ЈБМО 2015

1. Определи ги сите прости броеви a, b, c и природни броеви k кои што ја задоволуваат равенката
$$a^2+b^2+16c^2=9k^2+1.$$

Решение. Од $9k^2+1\equiv 1(\text{mod}3)$ следува
$$a^2+b^2+16c^2\equiv 1(\text{mod}3)\text{, т.е. } a^2+b^2+c^2\equiv 1(\text{mod}3).$$

Бидејќи $a^2\equiv 0,\ 1(\text{mod}3)$, $b^2\equiv 0,\ 1(\text{mod}3)$ и $c^2\equiv 0,\ 1(\text{mod}3)$, добиваме

a^2	0	0	0	0	1	1	1	1
b^2	0	0	1	1	0	0	1	1
c^2	0	1	0	1	0	1	0	1
$a^2+b^2+c^2$	0	1	1	2	1	2	2	0

Од претходната табела следува дека два од трите прости броеви треба да се еднакви на 3.

Прв случај. $a=b=3$. Добиваме
$$a^2+b^2+16c^2=9k^2+1 \quad\Leftrightarrow\quad 9k^2-16c^2=17 \quad\Leftrightarrow$$
$$(3k-4c)(3k+4c)=17 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}3k-4c=1\\3k+4c=17\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}c=2,\\k=3,\end{cases}$$
па едно решение на задачата е $(a,b,c,k)=(3,3,2,3)$.

Втор случај. $c=3$. Јасно, ако $(3,b,3,k)$ е решение на задачата, тогаш и $(b,3,3,k)$ е решение на задачата. Нека $a=3$. Имаме
$$a^2+b^2+16c^2=9k^2+1 \quad\Leftrightarrow$$
$$9k^2-b^2=153 \quad\Leftrightarrow$$
$$(3k-b)(3k+b)=152.$$

Бидејќи броевите $3k-b$ и $3k+b$ се со иста парност, од последната равенка добиваме
$$\begin{cases}3k-b=2\\3k+b=76\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}b=37,\\k=13,\end{cases}$$
и решение е $(a,b,c,k)=(3,37,3,13)$, односно

$$\begin{cases} 3k-b=4 \\ 3k+b=38 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b=17, \\ k=7, \end{cases}$$

и решение е $(a,b,c,k)=(3,17,3,7)$.

Конечно, дадената равенка има пет решенија и тоа:

$$(3,3,2,3),\ (3,37,3,13),\ (37,3,3,13),\ (3,17,3,7),\ (17,3,3,7).$$

2. Нека a, b, c се позитивни реални броеви, такви што $a+b+c=3$. Определи ја најмалата (минимална) вредност што може да ја има изразот

$$A=\frac{2-a^3}{a}+\frac{2-b^3}{b}+\frac{2-c^3}{c}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} A&=\frac{2-a^3}{a}+\frac{2-b^3}{b}+\frac{2-c^3}{c}=2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})-(a^2+b^2+c^2) \\ &=\frac{2(ab+bc+ca)}{abc}-(a+b+c)^2+2(ab+bc+ca) \\ &=2(ab+bc+ca)(\frac{1}{abc}+1)-9. \end{aligned}$$

Понатаму, ако во добро познатото равенство

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$$

ставиме $x=ab, y=bc, z=ca$ и искористиме дека $a+b+c=3$, добиваме:

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)=9abc,$$

т.е.

$$ab+bc+ca \geq 3\sqrt{abc}. \qquad (1)$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{1}{abc}+1 \geq 2\frac{1}{\sqrt{abc}}. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) добиваме

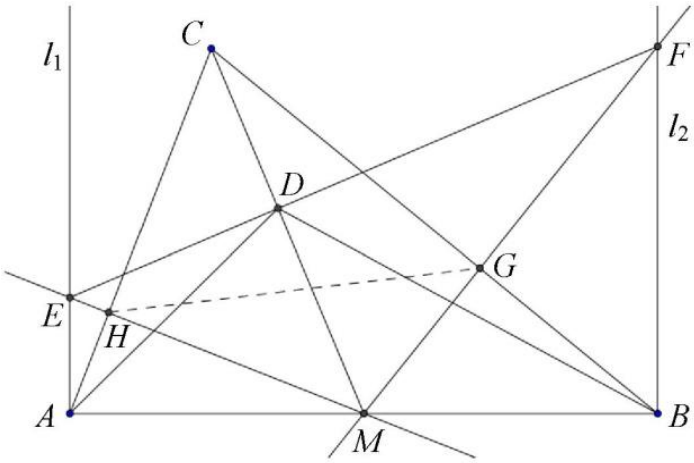
$$A=2(ab+bc+ca)(\frac{1}{abc}+1)-9 \geq 2\cdot 3\sqrt{abc}\cdot 2\frac{1}{\sqrt{abc}}-9=3$$

т.е. најмалата можна вредност на A е 3 која се достигнува за

$$a=b=c=1.$$

3. Нека ABC е остроаголен триаголник. Правите l_1 и l_2 се нормали на AB во точките A и B, соодветно. Нека точката M е средина на отсечката AB. Нормалите повлечени од точката M на правите AC и BC ги сечат l_1 и l_2 во точките E и F, соодветно. Ако D е пресек на правите EF и MC, докажи дека $\measuredangle ADB=\measuredangle EMF$.

