i=1}^{n} x_i\| - \sum_{i=1}^{n} (\alpha_1 - \alpha_i)\|x_i\| \\ &\le \|\alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i\| - \|\sum_{i=1}^{n} (\alpha_1 - \alpha_i) x_i\| \le \|\alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} (\alpha_1 - \alpha_i) x_i\| = \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\|.\end{aligned}$$

Од последното неравенство и од неравенството (1) следува равенството (5). ■

2. СТРОГО КОНВЕКСЕН НОРМИРАН ПРОСТОР, ЕЛЕМЕНТАРНИ КАРАКТЕРИЗАЦИИ

Строго конвексните нормирани простори се дефинираат како што следува.

Дефиниција 2.1. [2] Нормираниот простор $(L,\|\cdot\|)$ го нарекуваме *сшроѓо конвексен* ако од $\|x\|=\|y\|=1$ и $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$, за $x,y\in L$, следува $x=y$.

Теорема 2.2. [5] За нормираниот простор $(L,\|\cdot\|)$ следните тврдења се еквивалентни:

i) $(L,\|\cdot\|)$ е строго конвексен,

ii) Ако $\|x\|=\|y\|=1$, $x\neq y$, тогаш $\|\frac{1}{2}(x+y)\|<1$.

Доказ. *i)* $\Rightarrow$ *ii)*. Нека $\|x\|=\|y\|=1$, $x\neq y$. Тогаш од неравенството на триаголник следува дека

$$\|\tfrac{1}{2}(x+y)\|\leq\tfrac{1}{2}\|x\|+\tfrac{1}{2}\|y\|=1.$$

Ако $\|\frac{1}{2}(x+y)\|=1$, тогаш $\|x+y\|=2=\|x\|+\|y\|$ и бидејќи L е строго конвексен добиваме дека $x=y$, што е противречност. Значи, $\|\frac{1}{2}(x+y)\|<1$.

ii) $\Rightarrow$ *i)*. Нека $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ и $\|x\|=\|y\|=1$. Ако $x\neq y$, тогаш

$$1>\|\tfrac{1}{2}(x+y)\|=\tfrac{1}{2}\|x+y\|=\tfrac{1}{2}\|x\|+\tfrac{1}{2}\|y\|=1,$$

што е противречност. Значи, $x=y$, па $(L,\|\cdot\|)$ е строго конвексен. ■

Важна класа нормирани простори се предхилбертовите простори за кои е точна следнава теорема.

Теорема 2.3. Предхилбертов простор е строго конвексен.

Доказ. Нека L е предхилбертов простор и нека $x,y\in L$ се такви што $\|x\|=\|y\|=1$, $x\neq y$. Тогаш од равенството на паралелограм следува дека

$$\|\tfrac{x+y}{2}\|^2+\|\tfrac{x-y}{2}\|^2=1. \qquad (6)$$

Но, $x\neq y$, па затоа $\|\frac{x-y}{2}\|>0$ и од равенството (6) следува $\|\frac{x+y}{2}\|<1$. Од теоремата 2.2 следува дека L е строго конвексен. ■

Пример 2.4. Во множеството од ограничени низи реални броеви l^∞ со $\|x\|=\sup\limits_{i\in\mathbb{N}}|x_i|$, $x=(x_i)_{i=1}^\infty\in l^\infty$ е дефинирана норма, што значи дека $(l^\infty,\|\cdot\|)$ е реален нормиран простор. За векторите

$$x=(1-\tfrac{1}{2},1-\tfrac{1}{2^2},...,1-\tfrac{1}{2^n},...) \text{ и } y=(0,1-\tfrac{1}{2},1-\tfrac{1}{2^2},...,1-\tfrac{1}{2^{n-1}},...)$$

важи $\|x\|=\|y\|=\|\frac{x+y}{2}\|=1$, но $x\neq y$, што значи дека l^∞ не е строго конвексен нормиран простор. ■

Пример 2.5. Нека (Y,M) е измерлив простор, μ е позитивна мера на M, $X=L^p(\mu)$, $1<p<\infty$ е просторот $X=\{f:Y\to\mathbb{C}:\int\limits_Y|f|^p d\mu<+\infty\}$. Функцијата $\|\cdot\|:L^p(\mu)\to\mathbb{R}$ определена со: $\|f\|=\{\int\limits_Y|f(x)|^p d\mu\}^{\frac{1}{p}}$, е норма на $X=L^p(\mu)$. Нека $\|f\|=\|g\|=1$ и $f\neq g$. Тогаш од неравенството на Минковски следува дека

$$\|f+g\|=(\int\limits_Y|f(x)+g(x)|^p\,d\mu)^{\frac{1}{p}}\le(\int\limits_Y|f(x)|^p\,d\mu)^{\frac{1}{p}}+(\int\limits_Y|g(x)|^p\,d\mu)^{\frac{1}{p}}$$
$$=\|f\|+\|g\|=1+1=2,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако постои $\alpha>0$ таков што $f(x)=\alpha g(x)$, скоро секаде. Бидејќи $\|f\|=\|g\|=1$, добиваме

$$1=\|f\|=\{\int\limits_Y|f(x)|^p d\mu\}^{\frac{1}{p}}=\{\int\limits_Y|\alpha g(x)|^p d\mu\}^{\frac{1}{p}}=\alpha\{\int\limits_Y|g(x)|^p d\mu\}^{\frac{1}{p}}=\alpha\|g\|=\alpha\cdot 1=\alpha.$$

Последното противречи на $f\neq g$, па затоа $\|f+g\|<2$, т.е. $\|\frac{f+g}{2}\|<1$, што според теоремата 2.2 значи дека нормираниот простор $X=L^p(\mu)$ е строго конвексен.

Понатаму, класата простори l^p, $1<p<\infty$ чии елементи $x=\{x_i\}_{i=1}^\infty$ такви што $\sum\limits_{i=1}^\infty|x_i|^p<\infty$ е поткласа од класата L^p, при што се

интегрира по мерата броење цели броеви, па затоа овие простори се строго конвексни. ■

За нормата на нормираниот простор $(L,\|\cdot\|)$ велиме дека е *сшроѓо конвексна ѿо модул* $c>0$ ако

$$\|tx+(1-t)y\|^2 \le t\|x\|^2 + (1-t)\|y\|^2 - ct(1-t)\|x-y\|^2 \qquad (7)$$

за секои $x,y\in L$ и за секој $t\in(0,1)$. Нормата ја нарекуваме *средно сшроѓо конвексна ѿо модул* $c>0$ ако неравенството (7) важи само за $t=\frac{1}{2}$, т.е. ако $\|\frac{x+y}{2}\|^2 \le \frac{\|x\|^2+\|y\|^2}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2$, за секои $x,y\in L$. Точна е следнава теорема.

Теорема 2.6. Ако $(L,\|\cdot\|)$ е реален нормиран простор со средно строго конвексна норма по модул $c>0$, тогаш L е строго конвексен.

