Здравко Цветковски,
Ристо Малчески
Скопје

ЕДЕН МЕТОД ЗА ДОКАЖУВАЊЕ НА НЕРАВЕНСТВА СО ТРИ ПРОМЕНЛИВИ

Докажувањето на неравенства во множеството позитивни реални броеви најчесто е поврзано со примената на неравенствата на Коши-Буњаковски, Чебишев, Минковски, Холдер и слично. Меѓутоа, примената на овие неравенства не секогаш е едноставна. Имено, често пати не е едноставно да се согледа кое од споменатите неравенства треба да се искористи за да се докаже дадено неравенство. Токму затоа, во оваа статија ќе разгледаме еден метод, кој во многу случаи ја исклучува примената на споменатите неравенства и кој може да се примени при докажување на неравенства во множеството реални броеви, а не само на множеството позитивни реални броеви. Споменатиот метод се базира на добро позна теорема од диференцијалното сметање, која ќе ја презентираме без доказ.

Теорема 1. Нека е дадена функцијата $f(x)$, и нека точката x_0 е стационарна за функцијата $f(x)$, т.е. нека $f'(x_0)=0$. Стационарната точка x_0 на функцијата $f(x)$, кој има непрекинат втор извод на некој интервал кој ја содржи точката x_0, е точка на:

а) локален минимум на $f(x)$, ако $f''(x_0)>0$,

б) точка на локален максимум, ако $f''(x_0)<0$. ♦

Нека a, b и c се реални броеви такви што $a+b+c=1$. Од неравенството $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ (знак за равенство важи ако ако и само ако $a=b=c$) следува:

$$1=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\geq 3(ab+bc+ca),$$

т.е. точно е неравенството $ab+bc+ca\leq \frac{1}{3}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{3}$. Да ставиме

$$ab+bc+ca=\frac{1-q^2}{3},$$

каде $q \geq 0$ е параметар. Ќе ги најдеме минималната и максималната вредност која што ја прима производот abc во зависност од вредноста на параметарот q.

Ако $q = 0$, тогаш $ab + bc + ca = \frac{1}{3}$, и до претходно изнесеното следува $a = b = c = \frac{1}{3}$, па затоа $abc = \frac{1}{27}$.

Ако $q \neq 0$, тогаш

$$ab + bc + ca = \frac{1-q^2}{3} < \frac{1}{3} = \frac{(a+b+c)^2}{3} \Leftrightarrow$$

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca \Leftrightarrow$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > 0,$$

што значи дека барем два од броевите a, b, c се различни меѓу себе.

Да го разгледаме полиномот

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - x^2 + \frac{1-q^2}{3}x - abc, \qquad (1)$$

$a + b + c = 1$. Првиот извод на функцијата (1) е полиномот:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + \frac{1-q^2}{3},$$

чии корени се $x_1 = \frac{1+q}{3}$ и $x_2 = \frac{1-q}{3}$ и тоа се стационарни точки на функцијата (1). За вториот извод на $f(x)$ имаме $f''(x) = 6x - 2$. Имаме

$$f''(x_1) = 6 \cdot \frac{1+q}{3} - 2 = 6q > 0$$

и од теорема 1 следува дека функцијата (1) во точката $x_1 = \frac{1+q}{3}$ има минимум. Понатаму, од

$$f''(x_2) = 6 \cdot \frac{1-q}{3} - 2 = -6q < 0$$

и од теорема 1 следува дека функцијата (1) во точката $x_2 = \frac{1-q}{3}$ има максимум. Но, функцијата (1) е непрекината и a, b и c се нули на (1). Затоа минимумот и максимумот на функцијата (1) се достигнуваат меѓу нулите, од што следува дека во точката на минимум функцијата е непозитивна, а во точката на максимум таа е ненегативна. Според тоа

$$0 \geq f\left(\frac{1+q}{3}\right) = \frac{(1+q)^2(1-2q)}{27} - abc \text{ и } 0 \leq f\left(\frac{1-q}{3}\right) = \frac{(1-q)^2(1+2q)}{27} - abc,$$

односно

$$\frac{(1+q)^2(1-2q)}{27} \le abc \le \frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}\,. \qquad (2)$$

Од претходното излагање ја имаме следнава теорема.

