Републички натпревар 1979

I година

1. Да се пресмета вредноста на изразот

$$A=\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)},$$

ако $abc=1$ и $a\neq b\neq c\neq a$.

Решение. Имаме

$$A=\frac{bc(b-c)-ac(a-c)+ab(a-b)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{b^2c-bc^2-a^2c+ac^2+a^2b-ab^2}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{b^2(c-a)-b(c^2-a^2)+ac(c-a)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(c-a)[b^2-b(c+a)+ac]}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{(c-a)(b^2-bc-ba+ac)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(c-a)[b(b-c)-a(b-c)]}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{(c-a)(b-c)(b-a)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{1}{abc}=1.$$

2. Да се докаже дека производот од три последователни непарни природни броеви е делив со 3.

Решение. Треба да се докаже дека бројот $(2n-1)(2n+1)(2n+3)$ е делив со 3. Природниот број n е или од облик $3k$, или од облик $3k+1$ или од облик $3k+2$.

Ако $n=3k$, тогаш $(2n-1)(2n+1)(2n+3)=3(6k-1)(6k+1)(2k+1)$.

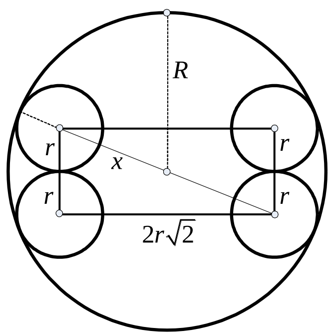
Ако $n=3k+1$, тогаш $(2n-1)(2n+1)(2n+3)=3(6k+1)(2k+1)(6k+5)$.

Ако $n=3k+2$, тогаш $(2n-1)(2n+1)(2n+3)=3(2k+1)(6k+5)(6k+7)$.

Значи, во секој случај $(2n-1)(2n+1)(2n+3)$ е делив со 3.

3. Во сфера T со радиус R, впишани се осум сфери со еднакви радиуси r, така што центрите на впишаните сфери се темиња на една коцка и секоја од впишаните сфери ја допира сферата T и три од впишаните сфери. Да се најде радиусот r на впишаните сфери.

Решение. Ако се направи пресек на сферата и коцката по просторната дијагонала на коцката, ќе се добие слика како на цртежот. Притоа со x е означена половината од просторната дијагонала на коцката, работ на коцката е $2r$, а просторната дијагонала на коцката е еднаква на $2r\sqrt{3}$. Од сликата се гледа дека $R=r+x$, т.е. $R=r\sqrt{3}+r$, од каде што се добива дека $r=\frac{R}{1+\sqrt{3}}$.



4. Секоја од буквите од збирот

$$\begin{array}{rccccc} & F & O & R & T & Y \\ & & & T & E & N \\ + & & & T & E & N \\ \hline & S & I & X & T & Y \end{array}$$

да се замени со една од цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5,6, 7, 8, 9 така што исти букви букви се означени со исти цифри, а различни букви се означени со различни цифри, и собирањето да биде точно.

Решение. Бидејќи $Y+N+N$ е број чија цифра на единиците е Y, $2N$ треба да биде број чија цифра на единиците е 0. Тоа е можно за $N=0$ или $N=5$. Ако $N=5$, тогаш кај збирот на десетиците ќе треба $E+E+1$ да биде број чија цифра на единиците е 0, што не е можно. Според тоа, добиваме $N=0$ и $E=5$. Да го разгледаме сега збирот на цифрите на стотките, $R+2T+1$. Тој збир е помал од 30, бидејќи неговата најголема вредност е 27, а имено за $R=8$ и $T=9$. Според тоа, го имаме равенството

$$R+2T+1=10x+X\,,$$

каде што $x=0,1$ или 2. Да го разгледаме секој случај посебно.

1. Ако $x=0$, тогаш имаме $R+2T+1=X$, што значи дека не додаваме цифра кај иљадниците, па би добиле дека O и I се заменети со исти цифри. Значи, $x=0$ не е можно.

2. Ако $x=1$ тогаш имаме $R+2T+1=10+X$, што значи дека кај илјадите додаваме цифра 1. Добиваме дека I е цифра на единиците за бројот $O+1$. Во овој случај не е можно $O\leq 8$ бидејќи треба да додадеме цифра кај десетилјаите за F и S да бидат различни цифри. Според тоа, $O=9$ и би добиле $I=O$ што не е можно бидејќи $N=0$. Значи, случајот $x=1$ не е можен.