Доказ. Нека L е реален нормиран простор со средно строго конвексна норма по модул $c>0$. Ако $\|x\|=\|y\|=1$ и $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$, за $x,y\in L$, тогаш

$$1=\|\frac{x+y}{2}\|^2 \le \frac{\|x\|^2+\|y\|^2}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2 = 1-\frac{c}{4}\|x-y\|^2,$$

па затоа $\|x-y\|=0$. Но, од својствата на нормата следува $x=y$, што значи дека L е строго конвексен. ■

Забелешка 2.7. Бидејќи секоја строго конвексна норма по модул $c>0$ е средно строго конвексна норма по модул $c>0$ од претходната теорема следува дека нормиран простор со строго конвексна норма по модул $c>0$ е строго конвексен.

Теорема 2.8. [**2**] За векторскиот нормиран простор $(L,\|\cdot\|)$ следните тврдења се еквивалентни:

а) $(L,\|\cdot\|)$ е строго конвексен.

б) Од $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ следува $y=\alpha x$, за некој $\alpha>0$.

в) Од $\|x-u\|=\alpha\|x-y\|$, $\|y-u\|=(1-\alpha)\|x-y\|$, за $\alpha\in(0,1)$ следува $u=(1-\alpha)x+\alpha y$.

Доказ. *а*) $\Rightarrow$ *б*). Нека претпоставиме дека $(L,\|\cdot\|)$ е строго конвексен и нека $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$. Тогаш $\|\frac{x}{\|x\|}\|=\|\frac{y}{\|y\|}\|=1$ и ако во теоремата 1.4 земеме $x_1=x$, $x_2=y$, $\alpha_1=\frac{1}{\|x\|}, \alpha_2=\frac{1}{\|y\|}$ добиваме $\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\|=\frac{1}{\|x\|}\|x\|+\frac{1}{\|y\|}\|y\|=2$. Но, $(L,\|\cdot\|)$ е строго конвексен, па од теоремата 2.2 следува $\frac{x}{\|x\|}=\frac{y}{\|y\|}$, т.е. $y=\alpha x$, за $\alpha=\frac{\|y\|}{\|x\|}>0$.

б) $\Rightarrow$ *в*). Нека претпоставиме дека е точно тврдењето *б*). Од

$$\|x-u\|=\alpha\|x-y\|,\ \|y-u\|=(1-\alpha)\|x-y\|,\ \alpha\in(0,1)$$

следува $\|x-u+(u-y)\|=\|x-u\|+\|u-y\|$ па затоа $u-y=\beta(x-u)$, за некој $\beta>0$. Според тоа,

$$(1-\alpha)\|x-y\|=\|y-u\|=\beta\|x-u\|=\beta\alpha\|x-y\|,$$

па затоа $\beta=\frac{1-\alpha}{\alpha}$, од каде добиваме $u-y=\frac{1-\alpha}{\alpha}(x-u)$, т.е. $u=(1-\alpha)x+\alpha y$.

в) $\Rightarrow$ *а*). Нека претпоставиме дека е точно тврдењето *в*) и нека

$$\|x\|=\|y\|=1,\ \|x+y\|=\|x\|+\|y\|.$$

За $u=0$, од добиваме

$$\|x-0\|=\tfrac{1}{2}\|x-(-y)\| \text{ и } \|0-y\|=(1-\tfrac{1}{2})\|x-(-y)\|, \tfrac{1}{2}\in(0,1),$$

па затоа од с) следува $0=(1-\frac{1}{2})x+\frac{1}{2}(-y)$, т.е. $x=y$. Значи, $(L,\|\cdot\|)$ е строго конвексен нормиран простор. ■

Теорема 2.9. Следниве тврдења се еквивалентни:

1) $(L,\|\cdot\|)$ е строго конвексен.

2) Ако $\frac{1}{2}\|x+y\|=\|x\|=\|y\|$, тогаш $x=y$.

3) Ако $\|x+\alpha y\|=2\|x\|$ за некој $\alpha>0$, тогаш $x=\alpha y$, и $\alpha=1$ ако $\|x\|=\|y\|$.

4) Ако $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$, тогаш $x=\beta y$ за некој $\beta>0$.

5) Ако $\|x-w\|=\|x-y\|+\|y-w\|$, тогаш $y=(1-\gamma)x+\gamma w$, за некој $\gamma\in(0,1)$.

6) Ако $\|x+y\|=\|x-y\|=\|x\|$, тогаш $y=0$.

Доказ. Да ги разгледаме следниве тврдења:

3') Ако $\|x+\alpha y\|=2\|x\|$, каде $\alpha=\frac{\|x\|}{\|y\|}$, тогаш $x=\alpha y$.

4') Ако $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$, тогаш $\|y\|x=\|x\|y$.

Доказот на теоремата ќе го реализираме докажувајќи ги импликациите и еквиваленциите:

$$1)\Rightarrow 2)\Rightarrow 3')\Rightarrow 4')\Rightarrow 1),\ 3')\Rightarrow 3)\Rightarrow 2),\ 4)\Leftrightarrow 5),\ 2)\Leftrightarrow 6) \text{ и } 4')\Rightarrow 4)\Rightarrow 2).$$

$1)\Rightarrow 2)$. Ако $\frac{1}{2}\|x+y\|=\|x\|=\|y\|=\gamma,\ \gamma\neq 0$, тогаш $\frac{1}{2}\|\frac{x+y}{\gamma}\|=$ $=\|\frac{x}{\gamma}\|=\|\frac{y}{\gamma}\|=1$. Но, L е строго конвексен, па затоа $\frac{x}{\gamma}=\frac{y}{\gamma}$, т.е. $x=y$.

$2)\Rightarrow 3')$. Бидејќи $\|\alpha y\|=\|x\|=\frac{1}{2}\|x+\alpha y\|$, од 2) следува $x=\alpha y$.

$3')\Rightarrow 4')$. Нека претпоставиме дека $\|x\|\leq\|y\|$ и $\alpha=\frac{\|x\|}{\|y\|}$. Тогаш

$$\begin{aligned}\|x+y\|&=\|x+\alpha y+(\|y\|-\|x\|)\frac{y}{\|y\|}\|\leq\|x+\alpha y\|+\|y\|-\|x\|\\&\leq 2\|x\|+\|y\|-\|x\|=\|x\|+\|y\|.\end{aligned}$$

Јасно, ако $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$, тогаш $\|x+\alpha y\|=2\|x\|$, па од 3') следува дека $x=\alpha y=\frac{\|x\|}{\|y\|}y$.

Во случај кога $\|x\|\geq\|y\|$, условот 3') го запишуваме во обликот: Ако $\|\frac{x}{\alpha}+y\|=2\|y\|$, каде $\alpha=\frac{\|x\|}{\|y\|}$, тогаш $x=\alpha y$. Сега тврдењето 4') следува аналогно.

4') $\Rightarrow$ 1). Ако $\frac{1}{2}\|x+y\|=\|x\|=\|y\|=1$, тогаш $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ и затоа од 4') следува $\|y\|x=\|x\|y$, што значи $x=y$.

Импликациите 3') $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2), 4') $\Rightarrow$ 4) се очигледни.

