Републички натпревар 2021

I година

1. Нека $S_k=\frac{a^k}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^k}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)}$. Докажи дека $S_0=S_1=0$, $S_2=1$ и $S_3=a+b+c$.

Решение. Да забележиме дека мора да важи $a\neq b\neq c\neq a$. Имаме

$$S_0=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=\frac{b-c-a+c+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0 \text{ и}$$

$$S_1=\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}=\frac{ab-ac-ab+bc+ac-bc}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0.$$

Потоа,

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=\frac{a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}\\&=\frac{ab(a-b)-c(a^2-b^2)+c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(a-b)(ab-ac-bc+c^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}\\&=\frac{(a-b)[a(b-c)-c(b-c)]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=1.\end{aligned}$$

Слично за S_3 добиваме

$$\begin{aligned}S_3&=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=\frac{a^3(b-c)-b^3(a-c)+c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}\\&=\frac{ab(a^2-b^2)-c(a^3-b^3)+c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(a-b)[(ab(a+b)-c(a^2+ab+b^2)+c^3]}{(a-b)(a-c)(b-c)}\\&=\frac{(a-b)[(a^2(b-c)+ab(b-c)-c(b^2-c^2)]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(a-b)(b-c)[a^2+ab-c(b+c)]}{(a-b)(a-c)(b-c)}\\&=\frac{(a-b)(b-c)[(a-c)(a+c)+b(a-c)]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}\\&=a+b+c.\end{aligned}$$

Ќе дадеме уште еден доказ на последното равенство. За секој $x\in\mathbb{R}$ важи

$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc,$$

па затоа

$$\begin{aligned}&a^3-(a+b+c)a^2+(ab+bc+ca)a-abc=0,\\&b^3-(a+b+c)b^2+(ab+bc+ca)b-abc=0,\\&c^3-(a+b+c)c^2+(ab+bc+ca)c-abc=0.\end{aligned}$$

Ако првото равенство го поделиме со $(a-b)(a-c)$, второто со $(b-a)(b-c)$, третото со $(c-a)(c-b)$ и потоа ги собереме добиените равенства, наоѓаме дека

$$S_3-(a+b+c)S_2+(ab+bc+ca)S_1-abcS_0=0.$$

Конечно, ако земеме предвид дека $S_0=S_1=0$ и $S_2=1$, од последното равенство следува дека $S_3=a+b+c$.

2. На колку начини дропката $\frac{2020}{2021}$ може да се запише како производ на две дропки од видот $\frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Нека $\frac{2020}{2021} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{m}{m+1}$, каде $m, n \in \mathbb{N}$. Оттука последователно добиваме

$$\begin{aligned}
&2020(n+1)(m+1) = 2021mn,\\
&2020(m+n+1) = mn,\\
&n = \tfrac{2020(m+1)}{m-2020},\\
&n = \tfrac{2020(m-2020)+2020\cdot 2021}{m-2020},\\
&n = 2020 + \tfrac{2020\cdot 2021}{m-2020}.
\end{aligned}$$

Бидејќи $m, n \in \mathbb{N}$, мора $m-2020$ да е позитивен делител на $2020 \cdot 2021$ и на секој делител на $2020 \cdot 2021$ соодветствува точно еден пар (n, m). Имаме

$$2020 \cdot 2021 = 2^2 \cdot 5 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 101,$$

па затоа бројот на делителите на $2020 \cdot 2021$ е еднаков на $3 \cdot 2^4 = 48$. Конечно, постојат 48 начини дропката $\frac{2020}{2021}$ да се запише како производ на две дропки од саканиот вид.

3. Определи ги сите реални броеви x за кои важи $\{x\} = \frac{x+[x]+[x+\frac{1}{2}]}{10}$, каде $[x]$ е најголемиот цел број кој не е поголем од x и $\{x\} = x - [x]$.