3. Останува дека е точно $x=2$. Тогаш $R+2T+1=20+X$, т.е. кај илјадите додаваме цифра 2. Сега, не е можно $O\leq 7$ и $O=8$ бидејќи во првиот случај не би имал да додадеме цифра кај десетилјадите, а во вториот би добиле $I=O$. Според тоа, добиваме: $O=9$, $I=1$ и $S=F+1$. Понатаму $R+2T+1$ треба да биде број меѓу 20 и 27 што е можно ако R и T имаат вредности 6, 7 или 8.

Значи, ги имаме следните можности: $R=6$ и $T=7$; $R=7$ и $T=8$; $R=8$ и $T=6$ или $R=8$ и $T=7$. Втората и четвртата можност ги исклучуваме бидејќи би добиле $X=1$ што не е можно. Првата и третата можност ги исклучуваме бидејќи би добиле $X=3$, па за F,S и Y остануваат цифрите 2, 4 и 6 што не е можно, зошто F и S треба да се последователни броеви. Според тоа, добиваме $R=7,T=8$ и, на крајот, $F=2,S=3$, $Y=6$. Значи, решението на ребусот е

$$29786+850+850=31486$$

II година

1. Ако $\alpha=\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$, да се докаже дека $\alpha^2+\alpha+1=0$ и $\alpha^3=1$. Потоа да се одреди реалниот и имагинарниот дел на бројот $\frac{a\alpha^2+b}{a+b\alpha}$, каде што a и b се реални броеви.

Решение. Решенијата на квадратната равенка $x^2+x+1=0$ се броевите $\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$, што значи дека $\alpha^2+\alpha+1=0$. Така

$$\alpha^3=(\tfrac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3}))^3=\tfrac{1}{8}[-1\pm 3i\sqrt{3}+3(-1)i^2\cdot 3\pm i^3(\sqrt{3})^3]=\tfrac{1}{8}(-1\pm 3i\sqrt{3}+9\mp 3i\sqrt{3})=1,$$

$$\frac{a\alpha^2+b}{a+b\alpha}=\frac{a\alpha^2+b}{a+b\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\alpha}=\frac{a+b\alpha}{(a+b\alpha)\alpha}=\frac{1}{\alpha}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

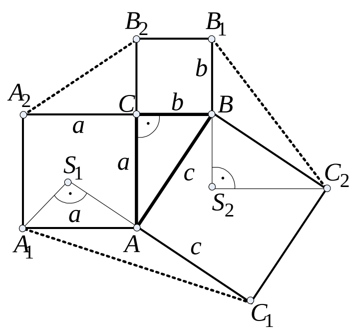
(треба да забележиме дека именителот на дропката $\frac{a\alpha^2+b}{a+b\alpha}$ мора да биде различен од нула, што ќе биде исполнето ако $a^2+b^2\neq 0$).

2. Над страните на еден правоаголен триаголник со катети a и b, конструирани се квадрати и потоа соседните слободни темиња на квадратите се поврзани со отсечки. Да се најде плоштината на добиениот шестаголник.

Решение. Од цртежот се гледа дека

$$P_{A_1A_2B_2B_1C_2C_1}=P_{A_2CB_2}+P_{BC_2B_1}+P_{A_1AC_1}+a^2+b^2+c^2+\frac{ab}{2}$$

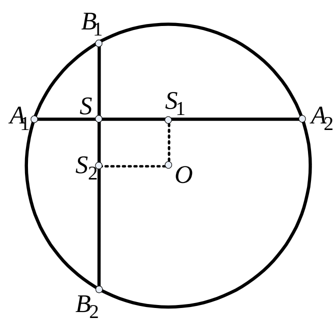
$$P_{A_2CB_2}=\frac{ab}{2},\qquad P_{BC_2B_1}=\frac{1}{2}b\overline{S_2C_2}.$$



Бидејќи $\triangle BC_2S_2\cong\triangle ABC$ (имаат по една страна еднаква, двата се правоаголни и $\measuredangle S_2BC_2=\measuredangle CBA$ како агли со заемно нормални краци), следува дека $\overline{S_2C_2}=a$. Значи, $P_{BC_2B_1}=\frac{ab}{2}$. Слично се добива дека $P_{A_1AC_1}=\frac{ab}{2}$, па бараната плоштина ќе биде $2(a^2+b^2+ab)$.

