Сојузен натпревар 1983

Седмо одделение

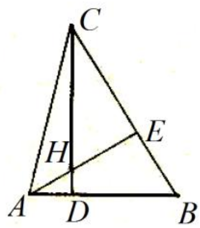
1. Во една година 1. јануари и 1. април паднале во четврток. Колку месеци во таа година имаат 5 петоци?
Решение. Од 1. јануари и 1. април има 91 или 90 денови, во зависност од тоа дали годината е престапна или не. За да 1. јануари и 1. април е четврток, бројот на деновите меѓу овие две дати мора да е делив со 7, а тоа е бројот 91. Значи, годината е престапна и има 366 денови. Затоа во оваа година има 52 седмици и 2 дена, што значи дека во неа има 53 петоци (бидејќи 2. јануари е во петок). Секој месец има 4 или 5 петоци. Ако со x го означиме бројот на месеците со 5 петоци, тогаш $12-x$ е бројот на петоците со 4 петоци, па затоа $5x+4(12-x)=53$, од каде добиваме $x=5$. Според тоа, во оваа година има 5 месеци со по 5 петоци.

2. Разликата на две дропки е $\frac{1}{5}$. Броителот на првата дропка е три пати поголем од броителот на втората дропка, а именителот на првата дропка е два пати поголем од именителот на втората дропка. Определи ги овие дропки.
Решение. Ако втората дропка е $\frac{a}{b}$, тогаш првата дропка е $\frac{3a}{2b}$. Според условот имаме $\frac{3a}{2b}-\frac{a}{b}=\frac{1}{5}$, па затоа $\frac{a}{b}=\frac{2}{5}$. Првата дропка е $\frac{6}{10}$.

3. Определи еден прост трицифрен број чиј производ на цифри е еднаков на 252.
Решение. Со разложување на прости множители на бројот 252 добиваме $252=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7$. Со комбинирање на множителите на бројот 252, добиваме дека цифрите на бараниот број се 4, 9, 7 или 6, 6, 7. Бараниот број е прост, па затоа тој е непарен, т.е може да е еден од броевите: 497, 947, 749, 479 и 667. Со проверка добиваме дека броевите 497 и 749 се деливи со 7, а бројот 667 е делив со 23. Прости броеви кои го задоволуваат условот на задачата се 947 и 479.

4. Висините CD и AE на триаголникот ABC се сечат во точката H и важи $d(A,B)=d(C,H)$. Определи го $\measuredangle ACB$.

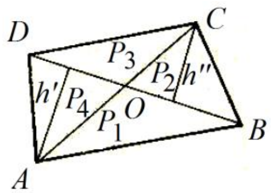
Решение. Аглите BAE и BCD (цртеж десно) се еднакви меѓу себе, како агли со нормални краци. Бидејќи $AB=CH$, добиваме дека правоаголните триаголници ABE и CHE се скалдни, па затоа $AE=CE$. Триаголникот ACE е правоаголен, а од $AE=CE$ следува дека тој е рамнокрак, што значи дека бараниот агол е еднаков на 45°.



5. Дијагоналите на конвексен четириаголник $ABCD$ се сечат во точката O и го делат четириаголникот на триаголниците OAB, OBC, OCD и ODA. Докажи дека производот на плоштините на триаголниците OAB и OCD е еднаков на производот на плоштините на триаголниците OBC и ODA.

Решение. Да ги означиме плоштините на наведените триаголници со P_1, P_2, P_3, P_4 (цртеж десно). Нека h' и h'' се нормалите од A и C на BD. Тогаш

$$P_1=\frac{BO\cdot h'}{2}, P_2=\frac{BO\cdot h''}{2}, P_3=\frac{DO\cdot h'}{2}, P_4=\frac{DO\cdot h''}{2}.$$



Сега имаме

$$P_1\cdot P_3=P_2\cdot P_4=\frac{BO\cdot DO\cdot h'\cdot h''}{4},$$

што и требаше да се докаже.

Осмо одделение

1. Ако a,b,c се три природни броеви, докажи дека $a^2+b^2+c^2$ при делење со 8 не може да даде остаток 7.