4) $\Rightarrow$ 2). Нека $\frac{1}{2}\|x+y\|=\|x\|=\|y\|$. Тогаш од 4) следува $x=\beta y$ за некој $\beta>0$. Со замена во $\|x\|=\|y\|$ добиваме $\beta=1$, т.е. $x=y$.

4) $\Rightarrow$ 5). Ако условот во 5) важи, тогаш од 4) следува $x-y=\beta(y-w)$, за некој $\beta>0$. Затоа, $y=(1-\gamma)x+\gamma w$, каде $\gamma=\frac{\beta}{\beta+1}$ и $\gamma\in(0,1)$.

5) $\Rightarrow$ 4). Заклучокот во 5) го запишуваме во обликот $y-w=(1-\gamma)(x-w)$. Сега во 5) ги заменуваме $x-y$ со x и $y-w$ со y и затоа $x-w$ го заменуваме со $x+y$, па добиваме

$$y=(1-\gamma)(x+y)\text{, т.е. } x=\beta y,\ \beta=\frac{\gamma}{1-\gamma}>0.$$

2) $\Leftrightarrow$ 6). Во 2) заменуваме x со $x+y$ и y со $x-y$, соодветно и го добиваме 6). Важи и обратното. ■

Во теоремата 1.4 докажавме дека во нормиран простор важи

$$\|x_1+x_2+\ldots+x_n\|=\|x_1\|+\|x_2\|+\ldots+\|x_n\|, \tag{8}$$

ако и само ако

$$\|\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n\|=\alpha_1\|x_1\|+\alpha_2\|x_2\|+\ldots+\alpha_n\|x_n\|, \tag{9}$$

за секои $\alpha_i>0, i=1,2,\ldots,n$. Во случај кога просторот $(L,\|\cdot\|)$ е строго конвексен, точна е следнава теорема.

Теорема 2.10. Нека $(L,\|\cdot\|)$ е строго конвексен нормиран простор и $x_i\in L$, $i=1,2,\ldots,n$ се ненулти вектори. Тогаш равенствата (8) и (9) се еквивалентни на равенствата

$$\frac{x_1}{\|x_1\|}=\frac{x_2}{\|x_2\|}=\ldots=\frac{x_n}{\|x_n\|}. \tag{10}$$

Доказ. Ако се исполнети равенствата (10), тогаш за секои $\alpha_i > 0,\ i = 1,2,...,n$ важи

$$\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \| = \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \| x_i \| \frac{x_i}{\|x_i\|} \| = \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \| x_i \| \frac{x_1}{\|x_1\|} \| = \| (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\|x_i\|}{\|x_1\|}) x_1 \|$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\|x_i\|}{\|x_1\|}) \| x_1 \| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \| x_i \|,$$

т.е. точно е равенството (9).

Обратно, нека е исполнето равенството (8). За секој $i = 2,3,...,n$ важи $\| x_1 + x_i \| \le \| x_1 \| + \| x_i \|$. Од друга страна

$$\| x_1 + x_i \| \ge \| \sum_{k=1}^{n} x_k \| - \| \sum_{k \ne 1,i} x_k \| = \sum_{k=1}^{n} \| x_k \| - \| \sum_{k \ne 1,i} x_k \|$$

$$\ge \sum_{k=1}^{n} \| x_k \| - \sum_{k \ne 1,i} \| x_k \| = \| x_1 \| + \| x_i \|,$$

и затоа $\| x_1 + x_i \| = \| x_1 \| + \| x_i \|$. Но, L е строго конвексен, па од теоремата 2.8 следува дека $x_1 = \alpha_i x_i$, за некој $\alpha_i > 0$, при $i = 2,3,..,n$. Значи, $\| x_1 \| = \alpha_i \| x_i \|$, за некој $\alpha_i > 0$, при $i = 2,3,..,n$, односно $\alpha_i = \frac{\|x_1\|}{\|x_i\|}$, за $i = 2,3,..,n$. Според тоа, $\frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{x_i}{\|x_i\|}$, за $i = 2,3,..,n$, т.е. точни се равенствата (10). ■

Во [6] е докажано дека ако x и y се ненулти вектори, тогаш точни се неравенствата

$$\| x + y \| \le \| x \| + \| y \| - (2 - \| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \|) \min\{\| x \|, \| y \|\}, \tag{11}$$

$$\| x + y \| \ge \| x \| + \| y \| - (2 - \| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \|) \max\{\| x \|, \| y \|\}. \tag{12}$$

Во следната теорема ќе дадеме потребен и доволен услов за да во случај на строго конвексен простор во неравенствата (11) и (12) важи знак за равенство.

Теорема 2.11. Нека $(L,\|\cdot\|)$ е строго конвексен нормиран простор и $x,y\in L$ се ненулти вектори, при што важи $\|x\|<\|y\|$. Тогаш

$$\|x+y\|+(2-\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\|)\|x\|=\|x\|+\|y\| \tag{13}$$

ако и само ако постои $\alpha\in(0,1)$ таков што $x=\pm\alpha y$.

Доказ. Од $\|x\|<\|y\|$ и од неравенството на триаголник следува

$$\begin{aligned}\|x+y\|&=\|\frac{\|x\|}{\|x\|}x+\frac{\|x\|}{\|y\|}y+(1-\frac{\|x\|}{\|y\|})y\|\le\|x\|\cdot\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\|+(1-\frac{\|x\|}{\|y\|})\|y\|\\&=\|x\|\cdot\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\|+\|y\|-\|x\|=\|x\|+\|y\|-(2-\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\|)\|x\|,\end{aligned} \tag{14}$$

што значи дека равенството (13) е точно ако и само ако во неравенството (14) важи знак за равенство, т.е. ако и само ако

$$\|x+\frac{\|x\|}{\|y\|}y+(1-\frac{\|x\|}{\|y\|})y\|=\|x+\frac{\|x\|}{\|y\|}y\|+\|(1-\frac{\|x\|}{\|y\|})y\|. \tag{15}$$

Но, L е строго конвексен, па од теоремата 2.10 следува дека равенството (15) е еквивалентно со равенството

$$\frac{x+\frac{\|x\|}{\|y\|}y}{\|x+\frac{\|x\|}{\|y\|}y\|}=\frac{(1-\frac{\|x\|}{\|y\|})y}{\|(1-\frac{\|x\|}{\|y\|})y\|}, \tag{16}$$

т.е. со равенството $x=(\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\|-1)\frac{\|x\|}{\|y\|}y$. Нека $\alpha=(\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\|-1)\frac{\|x\|}{\|y\|}$. Тогаш $x=\alpha y$. Но, $\|x\|<\|y\|$, па затоа $0<|\alpha|<1$.

