Самоил Малчески, Скопје

ЕНГЕЛОВ ПРИНЦИП НА МИНИМУМ

Во оваа статија ќе го разгледаме таканаречениот Енгелов принцип на минимум. Во нашите разгледувања ќе се задржиме на четири, односно шест позитивни броја. Општиот случај може да се види во книгата [2] од наведената литература.

Теорема 1 (Енгелов принцип на минимум). Нека a,b,x,y се позитивни релни броеви. Тогаш

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}, \tag{1}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}. \tag{2}$$

Доказ. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(a^2y+b^2x)(x+y)\geq(a+b)^2xy,$$

т.е. со неравенството $(ay-bx)^2\geq 0$, кое очигледно е исполнето. Знак за равенство важи ако и само ако $ay-bx=0$, т.е. ако и само ако важи (2). ■

Последица 1. Нека a,b,c,x,y,z се позитивни реални броеви. Тогаш

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}, \tag{3}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{y}{z}. \tag{4}$$

Доказ. Ако двапати последователно ја примениме теорема 1 добиваме

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{((a+b)+c)^2}{(x+y)+z}=\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z},$$

т.е. точно е неравенството (3). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако во двете неравенства важи знак за равенство, т.е. ако и само ако $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$ и $\frac{a+b}{x+y}=\frac{c}{z}$. Ако во второто равенство замениме $a=\frac{bx}{y}$, добиваме $\frac{\frac{bx}{y}+b}{x+y}=\frac{c}{z}$, т.е. $\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$, па затоа во (3) знак за равенство важи ако и само ако важи (4). ■

Последица 2 (неравенство меѓу аритметичката и квадратната средина). Ако a,b се позитивни реални броеви, тогаш

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ge \frac{a+b}{2}.$$

Доказ. Од Енгеловиот принцип на минимум, за $x=y=1$ последователно добиваме

$$\frac{a^2}{1}+\frac{b^2}{1} \ge \frac{(a+b)^2}{1+1},$$

$$a^2+b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2},$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} \ge (\frac{a+b}{2})^2$$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ge \frac{a+b}{2}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b$. ■

Забелешка 1. Користејќи ја последица 1, аналогно како во последица 2 може да се докаже дека за секои позитивни реални броеви a,b,c важи

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \ge \frac{a+b+c}{3}.$$

Задача 1. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a и b важи

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a} \ge a+b. \tag{5}$$

Решение. *Прв начин*. Од Енеловиот принцип на минимум следува

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a} \ge \frac{(a+b)^2}{b+a} = a+b.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$ и како $a,b>0$ добиваме дека знак за равенство важи ако и само ако $a=b$.

Втор начин. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина го добиваме неравенството

$$(\frac{a^2}{b}+b)+(\frac{b^2}{a}+a) \ge 2\sqrt{\frac{a^2}{b}\cdot b}+2\sqrt{\frac{b^2}{a}\cdot a} = 2a+2b,$$

кое е еквивалентно со неравенството (5). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\frac{a^2}{b}=b$, $\frac{b^2}{a}=a$, па како $a,b>0$ добиваме дека знак за равенство важи ако и само ако $a=b$,

Трет начин. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува неравенството

$$\begin{aligned}(a+b)(\tfrac{a^2}{b}+\tfrac{b^2}{a}) &= \tfrac{a^3}{b}+\tfrac{b^3}{a}+a^2+b^2\\ &\geq 2\sqrt{\tfrac{a^3}{b}\cdot\tfrac{b^3}{a}}+a^2+b^2\\ &= 2ab+a^2+b^2\\ &= (a+b)^2,\end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството (5). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b$.