Решение. Од $x = [x] + \{x\}$ следува дека дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$10\{x\} = [x] + \{x\} + [x] + [x + \tfrac{1}{2}],$$

$$9\{x\} - 2[x] - [x + \tfrac{1}{2}] = 0. \qquad (1)$$

Понатаму, $\{x\} \in [0,1)$, па затоа ќе разгледаме два случаја.

- Ако $\{x\} \in [0, \frac{1}{2})$, тогаш $\{x\} + \frac{1}{2} \in [0,1)$, па затоа $[x + \frac{1}{2}] = [[x] + \{x\} + \frac{1}{2}] = [x]$. Заменуваме во (1) и добиваме $9\{x\} - 3[x] = 0$, односно $[x] = 3\{x\} \in [0, \frac{3}{2})$. Според тоа, имаме две решенија $[x]_1 = 0$ или $[x]_2 = 1$. За $[x]_1 = 0$ добиваме $\{x\}_1 = 0$, од каде наоѓаме $x_1 = 0$. За $[x]_2 = 1$ добиваме $\{x\}_2 = \frac{1}{3}$, од каде наоѓаме $x_2 = \frac{4}{3}$.
- Ако $\{x\} \in [\frac{1}{2}, 1)$, тогаш $\{x\} + \frac{1}{2} \in [1, \frac{3}{2})$, па затоа $[x + \frac{1}{2}] = [x] + 1$. Заменуваме во (1) и добиваме $9\{x\} - 3[x] - 1 = 0$, односно $[x] = 3\{x\} - \frac{1}{3} \in [\frac{7}{6}, \frac{8}{3})$. Оттука

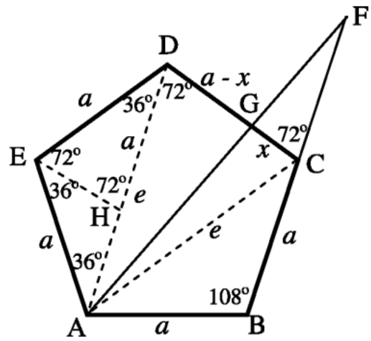
го добиваме решението $[x]_3 = 2$. За $[x]_3 = 2$ добиваме $\{x\}_3 = \frac{7}{9}$, од каде наоѓаме $x_3 = \frac{25}{9}$.

Значи, решенија на дадената равенка се $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{3}$ и $x_3 = \frac{25}{9}$.

4. Страната $\overline{BC} = a$ на правилниот петаголник $ABCDE$ е продолжена преку темето C до точката F така што $\overline{CF} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$. Изрази ја должината на отсечката AF со помош на должината на страната a.

Решение. Да означиме $d = \overline{CF} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$, пресекот на AF и CD со G, $\overline{CG} = x$ и $\overline{AD} = e$. Тогаш $\overline{GD} = a - x$. Од $\triangle DAG \sim \triangle CFG$ следува $e:(a-x) = d:x$, па затоа

$$x = \frac{ad}{e+d}. \qquad (1)$$



Нека H е точка од дијагоналата AD таква што $\overline{DH} = a$. Тогаш $\overline{AH} = e - a$. Понатаму, од $\triangle ADE \sim \triangle EAH$ следува $e:a = a:(e-a)$, па затоа

$$e(e-a) = a^2. \qquad (2)$$

Ќе докажеме дека отсечката AF ја полови страната CD, за што е доволно да докажеме дека $e = d$. Од $d = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$ следува

$$d(d-a) = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}\left(\frac{a(1+\sqrt{5})}{2} - a\right) = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2} = a^2\frac{\sqrt{5}^2-1}{4} = a^2.$$