Обратно, ако $x=\alpha y$, каде $0<|\alpha|<1$, тогаш имаме $\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}=(1+\frac{\alpha}{|\alpha|})\frac{y}{\|y\|}$. Но, $1+\frac{\alpha}{|\alpha|}>0$, па затоа $\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\|=1+\frac{\alpha}{|\alpha|}$, т.е. точно е равенството

$$\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}=\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\|\frac{y}{\|y\|}.$$

Последното равенство е еквивалентно со равенството (16), т.е. со равенството (15), па затоа во (14) важи знак за равенство т.е. точно е равенството (13). ■

3. НАТАМОШНИ КАРАКТЕРИЗАЦИИ НА СТРОГО КОНВЕКСЕН НОРМИРАН ПРОСТОР

Дефиниција 3.1. Нека $x, y \in L$. Множеството

$$[x, y] = \{\alpha x + (1-\alpha) y \mid \alpha \in [0,1]\}$$

го нарекуваме *отсечка* (*сегмент*) *со крајни точки* x и y. Множеството

$$(x, y) = \{\alpha x + (1-\alpha) y \mid \alpha \in (0,1)\}$$

го нарекуваме *внатрешност на отсечката (сегментот) со крајни точки* x и y.

Теорема 3.2. Нека $(L, \|\cdot\|)$ е нормиран простор. Следниве тврдења се еквивалентни:

1) $(L, \|\cdot\|)$ е строго конвексен.
2) Ако $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, за $x, y \in L$, тогаш множеството

$$[x, y] = \{\alpha x + (1-\alpha) y \mid \alpha \in [0,1]\}$$

е линеарно зависно.

Доказ. Нека е исполнет условот 2). Од $x, y \in [x, y]$ следува дека множеството $\{x, y\}$ е линеарно зависно, т.е. постои $\alpha \in \mathbb{R}$ таков што $y = \alpha x$. Ако замениме во условот $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, добиваме $|1+\alpha| = 1 + |\alpha|$, од каде следува $\alpha > 0$. Според тоа, $y = \alpha x$ за некој $\alpha > 0$, па од теорема 2.8 следува дека L е строго конвексен.

Нека L е строго конвексен. Ако $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, тогаш од теоремата 2.8 следува дека $y = \alpha x$ за некој $\alpha > 0$. Нека $x_t = tx + (1-t)y$, за $t \in [0,1]$. Имаме $x_t = (t + (1-t)\alpha)x$, за $t \in [0,1]$ и како за секои $t, p \in [0,1]$ важи $t + (1-t)\alpha > 0$ и $p + (1-p)\alpha > 0$ добиваме

$$x_t = (t + (1-t)\alpha)x = \frac{t+(1-t)\alpha}{p+(1-p)\alpha}(p + (1-p)\alpha)x_p = \frac{t+(1-t)\alpha}{p+(1-p)\alpha} x_p,$$

што значи дека за секои $t, p \in [0,1]$ множеството $\{x_t, x_p\}$ е линеарно зависно, па затоа множеството $[x, y] = \{\alpha x + (1-\alpha) y \mid \alpha \in [0,1]\}$ е линеарно зависно. ■

Дефиниција 3.3. Нека L е нормиран простор, $x \in L$ и $r > 0$. Множеството $B(x,r) = \{y \in L \mid \| y - x \| < r\}$ го нарекуваме *отворена топка со центар во* x *и радиус* r. Ако $x = 0$ и $r = 1$, тогаш $B(0,1)$ ја нарекуваме *единична отворена топка.* Множеството $B[x,r] = \{y \in L \mid \| y - x \| \le r\}$ го нарекуваме *затворена топка со центар во* x *и радиус* r. Ако $x = 0$ и $r = 1$, тогаш $B[0,1]$ ја нарекуваме *единична затворена топка.*

Множеството $S(x,r) = \{y \in L \mid \| y - x \| = r\}$ го нарекуваме *сфера со центар во* x *и радиус* r. Ако $x = 0$ и $r = 1$, тогаш $S(0,1)$ ја нарекуваме *единична сфера.* Јасно, $B(x,r) \subseteq B[x,r]$ и $B[x,r] = B(x,r) \cup S(x,r)$.

Лема 3.4. Нека L е нормиран простор. Ако $x, y \in L$ се ненулти вектори и $\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$, тогаш $[\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}] \subseteq S(0,1)$.

Доказ. Нека $x, y \in L$ и $\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$. Од теоремата 1.4 следува дека за секои $t, s \ge 0$ важи

$$\| tx + sy \| = t \| x \| + s \| y \|. \tag{17}$$

Нека x и y се ненулти вектори. Ако $\alpha \in [0,1]$, тогаш од равенството (17) следува низата равенства

$$\| \alpha \frac{x}{\|x\|} + (1-\alpha) \frac{y}{\|y\|} \| = \frac{\alpha}{\|x\|} \| x \| + \frac{1-\alpha}{\|y\|} \| y \| = 1,$$

од каде следува дека $[\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}] \subseteq S(0,1)$. ■

Теорема 3.5. Нормираниот простор L е строго конвексен ако и само ако од $\| x \| = \| y \| = 1$ и $[x, y] \subseteq S(0,1)$ следува $x = y$.

Доказ. Нека L е строго конвексен нормиран простор и нека се исполнети условите $\| x \| = \| y \| = 1$ и $[x, y] \subseteq S(0,1)$. Тогаш, од

$[x,y]\subseteq S(0,1)$, за $\alpha=\frac{1}{2}$ имаме $\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}x+(1-\frac{1}{2})y\in S(0,1)$, што значи дека $\|\frac{x+y}{2}\|=1$ и како L е строго конвексен добиваме $x=y$.

Обратно, нека од $\|x\|=\|y\|=1$ и $[x,y]\subseteq S(0,1)$ следува $x=y$. Нека претпоставиме дека $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$. Тогаш од лемата 3.4 следува $[\frac{x}{\|x\|},\frac{y}{\|y\|}]\subseteq S(0,1)$, што според претпоставката значи дека $\frac{x}{\|x\|}=\frac{y}{\|y\|}$, т.е. $x=\frac{\|x\|}{\|y\|}y$. Конечно, од теоремата 2.8 следува дека L е строго конвексен нормиран простор. ■

Теорема 3.6. Нормираниот простор L е строго конвексен ако и само ако е исполнет условот

$$\text{од } x,y\in S(0,1),\ x\neq y \text{ следува } \|\alpha x+\beta y\|<1, \text{ за } \alpha,\beta>0 \text{ и } \alpha+\beta=1. \tag{18}$$

Доказ. Нека е исполнет условот (18) и нека $\|x\|=\|y\|=1$, $x\neq y$. Тогаш $x,y\in S(0,1)$ и ако земеме $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ добиваме $\|\frac{x+y}{2}\|<1$, што според теоремата 2.2 значи дека L е строго конвексен.