Теорема 2. Нека a,b,c се реални броеви такви што $a+b+c=1$ и

$$ab+bc+ca=\frac{1-q^2}{3}, (q \ge 0)\,.$$

Тогаш точни се неравенствата (2), при што знак за равенство важи ако и само ако $q=0$, т.е. ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{3}$. ♦

Аналогно на претходните разгледувања може да се докаже следнава теорема, која е природно обопштување на теорема 2.

Теорема 3. Ако a,b,c се реални броеви такви што $a+b+c=p$ и

$$ab+bc+ca=\frac{p^2-q^2}{3},\ (q \ge 0)\,.$$

Тогаш точни се неравенствата

$$\frac{(p+q)^2(p-2q)}{27} \le abc \le \frac{(p-q)^2(p+2q)}{27}\,, \qquad (3)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $q=0$, т.е. ако и само ако

$$a=b=c=\frac{p}{3}\,. ♦$$

Ако ги искористиме ознаките $a+b+c=p$, $ab+bc+ca=\frac{p^2-q^2}{3}$ и $abc=r$, тогаш лесно се покажува дека се точни следниве идентитети:

1° $a^2+b^2+c^2=\frac{p^2+2q^2}{3}$,

2° $a^3+b^3+c^3=pq^2+3r$,

3° $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)=\frac{p(p^2-q^2)}{3}-3r$,

4° $(a+b)(b+c)(c+a)=\frac{p(p^2-q^2)}{3}-r$,

5° $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{(p^2-q^2)^2}{9}-2pr$,

6° $ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)=\frac{(p^2+2q^2)(p^2-q^2)}{9}-pr$,

7° $a^4+b^4+c^4=\frac{-p^4+8p^2q^2+2q^4}{9}+4pr$,

кои ќе ги користиме во натамошните разгледувања. На читателот му препорачуваме самостојно да ги докаже идентитетите 1° - 7°.

Пример 1. Нека $a,b,c \in \mathbb{R}$. Докажете го неравенството

$$(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4 \geq \tfrac{4}{7}(a^4+b^4+c^4)\,. \qquad (4)$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}&(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4 = \\ &\quad = 2(a^4+b^4+c^4)+4(a^3b+b^3a+b^3c+c^3b+c^3a+a^3c)+6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\end{aligned}$$

што значи дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$5(a^4+b^4+c^4)+14(a^3b+b^3a+b^3c+c^3b+c^3a+a^3c)+21(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq 0\,.$$

Понатаму, ако ги искористиме ознаките

$$a+b+c=p\,,\ ab+bc+ca=\tfrac{p^2-q^2}{3} \text{ и } r=abc\,,$$

тогаш користејќи ги идентитетите 5°, 6° и 7° добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$5(\tfrac{-p^4+8p^2q^2+2q^4}{9}+4pr)+14(\tfrac{(p^2+2q^2)(p^2-q^2)}{9}-pr)+21(\tfrac{(p^2-q^2)^2}{9}-2pr)\geq 0\,,$$

т.е. со неравенството

$$\begin{aligned}5(-p^4+8p^2q^2+2q^4+36pr)&+14((p^2+2q^2)(p^2-q^2)-9pr)\\ &+21((p^2-q^2)^2-18pr)\geq 0.\end{aligned} \qquad (5)$$