Сега, од последното равенство и од (2) следува $e(e-a) = d(d-a)$, од каде добиваме $(d-e)(d+e-a) = 0$. Бидејќи $d > a$ и $e > a$, од последното равенство следува $d = e$. Сега, од $d = e$ и сличноста $\triangle DAG \sim \triangle CFG$ следува $\triangle DAG \cong \triangle CFG$. Оттука заклучуваме дека отсечката AF ја полови страната CD. Понатаму, бидејќи AF ја полови CD и $\triangle DGA \cong \triangle CGA$ ($\overline{DA} = \overline{CA} = e$, $\measuredangle ADG = \measuredangle ACG = 72^\circ$ и $\overline{DG} = \overline{CG} = \frac{a}{2}$), следува $AF \perp CD$. Од Питагоровата теорема применета на триаголникот ACG следува

$$\overline{AF} = \overline{AG} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{DG}^2} = \sqrt{\frac{a^2(1+\sqrt{5})^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

Конечно, од $\triangle DAG \cong \triangle CFG$ следува $\overline{AG} = \overline{GF}$, па затоа

$$\overline{AF} = 2\overline{AG} = a\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

II година

1. Во една игра се користат три вида жетони, секој вид со различна вредност изразена во денари. Вредноста на секој од жетоните е природен број. Бојан, Аце и Сашо имаат секој барем по еден жетон од секој вид. Бојан има 4 жетони со вкупна вредност 28 денари, Аце има 5 жетони со вкупна вредност 21 денар, а Сашо има3 жетони. Колкава е вкупната вредност на жетоните на Сашо?

Решение. Нека a,b,c се вредностите на жетоните . Тогаш за вкупната вредност на жетоните на Бојан важи $2a+b+c=28$. Вредноста на жетоните на Аце може да биде $3a+b+c$, $2a+2b+c$, $2a+b+2c$, $a+2b+2c$, $a+b+3c$ или $a+3b+c$. Бидејќи $3a+b+c=28+a>28$, $2a+2b+c=28+b>28$ и $2a+b+2c=28+c>28$ заклучуваме дека можни се следниве случаи: $a+2b+2c=21$, $a+3b+c=21$ или $a+b+3c=21$.

Ако $a+2b+2c=21$, тогаш од $2a+b+c=28$ следува $3(a+b+c)=49$, што не е можно бидејќи 49 не е делив со 3.

Ако $a+3b+c=21$, тогаш од $2a+b+c=28$ следува $a-2b=7$, т.е. $a=2b+7$. Според тоа, бројот a е непарен и е поголем или еднаков на 9. Сега за $a=9$, добиваме $b=1$ и затоа $c=9$, што не е можно, бидејќи a,b,c се различни природни броеви. Значи, $a\geq 11$. Бидејќи $b+c\geq 3$, добиваме $2a=28-(b+c)\leq 25$, па затоа $a\leq\frac{25}{2}$ и како a е непарен број и $a\geq 11$ важи $a=11$. Конечно, $a=11, b=2$ и $c=4$, па затоа $a+b+c=17$.

На потполно идентичен начин се добива дека од $a+b+3c=21$ следува $a=11$, $b=4$ и $c=2$, односно $a+b+c=17$.

Конечно, вкупната вредност на жетоните на Сашо е 17 денари.

2. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} 11x-yz=18, \\ 11y-zx=18, \\ 11z-xy=18. \end{cases}$$

Решение. Ако од првата равенка ја одземеме втората, последователно добиваме

$$\begin{aligned} &11x-11y-yz+zx=0, \\ &11(x-y)+z(x-y)=0, \\ &(x-y)(11+z)=0. \end{aligned}$$

Можни се два случаја.

1) Нека $x=y$. Тогаш, ако од $11x-xz=18$ ја одземеме третата равенка $11z-x^2=18$, добиваме $(x-z)(11+x)=0$. Ако $x=z$, тогаш $x=y=z$, па добиваме $x^2-11x+18=0$, од каде добиваме $x=9$ или $x=2$. Значи, во

овој случај решенија на системот се $(x,y,z)=(9,9,9)$ и $(x,y,z)=(2,2,2)$. Ако $11+x=0$, тогаш $x=-11$, па затоа $y=-11$ и оттука $z=\frac{x^2+18}{11}=\frac{139}{11}$, па решение на системот е $(x,y,z)=(-11,-11,\frac{139}{11})$.