Обратно, нека претпоставиме дека постојат $x,y\in S(0,1), x\neq y$ и $\alpha,\beta>0$, $\alpha+\beta=1$ такви што $\|\alpha x+\beta y\|=1$. Од овде следува дека постојат $x,y\in L$ такви што $\|x\|=\|y\|=1$, $x\neq y$ и $\alpha,\beta>0$, $\alpha+\beta=1$ такви што $\|\alpha x+\beta y\|=\|\alpha x\|+\|\beta y\|$. Според теоремата 1.4 за секои $t,s\geq 0$ важи $\|t(\alpha x)+s(\beta y)\|=t\|\alpha x\|+s\|\beta y\|$. Ако во последното равенство ставиме $t=\frac{1}{2\alpha}, s=\frac{1}{2\beta}$, добиваме дека постојат $x,y\in L$ такви што $\|x\|=\|y\|=1$, $x\neq y$ и $\|\frac{x+y}{2}\|=1$, што според теоремата 2.2 значи дека просторот L не е строго конвексен. ■

За следната карактеризација на строго конвексните нормирани простори ќе ги користиме екстремалните точки на конвексните множества.

Дефиниција 3.7. [5] Нека C е конвексно множество во нормираниот простор L. Точката $z \in C$ ја нарекуваме *екстремална* (*крајна*) *точка за множеството* C ако од $z = tx + (1-t)y$, за некој $t \in (0,1)$ и некои $x, y \in C$ следува $x = y$.

Теорема 3.8. [2] Нормираниот простор L е строго конвексен ако и само ако секоја точка од единичната сфера е екстремална точка за затворената единична топка.

Доказ. Нека L е строго конвексен. Ќе докажеме дека секоја точка на множеството $S(0,1)$ е екстремална за множеството $B[0,1]$. Нека $u \in S(0,1)$ и нека $u = tx + (1-t)y$ за некој $t \in (0,1)$ и некои $x, y \in B[0,1]$. Од $u \in S(0,1)$ следува $\|u\| = 1$ и како $x, y \in B[0,1]$ добиваме $\|x\| \le 1$ и $\|y\| \le 1$. Ќе докажеме дека $\|x\| = \|y\| = 1$. Навистина, во спротивно имаме

$$1 = \|u\| = \|tx + (1-t)y\| \le t\|x\| + (1-t)\|y\| < 1,$$

што е противречност. Според тоа,

$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| = 2.$$

Ќе докажеме дека $\|x + y\| = 2$. Навистина, во спротивно имаме

$$\begin{aligned} 1 &= \|u\| = \|tu + (1-t)u\| = \|t(tx + (1-t)y) + (1-t)(tx + (1-t)y)\| \\ &= \|t^2 x + t(1-t)(x+y) + (1-t)^2 y\| < t^2 + 2t(1-t) + (1-t)^2 = 1, \end{aligned}$$

што е противречност. Според тоа, $\|x\| = \|y\| = \|\frac{x+y}{2}\| = 1$ и како L е строго конвексен добиваме $x = y$, т.е. u е екстремална точка за затворената единична топка.

Обратно, нека претпоставиме $\|x\| = \|y\| = \|\frac{x+y}{2}\| = 1$, за $x, y \in L$. Според тоа, точката $u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ е од единичната сфера, па затоа таа е екстремална точка за затворената единична топка, што значи $x = y$, т.е. L е строго конвексен. ■

Пример 3.9. а) Во примерот 2.5 докажавме дека просторот $L^p(\mu)$, $1<p<\infty$ е строго конвексен. Сега, од теорема 3.8 следува дека секоја точка од единичната сфера во $L^p(\mu)$ е екстремална точка за затворената единична топка во $L^p(\mu)$.

б) На векторскиот простор $\mathbf{C}_{[0,1]}$, од непрекинати функции на интервалот $[0,1]$, функцијата $\|\cdot\|:\mathbf{C}_{[0,1]}\to\mathbb{R}$ определена со $\|x\|=\max\limits_{s\in[0,1]}|x(s)|$ е норма, што значи дека $(\mathbf{C}_{[0,1]},\|\cdot\|)$ е нормиран простор. За функциите $x(t)=1,\ y(t)=1-t\in\mathbf{C}_{[0,1]}$ важи

$$\|x\|=\max_{s\in[0,1]}|x(s)|=\max_{s\in[0,1]}|1|=1 \text{ и } \|y\|=\max_{s\in[0,1]}|y(s)|=\max_{s\in[0,1]}|1-s|=1,$$

што значи дека $x,y\in S(0,1)$. Понатаму, за функцијата $u(t)=\frac{1}{2}x(t)+\frac{1}{2}y(t)\ =1-\frac{t}{2}$ важи $\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|1-\frac{t}{2}|=1$, што значи дека $u\in S(0,1)$ и како таа не е екстремална за $B[0,1]$ заклучуваме дека просторот $(\mathbf{C}_{[0,1]},\|\cdot\|)$ не е строго конвексен. ■

За следната карактеризација на строго конвексните нормирани простори ќе го воведеме поимот минимална точка во однос на множеството $M\subseteq L$.

Дефиниција 3.10. За точката $v\in L$ ќе велиме дека е *минимална во однос на множеството* M ако од $\|u-m\|\le\|v-m\|$, $u\in L$, $m\in M$ следува $u=v$.

Теорема 3.11. Нормираниот простор L е строго конвексен ако и само ако за секои $x,y\in L$ точките од сегментот $[x,y]=\{tx+(1-t)y\mid\ t\in[0,1]\}$ се минимални во однос на множеството $\{x,y\}$.

Доказ. Нека L е строго конвексен. Јасно, точките x и y се минимални во однос на множеството $\{x,y\}$, па затоа нека

$v_t = tx + (1-t)y$, $t \in (0,1)$ е произволна точка од внатрешноста на сегментот $[x, y]$. Нека претпоставиме дека за некој $u \in L$ важи

$$\| u - x \| \leq \| v_t - x \| = (1-t) \| x - y \| \tag{19}$$

$$\| u - y \| \leq \| v_t - y \| = t \| x - y \| . \tag{20}$$

Понатаму, од неравенствата (19) и (20) следува

$$\| x - y \| \leq \| x - u \| + \| u - y \| \leq (1-t) \| x - y \| + t \| x - y \| = \| x - y \|$$

па затоа точни се равенствата $\| u - x \| = (1-t) \| x - y \|$, $\| u - y \| = t \| x - y \|$ и како $t \in (0,1)$ од теоремата 2.8 следува $u = tx + (1-t)y = v_t$, што значи дека точката v_t е минимална во однос на множеството $\{x, y\}$.

Обратно, нека за секои $a, b \in L$ точките од сегментот $[a, b]$ се минимални за множеството $\{a, b\}$. Ако $\| x \| = \| y \| = \| \frac{x+y}{2} \| = 1$, тогаш

$$\| 0 - x \| = \| x \| = \| \tfrac{x+y}{2} \| \leq \| \tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{2}(-y) - x \|,$$
$$\| 0 - (-y) \| = \| y \| = \| \tfrac{x+y}{2} \| \leq \| \tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{2}(-y) - (-y) \| .$$

Но, точката $\frac{1}{2} x + \frac{1}{2}(-y)$ припаѓа на сегментот $[x, -y]$, што значи дека таа е минимална во однос на множеството $\{x, -y\}$, па затоа $\frac{1}{2} x + \frac{1}{2}(-y) = 0$, т.е. $x = y$, односно L е строго конвексен. ■

4. РАМНОМЕРНО КОНВЕКСЕН НОРМИРАН ПРОСТОР

Дефиниција 4.1. [**1**], [**4**] Нормираниот простор $(L, \| \cdot \|)$ го нарекуваме *рамномерно конвексен* ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta(\varepsilon) > 0$ таков што од $\| x \| = \| y \| = 1$ и $\| x - y \| \geq \varepsilon$ следува $\| x + y \| \leq 2(1 - \delta(\varepsilon))$.