3. Тетивите A_1A_2 и B_1B_2 од кружницата $k(O,r)$ се заемно нормални. Ако $S=A_1A_2\cap B_1B_2$, да се докаже дека

$$\overrightarrow{SA_1}+\overrightarrow{SA_2}+\overrightarrow{SB_1}+\overrightarrow{SB_2}=2\overrightarrow{SO}.$$



Решение. Ако S_1 е средината на тетивата A_1A_2, S_2 е средината на тетивата B_1B_2 (види цртеж), ќе имаме

$$\overrightarrow{SO}=\overrightarrow{SS_1}+\overrightarrow{SS_2}\,, \tag{1}$$

$$\overrightarrow{SS_1}=\overrightarrow{SA_1}+\overrightarrow{A_1S_1}=\overrightarrow{SA_1}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{SA_1}+\tfrac{1}{2}(-\overrightarrow{SA_1}+\overrightarrow{SA_2})=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{SA_1}+\overrightarrow{SA_2})$$

Слично се добива равенството

$$\overrightarrow{SS_2}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{SB_1}+\overrightarrow{SB_2}).$$

Ако најдените равенства ги замениме во равенството (1) ќе го добиеме бараното равенство.

4. При множење на два позитивни броеви од кои едниот е за 9 поголем од другиот, ученикот направил грешка ставајќи на местото на десетките број, за три помал од точниот. При делењето на тој број со помалиот множител ученикот добил количник 42 и остаток 4. Кои броеви ги множел ученикот?

Решение. Нека помалиот множител е x, а бројот што го добил ученикот е y. Тогаш условите од задачата даваат:

$$\begin{aligned} &x(x+9)=y+30\\ &y=42x+4 \end{aligned}$$

Решавајќи го системот по x се добива $x_1=34$ и $x_2=-1$. Значи, броевите се 34 и 43.

III година

1. Да се определи за кои ϕ важи неравенството $1+\operatorname{ctg}\phi\le\operatorname{ctg}\frac{\phi}{2}$.

Решение. Бидејќи $\operatorname{ctg}\phi=\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\phi}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{\phi}{2}}$, дадената неравенка добива облик

$$1+\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\phi}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{\phi}{2}}\le\operatorname{ctg}\frac{\phi}{2}. \tag{1}$$

Ако $\operatorname{ctg}\frac{\phi}{2}>0$, од горната неравенка се добива неравенката

$$2\operatorname{ctg}\frac{\phi}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{\phi}{2}-1\le 2\operatorname{ctg}^2\frac{\phi}{2},$$

т.е. неравенката

$$(\operatorname{ctg}\frac{\phi}{2}-1)^2\ge 0$$

која важи за секој ϕ.

Ако $\operatorname{ctg}\frac{\phi}{2}<0$, од неравенката (1) се добива неравенка

$$(\operatorname{ctg}\frac{\phi}{2}-1)^2\le 0,$$

којашто важи само за оние ϕ за кои $\operatorname{ctg}\frac{\phi}{2}=1$, но за тие ϕ не важи $\operatorname{ctg}\frac{\phi}{2}<0$.

Според тоа, решенијата на дадената неравенка се оние ϕ за кои $\mathrm{ctg}\frac{\phi}{2} > 0$, т.е.

$$2k\pi < \phi < \pi + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

2. Два круга со радиуси R и r се допираат во точката M. На кругот со радиус r е дадена точка N, дијаметрално спротивна на M и во таа точка е повлечена тангента. Да се најде радиусот на кругот којшто ги допира двата круга и тангентата што минува низ точката N.

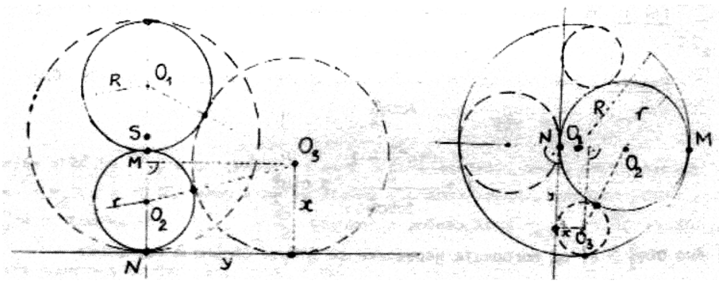
Решение. I *случај*. Кружниците се допираат однадвор. Имаме:

$$(R + 2r - x)^2 + y^2 = (R + x)^2$$

$$(x - r)^2 + y^2 = (r + x)^2,$$

од каде што, со елиминација на y, се добива $x = \frac{r(R+r)}{R}$.