2) Нека $z+11=0$, т.е. $z=-11$. Тогаш од третата равенка на системот следува $xy=-121-18=-139$, а од првата следува $11x+11y=18$, т.е. $x+y=\frac{18}{11}$. Значи, x и y се решенија на равенката $u^2-\frac{18}{11}u-139=0$, т.е. $x=\frac{139}{11}$, $y=-11$ или $x=-11, y=\frac{139}{11}$.

Конечно, сите решенија на дадениот систем се:

$$(2,2,2), (9,9,9), (-11,-11,\tfrac{139}{11}), (-11,\tfrac{139}{11},-11) \text{ и } (\tfrac{139}{11},-11,-11).$$

3. Дали постојат четири различни реални броеви такви што кубот на секој од нив е еднаков на збирот на квадратите на преостанатите три броја?

Решение. Нека x,y,z,w се различни реални броеви такви што

$$\begin{aligned} x^3 &= y^2+z^2+w^2,\\ y^3 &= z^2+w^2+x^2,\\ z^3 &= w^2+x^2+y^2,\\ w^3 &= x^2+y^2+z^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Бидејќи броевите се различни и системот (1) не се менува при пермутација на непознатите, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $w>x>y>z$. Од $z^3=w^2+x^2+y^2\geq 0$ следува $z\geq 0$. Ако $z=0$, тогаш важи $w^2+x^2+y^2=0$, па затоа $x=y=w=0$, што противречи на $w>x>y>z$. Значи, $z>0$, т.е. $w>x>y>z>0$.

Од $w^3=x^2+y^2+z^2$ и $w>x>y>z>0$ следува $w^3<3w^2$, па како $w^2>0$, ако последната неравенка ја поделиме со w^2, добиваме $w<3$. Според тоа, $0<w<3$, што значи $0<z<y<x<w<3$. Сега, ако ги собереме равенките на системот (1), добиваме

$$\begin{gathered} w^3+x^3+y^3+z^3=3x^2+3y^2+3z^2+3w^2,\\ (w^3-3w^2)+(x^3-3x^2)+(y^3-3y^2)+(z^3-3z^2)=0. \end{gathered}$$

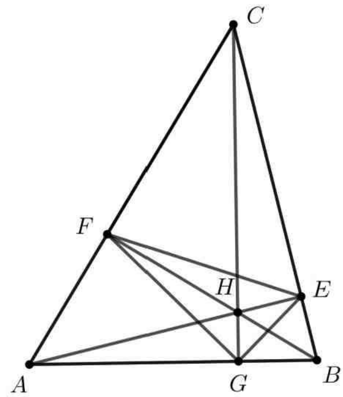
Но, за секој реален број $a\in(0,3)$ важи $a^3-3a^2<0$. Значи, сите собирци во заградите на последното равенство се негативни, а нивниот збир е еднаков на 0, што е противречност. Од добиената противречност следува дека системот (1) нема решение, т.е. не постојат четири различни реални броеви такви што кубот на секој од нив е еднаков на збирот на квадратите на преостанатите три броја.

4. Во остроаголниот триаголник ABC, точките E,F,G се подножјата на висините повлечени од темињата A,B,C, соодветно, а H е ортоцентарот на триаголникот ABC. Ако $\overline{AB}=\overline{CH}$, докажи дека

$$P_{AGF}\cdot\overline{BC}^2+P_{BEG}\cdot\overline{AC}^2=P_{CFF}\cdot\overline{AB}^2,$$

каде P_{AGF},P_{BEG},P_{CFF} се плоштините на триаголнмиците AGF,BEG,CFE, соодветно.