Четврт начин. Од неравенството меѓу аритметичката и геометрсикста средина следува неравенството

$$\begin{aligned}a^3+b^3 &= (a+b)(a^2+b^2-ab)\\ &\geq (a+b)(2\sqrt{a^2b^2}-ab)\\ &= (a+b)(2ab-ab)\\ &= ab(a+b),\end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството (5). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a^2=b^2$ и како $a,b>0$ добиваме дека знак за равенство важи ако и само ако $a=b$. ■

Задача 2. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a и b важи

$$\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{a}\geq\tfrac{(a+b)^2}{2ab}\,. \qquad (6)$$

Решение. Во неравенството (1) ставаме $x=y=ab$ и го добиваме неравенството

$$\tfrac{a^2}{ab}+\tfrac{b^2}{ab}\geq\tfrac{(a+b)^2}{ab+ab},$$

кое е еквивалентно со неравенството (6). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\tfrac{a}{ab}=\tfrac{b}{ab}$, т.е.ако и само ако $a=b$. ■

Задача 3. Нека a,b се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$8(a^4+b^4)\geq(a+b)^4.$$

Решение. Прво од Енгеловиот принцип на минимум, а потоа од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$a^4+b^4=\tfrac{a^4}{1}+\tfrac{b^4}{1}\geq\tfrac{(a^2+b^2)^2}{2}\geq\tfrac{[\frac{(a+b)^2}{2}]^2}{2}=\tfrac{(a+b)^4}{8}\,.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b$. ■

Задача 4. Докажи дека за катетите a,b и хипотенузата c на правоаголниот триаголник важи неравенството

$$a^4+b^4\geq\tfrac{1}{2}c^4.$$

Решение. Од Енгеловиот принцип на минимум и Питагоровата теорема следува

$$a^4+b^4=\frac{(a^2)^2}{1}+\frac{(b^2)^2}{1}=\frac{(a^2+b^2)^2}{1+1}=\frac{(c^2)^2}{2}\geq\frac{1}{2}c^4.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b$, т.е. ако и само ако триаголникот е рамнокрак правоаголен. ■

Задача 5. Нека a,b се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a}{3b+a}+\frac{b}{3a+b}\geq\frac{1}{2}. \qquad (7)$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина

$$\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$$

следува дека секои позитивни реални броеви a,b важи $(a+b)^2\geq 4ab$, од каде добиваме $2(a+b)^2\geq 4ab+(a+b)^2$, т.е.

$$\frac{1}{4ab+(a+b)^2}\geq\frac{1}{2(a+b)^2}. \qquad (8)$$

Сега, последователно од Енгеловиот принцип на минимум и од неравенството (8) добиваме

$$\begin{aligned}\frac{a}{3b+a}+\frac{b}{3a+b}&=\frac{a^2}{a(3b+a)}+\frac{b^2}{b(3a+b)}\\&\geq\frac{(a+b)^2}{a^2+6ab+b^2}=\frac{(a+b)^2}{(a+b)^2+4ab}\\&=\frac{(a+b)^2}{2(a+b)^2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b$. ■

Забелешка 2. Неравенствата 1 и 3, односно нивното обопштувањае за позитивните реаалн броеви $a_i, i=1,2,...,n$ и $x_i, i=1,2,...,n$:

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+...+\frac{a_n^2}{x_n}\geq\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{x_1+x_2+...+x_n}$$

се среќава и под други имиња. Така во литературата тоа може да се сретне по името убаво неравенство или ангелски принцип на минимум.

Задачи за самостојна работа

1. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c важи неравенството
$$(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)\,.$$
2. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c важи неравенството
а) $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \ge a+b+c$, б) $\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b} \ge a+b+c$.
3. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c важи неравенството
а) $\frac{a}{2b+a}+\frac{b}{2c+b}+\frac{c}{2a+c} \ge 1$, б) $\frac{a}{2c+a}+\frac{b}{2a+b}+\frac{c}{2b+c} \ge 1$.

Литератуа

1. Гроздев, С. (2021). Две елементарни неравенства и нивна примена, https://matematickitalent.mk
2. Малчески, Р. (2019). Елементарни алгебарски и аналитички неравенства (второ издание), Армаганка, Скопје
3. Малчески, С. (2021). Неравенства меѓу средините и примена , https://matematickitalent.mk