Ако $p=0$, тогаш неравенството (5) е еквивалентно со неравемнството $10q^4-28q^4+21q^4\geq 0$, т.е. со неравенството $3q^4\geq 0$, кое очигледно е точно. Нека $p\neq 0$. Без губење на општоста можеме да земеме дека $p=1$ (зошто?). Сега неравенството (5) е еквивалентно со неравенството

$$5(-1+8q^2+2q^4+36r)+14((1+2q^2)(1-q^2)-9r)+21((1-q^2)^2-18r)\geq 0\,,$$

т.е. со неравенството

$$3q^4+4q^2+10-108r\geq 0\,. \qquad (6)$$

Сега од теорема 2 следува

$$\begin{aligned}3q^4+4q^2+10-108r &\geq 3q^4+4q^2+10-108\tfrac{(1-q)^2(1+2q)}{27}\\ &=3q^4+4q^2+10-4(1-q)^2(1+2q)\\ &=q^2(q-4)^2+2q^4+6\geq 0,\end{aligned}$$

т.е. точно е неравенството (6), што значи дека точно е неравенството (4). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=0$.♦

Пример 2. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ се такви што $a+b+c=1$. Докажете го неравенството $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+48(ab+bc+ca)\geq 25$.

Решение. Од $ab+bc+ca=\frac{1-q^2}{3}\geq 0$ и $q\geq 0$ следува дека $q\in[0,1]$. Имаме

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+48(ab+bc+ca)=\frac{ab+bc+ca}{abc}+48(ab+bc+ca)=\frac{1-q^2}{3r}+16(1-q^2),$$

па затоа доволно е да докажеме дека $\frac{1-q^2}{3r}+16(1-q^2)\geq 25$. Понатаму, од теорема 2 следува

$$\frac{1-q^2}{3r}+16(1-q^2)\geq 27\frac{1-q^2}{3(1-q)^2(1+2q)}+16(1-q^2)$$

$$=9\frac{1+q}{(1-q)(1+2q)}+16(1-q^2)=\frac{2q^2(4q-1)^2}{(1-q)(1+2q)}+25\geq 25,$$

при што знак за равенство важи ако

$$(a,b,c)=(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) \text{ или } (a,b,c)=(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}),$$

(по сите пермутации на a,b и c). ♦

Пример 3. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}$ се такви што $a^2+b^2+c^2=9$. Докажете го неравенството

$$2(a+b+c)-abc\leq 10.$$

Решение. При ознаки $a+b+c=p$, $ab+bc+ca=\frac{1-q^2}{3}$, $abc=r$, ако го искористиме идентитетот 1°, условот на задачата ќе го запишеме во видот

$$9=a^2+b^2+c^2=\frac{p^2+2q^2}{3},$$

т.е. во видот

$$p^2+2q^2=27 \tag{7}$$

Од теорема 3 следува

$$2(a+b+c)-abc=2p-r\leq 2p-\frac{(p+q)^2(p-2q)}{27}=\frac{54p-p^3+3pq^2+2q^3}{27}$$

$$=\frac{54p-p(p^2+2q^2)+5pq^2+2q^3}{27}\overset{(1)}{=}\frac{54p-27p+5pq^2+2q^3}{27}$$

$$=\frac{27p+5pq^2+2q^3}{27}=\frac{p(27+5q^2)+2q^3}{27},$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$\frac{p(27+5q^2)+2q^3}{27}\le 10,$$

т.е. дека

$$p(27+5q^2)\le 270-2q^3.$$

Имаме

$(270-2q^3)^2 \ge (p(27+5q^2))^2 \Leftrightarrow$

$27(q-3)^2(2q^4+12q^3+49q^2+146q+219)\ge 0$

што и требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $(a,b,c)=(2,2,-1)$, по сите пермутации на a,b и c.♦

Пример 4. Нека $a,b,c\ge 0$. Докажете го неравенството

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ca).$$

Решение. При ознаки $a+b+c=p$, $ab+bc+ca=\frac{1-q^2}{3}$, $abc=r$, даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{p^2+2q^2}{3}+2r+1\ge 2\frac{1-q^2}{3},$$

т.е. со неравенството

$$6r+3+4q^2-p^2\ge 0.$$

Ако $2q\ge p$ тогаш јасно неравенството важи.