Теорема 4.2. Секој прет-Хилбертов простор е рамномерно конвексен.

Доказ. Прет-Хилбертов простор е нормиран, при што нормата е воведена со $\|x\|=(x,x)^{1/2}$ и таа го задоволува равенството на паралелограм

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2). \tag{21}$$

Ако $\varepsilon>0$ е дадено и $\|x\|=\|y\|=1$, $\|x-y\|\geq\varepsilon$, тогаш од равенството (21) следува дека за $\delta(\varepsilon)=1-\sqrt{1-(\frac{\varepsilon}{2})^2}>0$ важи

$$\|x+y\|=(4-\|x-y\|^2)^{1/2}\leq(4-\varepsilon^2)^{1/2}=2(1-\delta(\varepsilon)),$$

што значи дека претхилбертовиот простор $(L,(\cdot,\cdot))$ е рамномерно конвексен. ■

Теорема 4.3. [**1**] Нека $(L,\|\cdot\|)$ е нормиран простор. Ако L е рамномерно конвексен, тогаш тој е строго конвексен.

Доказ. Нека $(L,\|\cdot\|)$ е рамномерно конвексен и да претпоставиме дека за $x,y\in L$ важи $\|x\|=\|y\|=1$ и $x\neq y$. Тогаш за $\varepsilon=\frac{\|x-y\|}{2}$, важи $\varepsilon>0$ и бидејќи L е рамномерно конвексен добиваме дека постои $\delta(\varepsilon)>0$ таков што од $\|x\|=\|y\|=1$, $\|x-y\|\geq\varepsilon$ следува $\|x+y\|\leq 2(1-\delta(\varepsilon))<2$, т.е. $\|\frac{x+y}{2}\|<1$. Конечно, од теоремата 2.2 следува дека L е строго конвексен. ■

Пример 4.4. Во примерот 2.4 видовме дека нормираниот простор $(l^\infty,\|\cdot\|)$ не е строго конвексен. Сега, од теоремата 4.3 следува дека l^∞ не е рамномерно конвексен. ■

Теорема 4.5. [**3**] Нормираниот простор $(L,\|\cdot\|)$ е рамномерно конвек-сен ако и само ако за секои низи $\{x_n\}_{n=1}^\infty,\{y_n\}_{n=1}^\infty$ такви што

1) $\|x_n\|=\|y_n\|=1$ и
2) $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2$

важи $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$.

Доказ. Нека претпоставиме дека низите $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ги исполнуваат условите 1) и 2), но дека низата $\{x_n - y_n\}_{n=1}^{\infty}$ не конвергира кон 0. Тогаш постојат $\varepsilon_0 > 0$ и низа природни броеви $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ таква што $\| x_{n_k} - y_{n_k} \| \geq \varepsilon_0$. Но, L е рамномерно конвексен, па затоа за овој ε_0 постои $\delta(\varepsilon_0) > 0$ таков што $\| x_{n_k} + y_{n_k} \| \leq 2(1 - \delta(\varepsilon_0)) < 2$ што противречи на условот 2). Конечно, од добиената противречност следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$.

Нека претпоставиме дека L е таков што за секои низи $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ за кои се исполнети условите 1) и 2) важи $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$, но дека L не е рамномерно конвексен. Тогаш за некој $\varepsilon > 0$ и за $\delta = \frac{1}{n}$ постојат $x_n, y_n \in L$ такви што

i) $\| x_n \| = \| y_n \| = 1$,

ii) $\| x_n + y_n \| \geq 2(1 - \frac{1}{n})$ и

iii) $\| x_n - y_n \| \geq \varepsilon$.

Сега, од *ii*) следува

$$2(1 - \tfrac{1}{n}) \leq \| x_n + y_n \| \leq \| x_n \| + \| y_n \| = 2 \text{, т.е. } \lim_{n\to\infty} \| x_n + y_n \| = 2,$$

па затоа $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$, што противречи на *iii*), па затоа L е рамномерно конвексен. ■

Ќе дадеме еквивалентна формулација на теоремата 4.5.

Теорема 4.6. [3] Нормираниот простор $(L, \|\cdot\|)$ е рамномерно конвек-сен ако и само ако за секои низи $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такви што

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n \| = \lim\limits_{n\to\infty} \| y_n \| = 1$ и

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n + y_n \| = 2$,

важи $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$. ■

Теорема 4.7. Секој конечнодимензионален строго конвекесен нормиран простор е рамномерно конвексен.

Доказ. Нека $(L,\|\cdot\|)$ е конечнодимензионален строго конвексен норми-ран простор. Нека $\varepsilon>0$ е дадено и $x,y\in L$ се такви што $\|x\|=\|y\|=1$ и $\|x-y\|\geq\varepsilon$. Тогаш, бидејќи L е строго конвексен и $x\neq y$, од теоремата 2.2 следува $\|\frac{x+y}{2}\|<1$.

Дефинираме функција $f(u,v)=\|\frac{u+v}{2}\|$, $(u,v)\in L\times L$ која е непрекината. Множеството $K_\varepsilon=\{(a,b)\in L\times L\colon \|a\|=\|b\|=1,\ \|a-b\|\geq\varepsilon\}$ е ограничено и затворено, па како L е конечнодимензионален, тоа е компактно. Понатаму, функцијата $f(u,v)$ е непрекината, па затоа на компактното множество K таа го достигнува својот максимум M, т.е. постојат $a_0,b_0\in K$, за кои од строгата конвексност на L следува дека важи $f(a_0,b_0)=M=\|\frac{a_0+b_0}{2}\|<1$. Конечно, ако земеме $\delta(\varepsilon)=1-M>0$ добиваме дека од $\|x\|=\|y\|=1$ и $\|x-y\|\geq\varepsilon$ следува

$$\|\tfrac{x+y}{2}\|\leq M=1-(1-M)=1-\delta(\varepsilon)\text{, т.е. } \|x+y\|\leq 2(1-\delta(\varepsilon)),$$

што значи дека е рамномерно конвексен. ■

Во претходните разгледувања дадовме примери на нормирани простори кои или се и строго конвексни и рамномерно конвексни или не се строго конвексни и не се рамномерно конвексни. Понатаму, во теоремата 4.3 докажавме дека од рамномерната конвексност следува строгата конвексност. Во следниот пример ќе разгледаме нормиран простор кој е строго конвексен, но не е рамномерно конвексен.

