Ристо Малчески
Скопје

НЕКОЛКУ НАЧИНИ ЗА ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА $\sin\frac{\pi}{10}$

Решавањето на повеќе начини на една иста задача претставува посебен предизвик, при што во многу случаи задачата може да се реши на крајно неочекуван начин. Во оваа статија ќе дадеме неколку начини за определување на вредноста на $\sin\frac{\pi}{10}$, т.е. на неколку начини ќе ја решиме следнава задача.

Задача. Пресметај $\sin\frac{\pi}{10}$.

Решение. *Прв начин.* Нека $\varphi=\frac{\pi}{10}$. Тогаш $3\varphi+2\varphi=\frac{\pi}{2}$, т.е. $2\varphi=\frac{\pi}{2}-3\varphi$, па затоа ако се искористи дека за секој $t\in\mathbb{R}$ важи $\sin(\frac{\pi}{2}-t)=\cos t$, добиваме

$$\sin 2\varphi=\sin(\tfrac{\pi}{2}-3\varphi),$$
$$\sin 2\varphi=\cos 3\varphi.$$

Понатаму, ако искористиме дека за секој $t\in\mathbb{R}$ важи

$$\sin 2t=2\sin t\cos t,$$
$$\cos 3t=4\cos^3 t-3\cos t,$$

со замена во $\sin 2\varphi=\cos 3\varphi$ последователно добиваме

$$2\sin\varphi\cos\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi,$$
$$2\sin\varphi\cos\varphi-4\cos^3\varphi+3\cos\varphi=0,$$
$$\cos\varphi(2\sin\varphi-4\cos^2\varphi+3)=0.$$

Но, $\cos\varphi\neq 0$, па од последното равенство добиваме

$$2\sin\varphi-4\cos^2\varphi+3=0$$

и како $\cos^2\varphi=1-\sin^2\varphi$ имаме

$$2\sin\varphi-4(1-\sin^2\varphi)+3=0,$$
$$2\sin\varphi-4+4\sin^2\varphi+3=0,$$
$$4\sin^2\varphi+2\sin\varphi-1=0.$$

Последното равенство значи дека $\sin\varphi$ е решение на квадратната равенка

$$4x^2+2x-1=0,$$

т.е. $\sin\varphi$ е еднаков на еден од корените $x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$ на оваа равенка. Но, $0<\sin\varphi$, па затоа $\sin\varphi=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, т.е. $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Втор начин. Нека $\varphi=\frac{\pi}{10}$. Тогаш $3\varphi+2\varphi=\frac{\pi}{2}$, т.е. $3\varphi=\frac{\pi}{2}-2\varphi$, па затоа ако се искористи дека за секој $t\in\mathbb{R}$ важи $\sin(\frac{\pi}{2}-t)=\cos t$, добиваме

$$\sin 3\varphi=\sin(\tfrac{\pi}{2}-2\varphi),$$
$$\sin 3\varphi=\cos 2\varphi.$$

Понатаму, ако искористиме дека за секој $t\in\mathbb{R}$ важи

$$\cos 2t=1-2\sin^2 t,$$
$$\sin 3t=3\sin t-4\sin^3 t,$$

со замена во $\sin 3\varphi=\cos 2\varphi$ последователно добиваме

$$3\sin\varphi-4\sin^3\varphi=1-2\sin^2\varphi,$$
$$4\sin^3\varphi-2\sin^2\varphi-3\sin\varphi+1=0.$$

Последното равенство значи дека $\sin\varphi$ е решение на равенката

$$4x^3-2x^2-3x+1=0.$$

Јасно, последната равенка е еквивалентна со равенката

$$(x-1)(4x^2+2x-1)=0,$$

од каде добиваме дека $\sin\varphi$ е еден од корените

$$x_1=1 \text{ и } x_{2,3}=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

на оваа равенка. Но, $0<\sin\varphi<1$, па затоа $\sin\varphi=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, т.е. $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Трет начин. Нека $\varphi=\frac{\pi}{10}$. Тогаш $4\varphi+\varphi=\frac{\pi}{2}$, т.е. $4\varphi=\frac{\pi}{2}-\varphi$, па затоа ако се искористи дека за секој $t\in\mathbb{R}$ важи $\sin(\frac{\pi}{2}-t)=\cos t$, добиваме