Ако $p\ge 2q$ тогаш од теорема 3 следува дека доволно е да го докажеме неравенството

$$6r+3+4q^2-p^2\ge 6\frac{(p+q)^2(p-2q)}{27}+3+4q^2-p^2\ge 0,$$

т.е. неравенството

$$\frac{2(p+q)^2(p-2q)}{9}+3+4q^2-p^2\ge 0,$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$(p-3)^2(2p+3)\ge 2q^2(2q+3p-18). \quad (8)$$

Ако $2p\le 9$, тогаш $2q+3p\le 4p\le 18$, па затоа неравенството е точно.

Ако $2p\ge 9$, тогаш

$$\begin{aligned}2q^2(2q+3p-18)&\le 2q^2(p+3p-18)=4q^2(2p-9)\\&\le p^2(2p-9)=(p-3)^2(2p+3)-27\\&<(p-3)^2(2p+3)\end{aligned}$$

што значи дека и во овој случај важи неравенството (8) е докажано. Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.♦

Пример 5 (Schur). Докажете, дека за кои било ненегативни реални броеви a,b,c важи

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a). \tag{9}$$

Решение. Неравенството (9) е хомогено, па затоа без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a+b+c=1$. Тогаш $q\in[0,1]$ и неравенство (9) е еквивалентно со неравенството

$$27r+4q^2-1\geq 0.$$

Ако $q\geq\frac{1}{2}$, тогаш последното неравенство очигледно е точно.

Ако $q\leq\frac{1}{2}$, тогаш од теорема 2 следува

$$27r+4q^2-1\geq 27\frac{(1+q)^2(1-2q)}{27}+4q^2-1=q^2(1-2q)\geq 0,$$

што значи дека и во овој случај неравенството е исполнето. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $(a,b,c)=(t,t,t)$ или $(a,b,c)=(t,t,0)$, $t\geq 0$, по сите пермутации на a,b и c.♦

Пример 6. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}$. Докажете го неравенството

$$a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c).$$

Решение. Неравенството е хомогено, па затоа без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a+b+c=1$. Тогаш даденото неравенство е еквивалентно со неравенството $\frac{-1+8q^2+2q^4}{9}+4r\geq r$ т.е. со неравенството $-1+8q^2+2q^4+27r\geq 0$. Од теорема 2 следува дека доволно е да докажеме дека

$$-1+8q^2+2q^4+27\frac{(1+q)^2(1-2q)}{27}\geq 0.$$

Имаме

$$\begin{aligned}-1+8q^2+2q^4+27\frac{(1+q)^2(1-2q)}{27}&=-1+8q^2+2q^4+(1+q)^2(1-2q)\\&=-1+8q^2+2q^4+(1+2q+q^2)(1-2q)\\&=-1+8q^2+2q^4+(1-3q^2-2q^3)\\&=2q^4+5q^2-2q^3=q^2(2q^2-2q+5)\\&=q^2\frac{4q^2-4q+10}{2}=q^2\frac{(2q-1)^2+9}{2}\geq 0,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.♦

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}^+$. Докажете го неравенството:

$$(ab+bc+ca)((a+b+c)^3+48abc)\geq 25abc(a+b+c)^2 .$$

2. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}^+$. Докажете го неравенството:

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+11\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq 17 .$$

3. Нека $x,y,z>0$ се реални броеви такви што $x+y+z=1$. Да се докаже неравенството

$$(1-x^2)^2+(1-y^2)^2+(1-z^2)^2\leq(1+x)(1+y)(1+z) .$$

4. Нека $x,y,z\in\mathbb{R}^+$ се такви што $x+y+z=1$. Докажете го неравенството

$$\frac{xy+yz+zx}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}\geq 12(x^3+y^3+z^3) .$$

5. Нека се реални броеви $x,y,z>0$. Да се докаже дека

$$x^4(y+z)+y^4(z+x)+z^4(x+y)\leq\frac{1}{12}(x+y+z)^5 .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Arslanagić, Š.: *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
2. Lee H.: *Topics in Inequalities-Theorems and Techniques*, 2007
3. Vo Quoc B.: *On a class of three-variable Inequalities*, 2007

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