Решение. Нека F, G се пресечните точки на ME, MF со AC, BC соодветно. Од сличноста на $\triangle MHA$ и $\triangle MAE$ следува $\frac{\overline{MH}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{ME}}$, односно



$$\overline{MA}^2 = \overline{MH} \cdot \overline{ME}. \tag{1}$$

Од сличноста на $\triangle MBG$ и $\triangle MFB$ следува $\frac{\overline{MB}}{\overline{MF}} = \frac{\overline{MG}}{\overline{MB}}$, односно

$$\overline{MB}^2 = \overline{MF} \cdot \overline{MG}. \tag{2}$$

Но, $\overline{MA} = \overline{MB}$, па затоа од (1) и (2) добиваме $\overline{MH} \cdot \overline{ME} = \overline{MF} \cdot \overline{MG}$, што значи дека точките E, H, G, F лежат на една кружница. Затоа важи

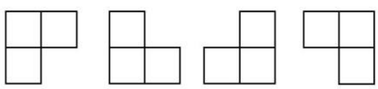
$$\measuredangle FEH = \measuredangle FEM = \measuredangle HGM .$$

Исто така четириаголникот $CHMG$ е тетивен, па важи $\measuredangle CMH = \measuredangle HGC$. Според тоа,

$$\measuredangle FEH + \measuredangle CMH = \measuredangle HGM + \measuredangle HGC = 90^\circ ,$$

па затоа $CM \perp EF$. Сега, од тетивноста на четириаголниците $FDMB$ и $EAMD$ следува $\measuredangle DFM = \measuredangle DBM$ и $\measuredangle DEM = \measuredangle DAM$. Затоа $\triangle EMF$ е сличен со $\triangle ADB$, од што следува $\measuredangle ADB = \measuredangle EMF$.

4. L-тримино е фигура која може да има еден од четирите облици прикажани на цртежот (секој од нив се состои од 3 единечни квадрати):



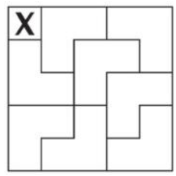
Дадена е табла 5×5, која се состои од 25 единични квадрати и неограничен број на L-тримина. Нека k е даден природен број, таков што $k \leq 25$.

Двајца играчи, A и B, ја играат следата игра: играта ја почнува играчот A и наизменично бојат (со иста боја) по еден единичен квадрат, кој што претходно не е обоен. Велиме дека играта е завршена, кога на таблата се обоени вкупно k единечни квадрати.

Велиме дека L-триминатa *добро* ги покриваат необоените единични квадрати на таблата ако тие не се преклопуваат и секое од нив покрива точно три необоени единични квадрати на таблата.

Играчот B победува ако секое *добро* прекривање со L-тримина остава непокриени најмалку три необоени единични квадрати. Најди ја најмалата можна вредност за k за која играчот B има победничка стратегија.

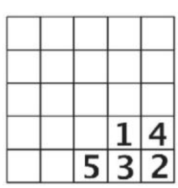
Решение. Ќе докажеме дека играчот A победува ако $k=1,2,3$, а играчот B победува за $k=4$. Според тоа, најмалиот k за кој играчот B победува постои и е еднаков на 4.



Ако $k=1$, тогаш играчот A го бои горниот лев агол на таблата и потоа таблата ја покрива како што е прикажано на цртежот десно.

Ако $k=2$, тогаш играчот A го бои горниот лев агол на таблата. Потоа без разлика кое поле ќе го обои играчот B, играчот A може да ја покрие таблата на истиот начин како во претходниот случај, со тоа што не поставува L-тримино кое го покрива полето кое го обоил играчот B. Јасно, играчот A победува бидејќи има две непокриени необоени полиња.

За $k=3$ играчот A ја следи истата стратегија. Кога играчот A треба да го обои второто поле, тој го бои едно од двете необоени полиња кои ги покрива L-триминото кое го покрива полето кое веќе го обоил играчот B.



Ќе докажеме дека за $k=4$ играчот B има победничка стратегија. Бидејќи има 21 необоено поле, играчот A мора сите да ги покрие со седум L-тримина. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека во првиот чекор играчот A не обоил ниту едно поле во долните два реда на таблата (во спротивно едноставно ќе ја ротираме таблата). Во првиот чекор играчот B го бои квадратот кој на цртежот десно е означен со 1. Ако играчот A во следниот чекот не обои ниту еден од квадратите означени со 2, 3 и 4, тогаш играчот B го бои квадратот 3. Јасно, играчот B победува бидејќи квадратот 2 останува необоен, но истиот не може да се покрие со L-тримино. Ако играчот A во следниот чекор го обои квадратот 2, тогаш играчот B го бои квадратот 5. Јасно, играчот B победува бидејќи квадратот 3 останува необоен, но истиот не може да се покрие со L-тримино. Конечно, ако во следниот чекор играчот A обои еден од квадратите 3 или 4, тогаш играчот B го бои другиот од овие два квадрати. Јасно, играчот B победува бидејќи квадратот 2 останува необоен, но истиот не може да се покрие со L-тримино.