Другата кружница која ги допира двете дадени кружници и тангентата има центар во точката S и радиус $\frac{R+r}{2}$.



II *случај*. Кружинците се допираат одвнатре. (Во овој случај може да се претпостави дека $R > r$).

Лесно се гледа дека има три такви кружници. Едната од нив има центар во точката P и радиус $x = \frac{R-r}{2}$, а другите две се симетрични меѓу себе. Нивните радиуси се добиваат од следните равенки

$$(r - x)^2 + y^2 = (r + x)^2$$

$$(R - 2r - x)^2 + y^2 = (R - x)^2,$$

од каде што добиваме дека $x = \frac{r(R-r)}{R}$.

3. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x^y &= y^x \\ a^x &= b^y \end{cases},$$

$a \neq 1$, $b \neq 1$. Да се изврши дискусија.

Решение. Можните решенија на системот можат да бидат само $x>0$ и $y>0$. Од тоа и од втората равенка следува дека $a>1$ и $b>1$, или $0<b<1$ и $0<a<1$. Ако е $0<a<1$ и $b>1$ или $0<b<1$ и $a>1$, тогаш системот нема решение.

Затоа, нека $a>1$ и $b>1$ (или $0<b<1$ и $0<a<1$). Логаритмирајќи ги дадените равенки по произволна основа, добиваме систем равенки, еквивалентен на дадениот:

$$y\log x = x\log y,$$
$$x\log a = y\log b.$$

Множејќи ги левите и десните страни на добиениот систем и кратејќи со $xy>0$, го добиваме системот

$$\log a\cdot\log x = \log b\cdot\log y$$
$$x\log a = y\log b$$

којшто, исто така, е еквивалентен на дадениот систем. Од првата равенка на последниот систем наоѓаме, дека

$$x = y^{\frac{\log b}{\log a}},$$

па заменувајќи во втората равенка:

$$y^{\frac{\log b-\log a}{\log a}} = \frac{\log b}{\log a}.$$

Од тоа, ако $\log b-\log a\neq 0$, имаме

$$y=(\frac{\log b}{\log a})^{\frac{\log a}{\log b-\log a}},\ x=(\frac{\log b}{\log a})^{\frac{\log b}{\log b-\log a}}.$$

Ако, пак, $\log b-\log a=0$, тогаш $a=b$ и од второто равенство добиваме $x=y$. Во тој случај ниситемот е задоволен од произволен пар броеви x и y еднакви меѓу себе.

4. Ако p и q се непарни броеви, да се докаже дека равенката

$$x^2+px+q=0$$

нема рационални корени.

Решение. За да една квадратна равенка има рационални корени, треба нејзината дискриминанта да биде квадрат на некој цел број, па ако претпоставиме дека дадената квадратна равенка има рационални корени, треба $p^2-4q=a^2$ за некој цел број a. Бидејќи p и q се непарни броеви и бројот p^2-4q е непарен (како разлика од непарен и парен број), следува дека и a^2 е непарен број, па и a е непарен број. Значи, треба да провериме дали равенката $p^2-4q=(2k+1)^2$ може да важи за $p=2m+1$, $q=2n+1$ и k цел број. Имаме:

$$(2m+1)^2-4(2n+1)=(2k+1)^2$$

$$4m^2+4m+1-8n-4=4k^2+4k+1$$
$$m(m+1)-(2n+1)=k(k+1)$$

Бројот $k(k+1)$ е парен како производ на два последователни цели броеви, бројот $m(m+1)-(2n+1)$ е непарен како разлика на еден парен и еден непарен број, па добиваме дека последната равенка не може да важи, односно дека дадената квадратна равенка нема рационални корени.

IV година

1. Да се докаже дека во таблицата

1									
2	3								
3	4	5	6	7					
4	5	6	7	8	9	10			
.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

збирот на сите членови во секоја редица е еднаков на квадратот на средниот број.

Решение. Да забележиме дека n-тата редица во горната таблица има облик

$$n \quad n+1 \quad n+2 \quad ... \quad 2n-1 \quad ... \quad 3n-2\,.$$

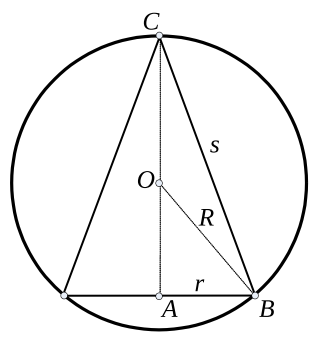
Членовите на ова редица формираат аритметичка низа и ако S е збирот од сите тие членови (ги има $2n-1$) добиваме

$$S=\tfrac{2n-1}{2}(n+3n-1)=(2n-1)^2\,,$$

што и требаше да се докаже.