$$\sin 4\varphi=\sin(\tfrac{\pi}{2}-\varphi),$$
$$\sin 4\varphi=\cos\varphi.$$

Понатаму, ако искористиме дека за секој $t\in\mathbb{R}$ важи

$$\cos 2t=1-2\sin^2 t,$$
$$\sin 2t=2\sin t\cos t,$$

со замена во $\sin 4\varphi = \cos\varphi$ последоватемно добиваме

$$2\sin 2\varphi\cos 2\varphi = \cos\varphi,$$
$$2\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi(1-2\sin^2\varphi) = \cos\varphi,$$
$$4\sin\varphi\cos\varphi(1-2\sin^2\varphi) = \cos\varphi.$$

Но, $\cos\varphi \neq 0$, па од последното равенство добиваме

$$4\sin\varphi(1-2\sin^2\varphi) = 1,$$
$$8\sin^3\varphi - 4\sin\varphi + 1 = 0.$$

Последното равенство значи дека $\sin\varphi$ е решение на равенката

$$8x^3 - 4x + 1 = 0.$$

Јасно, последната равенка е еквивалентна со равенката

$$(2x-1)(4x^2+2x-1) = 0$$

од каде добиваме дека $\sin\varphi$ е еден од корените

$$x_1 = \tfrac{1}{2} \text{ и } x_{2,3} = \tfrac{-2\pm\sqrt{20}}{8} = \tfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

на оваа равенка. Но, $0 < \sin\varphi < \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, па затоа $\sin\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, односно $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Четврт начин. Во овој дел ќе го користиме следново тврдење чиј доказ може да се види во [3].

Лема. Нека a_5 и a_{10} се соодветно должините на страните на правилен петаголник и правилен десетаголник впишани во кружница со радиус R. Постои правоаголен триаголник чии катети се a_{10} и R, а хипотенузата е a_5. □

Користејќи ги карактеристичните триаголници на впишаните правилен петаголник и правилен десетаголник, во кружница со радиус R, за должините на нивните страни наоѓаме $a_5 = 2R\sin\frac{\pi}{10}$ и $a_{10} = 2R\sin\frac{\pi}{5}$. Сега, од претходната лема и од Питагоровата теорема следува

$$R^2 + 4R^2\sin^2\tfrac{\pi}{10} = 4R^2\sin^2\tfrac{\pi}{5},$$

т.е.

$$1 + 4\sin^2\tfrac{\pi}{10} = 4\sin^2\tfrac{\pi}{5}.$$

Понатаму, ако се искористи адиционата формула

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t$$

и основниот триагонометриски идентите, добиваме дека горното равенство последователно е еквивалентно со равенствата

$$1+4\sin^2\frac{\pi}{10}=16\sin^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{\pi}{10},$$
$$1+4\sin^2\frac{\pi}{10}=16\sin^2\frac{\pi}{10}(1-\sin^2\frac{\pi}{10}),$$
$$16\sin^4\frac{\pi}{10}-12\sin^2\frac{\pi}{10}+1=0.$$

Последното равенство значи дека $\sin\frac{\pi}{10}$ е решение на биквадратната равенка

$$16x^4-12x^2+1=0,$$

чии решенија се $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ и $x_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. Но, $0<\sin\frac{\pi}{10}<\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, па затоа $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. ■

Коментар 1. Забележуваме дека првиот и вториот начин на решавање на дадената задача не се суштествено различни. Понатаму, третиот начин користи варијација на идејата од првите два начини, а додека четвртиот начин на решавање користи по малку неочекувана идеја, која суштествено се разликува од идеите во првите три начини на решавање на поставената задача.

Коментар 2. Сега, користејќи ги адиционите формули лесно може да се пресметаат вредностите на тригонометриските функции $\sin, \cos, \mathrm{tg}$ и ctg за аглите $\frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}$ и $\frac{2\pi}{5}$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Литература

1. https://byjus.com/maths/sin-18
2. https://www.teachoo.com
3. Малчески, Р. (2022). Златен пресек и златен правоаголник, Математички талент
4. Целакоска-Јорданова, В. (2022). Неколку задачи за златен пресек, математички талент