Пример 4.8. Нека $L=\{q(x): q \text{ е полином на } [0,1]\}$. Јасно, L е векторски простор со вообичаените операции собирање на полиноми и производ на полином со реален број. Понатаму, со

$$\|p\|=\sqrt{\int_0^1 (p(x))^2dx}+\sup_{0\leq x\leq 1}|p(x)|,\ \ p\in L \tag{22}$$

е определена норма на L. Навистина:

Од (22) следува $\| p \| \geq 0$, за секој $p \in L$ и $\| p \| = 0$ ако и само ако $p(x) = 0$, за секој $x \in [0,1]$.

За секој $\lambda \in \mathbb{R}$ и за секој $p \in L$ важи

$$\| \lambda p \| = \sqrt{\int_0^1 (\lambda p(x))^2 dx} + \sup_{0 \leq x \leq 1} | \lambda p(x) | = \sqrt{\int_0^1 (| \lambda | p(x))^2 dx} + \sup_{0 \leq x \leq 1} | \lambda | \cdot | p(x) |$$
$$= | \lambda | (\sqrt{\int_0^1 (p(x))^2 dx} + \sup_{0 \leq x \leq 1} | p(x) |) = | \lambda | \cdot \| p \|.$$

За секои $p, q \in L$ од својствата на апсолутната вредност, супремумот и неравенството на Минковски следува

$$\| p + q \| = \sqrt{\int_0^1 (p(x) + q(x))^2 dx} + \sup_{0 \leq x \leq 1} | p(x) + q(x) |$$
$$\leq \sqrt{\int_0^1 (p(x) + q(x))^2 dx} + \sup_{0 \leq x \leq 1} (| p(x) | + | q(x) |)$$
$$\leq \sqrt{\int_0^1 (p(x))^2 dx} + \sqrt{\int_0^1 (q(x))^2 dx} + \sup_{0 \leq x \leq 1} | p(x) | + \sup_{0 \leq x \leq 1} | q(x) |$$
$$= \| p \| + \| q \|.$$

Ќе докажеме дека L не е рамномерно конвексен простор.

За таа цел ќе ги разгледаме низите $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ определени со $p_n(x) = \frac{1}{2}$, $q_n(x) = \frac{1}{2}(1 - x^n)$, за $n = 1, 2, \ldots$. Имаме

$$\lim_{n \to \infty} \| p_n \| = \lim_{n \to \infty} (\sqrt{\int_0^1 (\tfrac{1}{2})^2 dx} + \sup_{0 \leq x \leq 1} \tfrac{1}{2}) = 1,$$
$$\lim_{n \to \infty} \| q_n \| = \lim_{n \to \infty} (\sqrt{\int_0^1 (\tfrac{1}{2} | 1 - x^n |)^2 dx} + \sup_{0 \leq x \leq 1} \tfrac{1}{2} | 1 - x^n |),$$
$$= \lim_{n \to \infty} (\tfrac{1}{2} \sqrt{1 - \tfrac{2}{n+1} + \tfrac{1}{2n+1}} + \tfrac{1}{2}) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \| \tfrac{1}{2}(p_n + q_n) \| = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\int_0^1 (\tfrac{1}{2}|1-\tfrac{x^n}{2}|)^2 dx} + \sup_{0\le x\le 1} \tfrac{1}{2}|1-\tfrac{x^n}{2}| \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\tfrac{1}{n+1}+\tfrac{1}{4(2n+1)}} + \tfrac{1}{2} \right) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \| p_n - q_n \| = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\int_0^1 |\tfrac{x^n}{2}|^2 dx} + \sup_{0\le x\le 1} |\tfrac{x^n}{2}| \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2n+1}} + \tfrac{1}{2} \right) = \tfrac{1}{2},$$

што според теоремата 4.6 значи дека $(L, \|\cdot\|)$ не е рамномерно конвексен.

Нека $\| p+q \| = \| p \| + \| q \|$. Од својствата на супремумот и неравенството на Минковски следува дека тоа е можно ако и само ако $p = \alpha q$, за некој $\alpha > 0$, па од теоремата 2.8 следува дека L е строго конвексен нормиран простор. ■

Теорема 4.9. Нека $(L, \|\cdot\|)$ нормиран простор. Следниве тврдења се еквивалентни.

1) $(L, \|\cdot\|)$ е рамномерно конвексен.
2) За секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков да ако $\| x \| = \| y \|$ и $\| x - y \| \ge \varepsilon \| x \|$, тогаш $\tfrac{1}{2} \| x + y \| \le (1-\delta) \| x \|$.
3) За секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta' > 0$ таков што ако $\| x - ay \| = \varepsilon \| x \|$, каде $a = \frac{\|x\|}{\|y\|}$, тогаш $\tfrac{1}{2} \| x + ay \| \le (1-\delta') \| x \|$.
4) За секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што ако $\| x - ay \| \ge \varepsilon \| x \|$, каде $a = \frac{\|x\|}{\|y\|}$, тогаш

$$\| x + y \| \le \| x \| + \| y \| - \delta \| x \| \text{ или } \| x + y \| \le 3\| x \| - \| y \| - \delta \| x \|.$$

Доказ. 1) $\Rightarrow$ 2). Нека $\| x \| = \| y \| = c \ne 0$. Тогаш од (1) следува $\| \frac{x}{c} \| = \| \frac{y}{c} \| = 1$ и $\| \frac{x-y}{c} \| \ge \varepsilon$ повлекува $\tfrac{1}{2} \| \frac{x+y}{c} \| \le 1-\delta$, т.е.

$$\tfrac{1}{2} \| x + y \| \le (1-\delta) \| x \|.$$

$2) \Rightarrow 3)$. Имаме $\| x \| = \| \frac{\|x\|}{\|y\|} y \| = \| ay \|$. Ако во (2) го замениме y со ay и искористиме дека $\| ay \| = \| x \|$ го добиваме (3).

$3) \Rightarrow 4)$. Бидејќи $\frac{1}{2} \| x + ay \| \leq (1 - \delta') \| x \|$ од (3), ако $\| y \| \geq \| x \|$, тогаш

$$\begin{aligned} \| x + y \| &= \| x + ay + y(1-a) \| \leq \| x + ay \| + (1-a) \| y \| \\ &\leq 2(1-\delta') \| x \| + \| y \| - \| x \| = \| x \| + \| y \| - 2\delta' \| x \|. \end{aligned}$$

Во случај кога $\| y \| \leq \| x \|$, добиваме

$$\begin{aligned} \| x + y \| &= \| x + ay + y(1-a) \| \leq \| x + ay \| + (a-1) \| y \| \\ &\leq 2(1-\delta') \| x \| + \| x \| - \| y \| = 3 \| x \| - \| y \| - 2\delta' \| x \|. \end{aligned}$$

Ако во последните неравенства ставиме $\delta = 2\delta'$, ги добиваме бараните неравенства.

$4) \Rightarrow 1)$. $\| x \| = \| y \| = 1$, тогаш од (4) следува $\| x + y \| \leq 2 - \delta' \| x \|$. Конечно, ако во последното неравенство земеме $\delta = \frac{1}{2} \delta'$, добиваме дека L е рамномерно конвексен. ■

Коментар 4.10. Во примерот 2.5 докажавме дека ако (Y, M) е измерлив простор, μ е позитивна мера на M, тогаш просторот $X = L^p(\mu), 1 < p < \infty$, е строго конвексен. Меѓутоа овој простор е и рамномерно конвексен. Доказот на ова тврдење нема да го презентираме и истиот може да се види во [1].