2. Да се најде висината на конусот со најголема бочна плоштина, којшто може да се впише во топка со радиус R.

Решение. Да ја означиме висината на конусот со x. Плоштината на бочната површина на конусот е $y=rs\pi$ (види цртеж). Од триаголникот OAB имаме



$$\overline{OA}=x-R$$
$$r^2=R^2-(x-R)^2=2Rx-x^2\,.$$

Од триаголникот ABC имаме

$$s^2=x^2+r^2=x^2+2Rx-x^2=2Rx$$

од каде што добиваме

$$y=\pi\sqrt{4R^2x^2-2Rx^3}\,.$$

Максимумот на ова функција го бараме преку нејзиниот прв извод:

$$y' = \frac{8R^2x - 6Rx^2}{2\sqrt{4R^2x^2 - 2Rx^3}}\pi$$

$$y' = 0 \;\Rightarrow\; 8R^2x - 6Rx^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \text{ или } x = \frac{8R^2}{6R} = \frac{4R}{3},$$

($x=0$ не е решение на задачата);

$$y'(R) = \pi\frac{R}{\sqrt{2}},\; y'(\tfrac{3R}{2}) = -\pi\frac{R}{2};$$

Според тоа, првиот извод на функцијата лево од точката $x = \frac{4}{3}R$ е позитивен, а десно од таа точка е негативен, што значи во таа точка функцијата има максимум.

3. Ако p е прост број и m е цел број, да се докаже дека $m^p - m$ е делив со p.

Решение. Ќе ја искористиме биномната формула и математичката индукција. За $m=1$ тврдењето важи, бидејќи $1^p - 1 = 0$ е делив со секој број. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за $m=n$. Тогаш за $m=n+1$ ќе имаме:

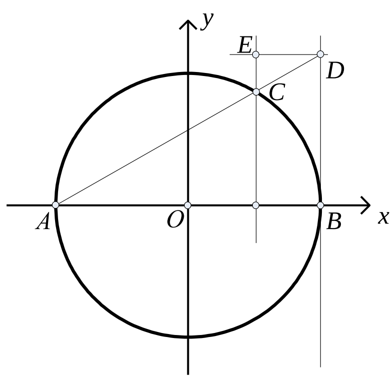
$$(n+1)^p - (n+1) = n^p + \binom{p}{1}n^{p-1} + \binom{p}{2}n^{p-2} + \ldots + \binom{p}{p-1}n - n$$

$$= n^p - n + \binom{p}{1}n^{p-1} + \binom{p}{2}n^{p-2} + \ldots + \binom{p}{p-2}n^2 + pn.$$

Изразите $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p[(p-1)!]}{k!(p-k)!}$, за $k = 1, 2, 3, \ldots, p-2$ се деливи со p бидејќи p е прост број. Заради индуктивната претпоставка, добиваме дека и $(n+1)^p - (n+1)$ е делив со p.

4. Дадена е кружница со радиус r и еден негов дијаметар AB. Во точката B е повлечена тангента на кружницата и низ точката A една права, која ја сече кружницата во точката C, а тангентата во точката D. Низ C е повлечена права паралелна со тангентата BD, а низ D права паралелна со дијаметарот AB. Тие две прави се сечат во точката E. Да се одреди геометриското место на точката E, ако тетивата AC ротира околу A.

Решение. Да избереме координатен систем така што равенката на кружницата да биде $x^2 + y^2 = r^2$. Дијаметарот AB го избираме да лежи на Ox-оската (види цртеж) Тогаш равенката на тангентата е $x = r$, а равенката на тетивата AC е $y = k(x+r)$. Точката C ќе има координати



$$x_C = r\frac{1-k^2}{1+k^2}, \qquad y_C = \frac{2rk}{1+k^2},$$

а точката D ќе има координати $x_D = r$, $y_D = 2rk$. Равенката на правата DE ќе биде

$$y = 2rk\,, \tag{1}$$

а равенката на правата CE ќе биде

$$x = r\,\frac{(1-k)^2}{1+k^2} \tag{2}$$

Ако од (1) и (2) го елиминираме параметарот k, ќе добиеме

$$y^2 = 4r^2\,\frac{r-x}{r+x}\,,$$

и тоа е равенка на бараното геометриско место.