Још један доказ Ојлерове неједнакости

др Шефкет Арсланагић, Сарајево, БИХ

У математичкој литератури у вези са неједнакостима запажену улогу игра геометријска Ојлерова неједнакост за троугао која гласи:

(1) $$R \geqslant 2r,$$

где су R и r радијуси описане и уписане кружнице троугла ABC.

Неколико разних доказа ове значајне неједнакости се могу наћи у [1], [2] и [3]. Она има велику примену код доказивања других неједнакости које се односе на троугао. У [3] и [4] је дато и неколико побољшања ове неједнакости:

(2) $$\frac{R}{r} \geqslant \frac{b}{c} + \frac{c}{b},$$

(3) $$\frac{R}{r} \geqslant \frac{2}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right),$$

(4) $$\frac{R}{r} \geqslant \frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca},$$

(5) $$\frac{R}{r} \geqslant \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4abc},$$

(6) $$\frac{R}{2r} \geqslant \frac{m_a}{h_a},$$

где су a, b, c дужине страница троугла ABC, а m_a и h_a су дужине тежишне дужи и висине тог троугла повучене из темена A. Важе и аналогне неједнакости неједнакостима (2) и (6) које гласе

$$\frac{R}{r} \geqslant \frac{a}{b} + \frac{b}{a}, \quad \frac{R}{r} \geqslant \frac{a}{c} + \frac{c}{a}, \quad \frac{R}{2r} \geqslant \frac{m_b}{h_b} \quad \text{и} \quad \frac{R}{2r} \geqslant \frac{m_c}{h_c}.$$

Сада ћемо дати још један интересантан доказ неједнакости (1). Најпре ћемо доказати једну лему.

Лема. Ако су a, b, c дужине страница троугла ABC, а P његова површина, тада важи неједнакост:

(7) $$(abc)^2 \geqslant \left(\frac{4P}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Доказ. Користећи познати образац $abc = 4RP$ и неједнакост 5.3 из [5] која гласи $a+b+c \leqslant 3R\sqrt{3}$, имамо:

(8) $$\frac{4P}{\sqrt{3}} = \frac{abc}{R\sqrt{3}} \leqslant \frac{3abc}{a+b+c} \leqslant (abc)^{\frac{2}{3}},$$

где смо користили неједнакост између аритметичке и геометријске средине за три позитивна броја:

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc},$$

односно,

(9) $$\frac{1}{a+b+c} \leqslant \frac{1}{3\sqrt[3]{abc}}.$$

Након кубирања неједнакости (8), добијамо неједнакост (7). У (7) важи једнакост ако и само ако је $a = b = c$ (једнакостранични троугао). □

Пређимо сада на доказ Ојлерове неједнакости (1).

Због познатих образаца

$$r = \frac{P}{s} = \frac{2P}{a+b+c} \quad \text{и} \quad R = \frac{abc}{4P},$$

добијамо:

(10) $$\frac{2r}{R} = \frac{16P^2}{(a+b+c)abc},$$

а одавде због (9) и (7):

$$\frac{2r}{R} \leqslant \frac{16P^2}{3(abc)^{\frac{4}{3}}} \leqslant \frac{16P^2}{3\left(\frac{4P}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1,$$

тј.

$$\frac{2r}{R} \leqslant 1,$$

односно $R \geqslant 2r$.

Наравно, важи једнакост у (1) ако и само ако је $a = b = c$ (једнакостранични троугао).

У овом чланку ћемо дати још једно побољшање Ојлерове неједнакости (1) за **оштроугли троугао** које гласи:

(11) $$\frac{r}{2R} \leqslant \frac{abc}{\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}.$$

Доказ. Најпре ћемо доказати следеће неједнакости:

(12) $$\sin\frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{a}{\sqrt{2(b^2+c^2)}},$$

(13) $$\sin\frac{\beta}{2} \leqslant \frac{b}{\sqrt{2(a^2+c^2)}},$$

$$\text{(14)}\qquad \sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{c}{\sqrt{2(a^2+b^2)}},$$

гђе су α, β и γ оштри углови троугла. Наравно, доказаћемо само неједнакост (12) јер су остале две (13) и (14) аналогне. Имамо

$$\text{(15)}\qquad \begin{aligned}\sin^2\frac{\alpha}{2}-\frac{a^2}{2(b^2+c^2)}&=\frac{1-\cos\alpha}{2}-\frac{a^2}{2(b^2+c^2)}\\&=\frac{1}{2}-\frac{b^2+c^2-a^2}{4bc}-\frac{a^2}{2(b^2+c^2)}\\&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2(b^2+c^2)}-\frac{b^2+c^2-a^2}{4bc}\\&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\left(\frac{1}{b^2+c^2}-\frac{1}{2bc}\right)\\&=\frac{-(b^2+c^2-a^2)(b-c)^2}{4bc(b^2+c^2)}.\end{aligned}$$

Како је $0<\alpha\leqslant 90^\circ$, то је $1>\cos\alpha\geqslant 0$, односно

$$1>\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\geqslant 0,$$

а одавде

$$\text{(16)}\qquad b^2+c^2-a^2\geqslant 0.$$

Сада из (15) и (16) следи:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}-\frac{a^2}{2(b^2+c^2)}\leqslant 0,$$

тј.

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}\leqslant\frac{a^2}{2(b^2+c^2)},$$

односно

$$\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant\frac{a}{\sqrt{2(b^2+c^2)}},$$

а ово је (12). Једнакост у (12) важи ако и само ако је $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ и $b=c$ (једнакостранични троугао).

Након множења неједнакости (12), (13) и (14), добијамо

$$\text{(17)}\qquad \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{abc}{2\sqrt{2(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}}$$

Даље имамо

$$\text{(18)} \qquad \begin{aligned} \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ac}}\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}\right)^2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} \\ &= \frac{\frac{P^2}{s}}{4RP} = \frac{P}{4Rs} = \frac{rs}{4Rs} = \frac{r}{4R}. \end{aligned}$$

Најзад, добијамо из (17) и (18):

$$\frac{r}{4R} \leqslant \frac{abc}{2\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}},$$

тј.

$$\frac{r}{2R} \leqslant \frac{abc}{\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}},$$

а ово је неједнакост (11).

Једнакост у (11) важи ако и само ако је $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{3}$, тј. $a = b = c$ (једнакостранични троугао).

Доказаћемо сада да важи неједнакост:

$$\text{(19)} \qquad \frac{abc}{2\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}} \leqslant \frac{1}{4}.$$

Како је $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, $b^2+c^2 \geqslant 2bc$ и $c^2+a^2 \geqslant 2ac$, односно $\dfrac{1}{a^2+b^2} \leqslant \dfrac{1}{2ab}$, $\dfrac{1}{b^2+c^2} \leqslant \dfrac{1}{2bc}$ и $\dfrac{1}{c^2+a^2} \leqslant \dfrac{1}{2ac}$, то имамо:

$$\frac{abc}{\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}} \leqslant \frac{abc}{\sqrt{2\cdot 2ab\cdot 2bc\cdot 2ac}} = \frac{1}{4},$$

а ово је неједнакост (19). Сада из (11) и (19) иммао:

$$\frac{r}{2R} \leqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow R \geqslant 2r,$$

а ово је Ојлерова неједнакост. Зато можемо написати

$$\frac{r}{2R} \leqslant \frac{abc}{\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}} \leqslant \frac{1}{4},$$

што представља побољшање Ојлерове неједнакости за оштроугли троугао. Наравно, једнакост важи за једнакостранични троугао.

Литература

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

[3] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.

[4] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 2*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2010.

[5] O. Bottema and oth, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2012/13 година