Јасно, просторите $l^p, 1 < p < \infty$ кои се дел од просторите L^p, $1 < p < \infty$ се рамномерно конвексни простори.

На крајот од овој дел ќе презентираме една интересна карактеризација на рамномерно конвексните простори користејќи функции дефинирани на сферата $S(0,1)$ на L. Ќе сметаме дека φ е строго конвексна и строго растечка функција на $[0,2]$, што значи дека таа е непрекината на $(0,2)$.

Теорема 4.11. [3] Нормираниот простор $(L, \| \cdot \|)$ е рамномерно кон-вексен ако и само за секоја функција φ таква што $\varphi(1) = 1$, за функцијата

$$h(t)=\inf\{\varphi(\|x+ty\|)+\varphi(\|x-ty\|)-2,\ \|x\|=\|y\|=1\}$$

важи $h(t)>0$, за секој $t\in(0,1]$.

Доказ. Прво ќе докажеме дека условот е потребен. Нека L е рамномерно конвексен и φ е функција како погоре. Треба да докажеме дека $h(t)>0$, за секој $t\in(0,1]$. Нека претпоставиме дека тоа не е точно и дека за некој $t_0\in(0,1]$ важи $h(t_0)=0$. Од дефиницијата на функцијата $h(t)$ следува дека постојат низи $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такви што $\|x_n\|=\|y_n\|=1$ и

$$\lim_{n\to\infty}(\varphi(\|x_n+t_0y_n\|)+\varphi(\|x_n-t_0y_n\|)=2. \tag{23}$$

Но, по претпоставка функцијата φ е конвексна и строго растечка со $\varphi(1)=1$, па затоа имаме

$$2\le 2\varphi\left(\frac{\|x_n+t_0y_n\|+\|x_n-t_0y_n\|}{2}\right)\le\varphi(\|x_n+t_0y_n\|)+\varphi(\|x_n-t_0y_n\|)\to 2,\ n\to\infty,$$

односно

$$1\le\varphi\left(\frac{\|x_n+t_0y_n\|+\|x_n-t_0y_n\|}{2}\right)\to 1,\ n\to\infty. \tag{24}$$

Понатаму, од строгата конвексност на φ следува дека

$$\lim_{n\to\infty}|\|x_n+t_0y_n\|-\|x_n-t_0y_n\||=0. \tag{25}$$

Сега, од својствата на φ следува дека постои инверзната функција φ^{-1}, која е непрекината, строго растечка и $\varphi^{-1}(1)=1$. Затоа од (24) следува

$$\lim_{n\to\infty}(\|x_n+t_0y_n\|+\|x_n-t_0y_n\|)=2. \tag{26}$$

Понатаму, од (25) и (26) следува

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n+t_0y_n\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n-t_0y_n\|=1,$$
$$\lim_{n\to\infty}\|x_n+t_0y_n+(x_n-t_0y_n)\|=\lim_{n\to\infty}2\|x_n\|=2$$

и како $(L,\|\cdot|)$ е рамномерно конвексен од теоремата 4.6 добиваме

$$2t_0=\lim_{n\to\infty}2t_0\|y_n\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n+t_0y_n-(x_n-t_0y_n)\|=0,$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува $h(t)>0$, за секој $t\in(0,1]$.

Обратно, нека претпоставиме дека L го има својството од теоремата. Ќе докажеме дека просторот L е рамномерно конвексен. За секои фиксирани $x,y\in L$, $\|x\|=\|y\|=1$, функцијата $f_{x,y}(t)=\varphi(\|x+ty\|)+\varphi(\|x-ty\|)-2$ е конвексна и неопаѓачка, со $f_{x,y}(t)\geq 0$, $f_{x,y}(0)=0$. Бидејќи $h(t)=\inf\limits_{x,y} f_{x,y}(t)$ добиваме дека $h(t)$ е позитивна и неопаѓачка на $[0,1]$, и за секои $x,y\in L$ такви што $\|x\|\geq\|y\|, x\neq 0$ и исполнето следново неравенство

$$\varphi(\tfrac{\|x+y\|}{\|x\|})+\varphi(\tfrac{\|x-y\|}{\|x\|})-2\geq h(\tfrac{\|y\|}{\|x\|}).$$

Значи, за секои u,v такви што $\|u\|=\|v\|=1$ и $\|u-v\|\leq\|u+v\|$ важи

$$2\varphi(\tfrac{2}{\|u+v\|})-2\geq h(\tfrac{\|u-v\|}{\|u+v\|})\geq h(\tfrac{\|u-v\|}{2}).$$

Нека $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ се две низи во L такви што $\|x_n\|=\|y_n\|=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека за доволно големи вредности на n важи $\|x_n-y_n\|\leq\|x_n+y_n\|$. Од непрекинатоста на φ во $t=1$ добиваме $\lim\limits_{n\to\infty} h(\|x_n-y_n\|)=0$, од што следува $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$, што според теоремата 4.5 значи дека просторот L е рамномерно конвексен. ■

5. ЗАКЛУЧОК

Изучувањето на строгата конвексност и рамномерната конвексност е од особено значење за осознавањето на геометриската структура на нормираните простори. Покрај тоа, строгата конвесност е поврзана со дуалниот простор, единствеоста на Хан-Банаховото проширување и строгата конвексност на дуалниот простор (теоремата на Тејлор-Фугел), како и со екстремалните точки на единичната свера. Претходно кажаното е доволна причина за изучувањето на строго конвексните нормирани простори. Но, овде уште ќе споменеме дека овие

простори се посебно интересни при проучувањето на најдобрата апроксимација, за што повеќе може да се види во [3] и [7].

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 40, (1936): 396-414

[2] J. Diestel, *Geometry of Banach space – Selected Topics*, Springer-Verlag, Berlin-Neidelberg-New York, 1975

[3] I. V. Istrăţescu, *Strict convexity and complex strict convexity (theory and applications)*, Marcel Dekker, New York – Basel, 1984

[4] O. Hanner, *On the uniform convexity of* L^p *and* l^p, Ark. Mat. 3(3), (1956): 239-244

[5] Riesz, F., Sz.-Nagy, B., *Functional Analysis*, Dover Publications, Inc., New York, 1990

[6] L. Maligranda, *Simple norm inequalities*. Amer. Math. Montly, 113 (2006): 113:256-260

[7] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza*, Školska knjga, Zagreb, 1981

[1] Професор во пензија
Бул. АСНОМ, 160/I-16, Скопје, Р. Северна Македонија
e-mail: risto.malceski@gmail.com

[2] Меѓународен славјански универзитет
Св. Николе, Р. Северна Македонија
e-mail: samoil.malcheski@gmail.com

Примен: 25.04.2023

Поправен: 19.12.2024

Одобрен: 31.12.2024

Објавен на интернет: 12.3.2025