Решение. Секој природен број може да се запише во видот $4k$, $4k+1$, $4k+2$ или $4k+3$, каде k е природен број или 0. Во секој од овие случаи квадратот на бројот е:

$$16k^2=8\cdot 2k^2,\ 16c^2+8k+1=8(2k^2+k)+1,$$

$$16c^2+16k+4=8(2k^2+2k)+4, \text{ и}$$

$$16c^2+24k+9=8(2k^2+3k+1)+1.$$

Значи, квадрат на природен број при делење со 8 може да даде остаток 0, 1 или 4. Со собирање на било кои 3 остатоци од наведениот вид не може да се добие бројот 7. Затоа збирот $a^2+b^2+c^2$ при делење со 8 не може да даде остаток 7.

2. Во три кутии A,B,C се наоѓаат топчиња: во кутијата A има 2, во кутијата B има 3 и во кутијата C има 4 топчиња. Двајца играчи ја играат следнава игра: наизменично земаат од произволна кутија произволен број топчиња. Победува играчот по чиј потез сите кутии се празни. Како треба да игра првиот играч за сигурно да го победи својот противник?

Решение. Првиот играч треба од кутијата C да земе 3 топчиња, па потоа кутиите A,B,C ќе содржат 2, 3 и 1 топче, соодветно. Понатаму, како и да постапи вториот играч, првиот може по неговиот потез да остави една кутија празна, а во другите две да има еднаков број топчиња. Така сигурно ќе го победи вториот играч.

3. Определи го најмалиот природен број кој има својство да се намали 57 пати ако му ја избришеме првата цифра од лево.

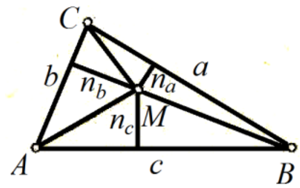
Решение. Со a да ја означиме првата цифра на бараниот број, а со b бројот кој го формираат преостанатите цифри. Тогаш $10^k a+b=57b$ каде k е природен број, односно $10^k a=56b$, т.е. $10^k a=7\cdot 8b$. Но, $\mathrm{NZD}(10,7)=1$, па затоа $7|a$ и како a е цифра добиваме $a=7$. Сега $10^k=8b$. Бројот 10^k треба да е делив со 8, па оттука $k\geq 3$, а бидејќи се бара најмалиот број добиваме $k=3$ и $b=125$. Конечно, бараниот број е 7125.

4. Нека ABC е произволен триаголник и M е произволна точка од неговата внатрешност. Должините на нормалите од точката M до страните BC,CA,AB да ги означиме со n_a,n_b,n_c, соодветно. Докажи дека

$$\frac{n_a}{h_a}+\frac{n_b}{h_b}+\frac{n_c}{h_c}=1, \qquad (1)$$

каде h_a,h_b,h_c се соодветните висини на триаголникот.

Решение. Отсечките MA,MB,MC го делат триаголникот на три триаголници со плоштини $\frac{1}{2}an_a,\frac{1}{2}bn_b,\frac{1}{2}cn_c$, па затоа



$$P=\frac{1}{2}an_a+\frac{1}{2}bn_b+\frac{1}{2}cn_c,$$

Односно

$$1=\frac{a}{2P}n_a+\frac{b}{2P}n_b+\frac{c}{2P}n_c. \tag{2}$$

Од друга страна

$$P=\frac{1}{2}ah_a, P=\frac{1}{2}bh_b, P=\frac{1}{2}ch_c,$$

па затоа $h_a=\frac{2P}{a}, h_b=\frac{2P}{b}, h_c=\frac{2P}{c}$. Сега, ако замениме во равенстото (2) го добиваме равенството (1).

5. Радиусите на круговите кои го формираат кружниот прстен прикажан на цртежот десно се r и $2r$

Определи го осносот на плоштините на осенчениот и неосенчениот дел од кружниот прстен.

Решение. Нека A,B,C се заедничките точки на поголемата кружница и тангентите t' и t'' (цртеж десно) и нека T е точката во која t' ја допира малата кружница. Бидејќи $OB=2OT$ заклучуваме дека $\measuredangle OBT=30^\circ$, па оттука следува $\measuredangle ABC=60^\circ$. Аналогно се докажува дека $\measuredangle BAC=\measuredangle BCA=60^\circ$. Според тоа, триаголникот ABC е рамностран, па затоа отсечоците во големиот круг се еднакви. Очигледно, осенчениот дел е еднаков на третина од целиот прстен, па затоа плоштините на осенчениот и неосенчениот дел се однесуваат како 1:2.