Решение. Триаголниците ABF и HCF се складни (тие се правоаголни, имаат еднакви хипотенузи $\overline{AB}=\overline{CH}$ и $\measuredangle ABF=\measuredangle HCF=90^\circ-\alpha$). Затоа $\overline{BF}=\overline{CF}$, па од правоаголниот триаголник CFB следува $\gamma=45^\circ$ и $\measuredangle CBF=45^\circ$. Од тетивниот четириаголник $FGBC$ следува $\measuredangle FGC=\measuredangle FBC=45^\circ$, а од тетивниот четириаголник $HGBE$ следува $\measuredangle HGE=\measuredangle HBE=45^\circ$, па затоа $\measuredangle FGE=90^\circ$. Од правоаголниот триаголник FGE следува $\overline{FG}^2+\overline{GE}^2=\overline{EG}^2$.



Од друга страна, $\measuredangle AFG=90^\circ-\measuredangle GFB=90^\circ-\measuredangle GCB=\beta$ и $\measuredangle GAF=\measuredangle CAB=\alpha$, па затоа $\triangle AGF\sim\triangle ACB$. Аналгно се докажува дека $\triangle BEG\sim\triangle BAC$ и $\triangle CFE\sim\triangle CBA$, па затоа точни се равенствата

$$\frac{P_{AGF}}{P_{ABC}}=\frac{\overline{GF}^2}{\overline{BC}^2},\frac{P_{BEG}}{P_{ABC}}=\frac{\overline{EG}^2}{\overline{AC}^2}\text{ и }\frac{P_{CFE}}{P_{ABC}}=\frac{\overline{FE}^2}{\overline{BA}^2}.$$

Значи,

$$\overline{GF}^2=\frac{P_{AGF}}{P_{ABC}}\overline{BC}^2,\overline{EG}^2=\frac{P_{BEG}}{P_{ABC}}\overline{AC}^2\text{ и }\overline{FE}^2=\frac{P_{CFE}}{P_{ABC}}\overline{BA}^2.$$

Заменуваме во равенството $\overline{FG}^2+\overline{GE}^2=\overline{EG}^2$ и го добиваме равенството

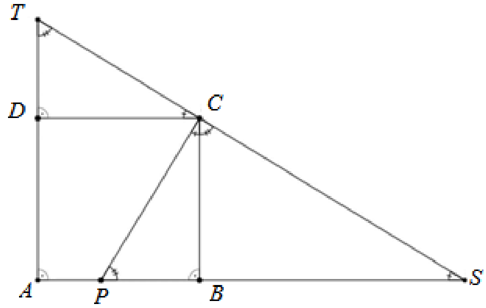
$$\frac{P_{AGF}}{P_{ABC}}\cdot\overline{BC}^2+\frac{P_{BEG}}{P_{ABC}}\cdot\overline{AC}^2=\frac{P_{CFF}}{P_{ABC}}\cdot\overline{AB}^2,$$

кое е еквивалентно со бараното равенство.

III година

1. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страна 1. На страната AB е избрана произволна точка P. Правата која минува низ темето C и е нормална на правата CP, ги сече продолженијата на страните AB и AD во точките S и T, соодветно. Ако $\overline{AS}=x$ и $\overline{AT}=y$, докажи дека важи $\log(x+y)=\log x+\log y$.

Решение. *Прв начин*. Нека $\overline{AP}=t$. Тогаш $\overline{BP}=1-t$. Ќе ги изразите x и y со t. Од условот на задачата следува $\triangle BCP \cong \triangle DCT$ (види цртеж), па затоа $\overline{DT}=\overline{BP}=1-t$. Сега е јасно дека $y=2-t$. Од сличноста на триаголниците DTC и ATS следува



$$\overline{DT}:\overline{AT}=\overline{DC}:\overline{AS},$$

од каде следува

$$x=\overline{AS}=\frac{\overline{AT}\cdot\overline{DC}}{\overline{DT}}=\frac{2-t}{1-t}.$$

Затоа

$$\log(x+y)=\log(\tfrac{2-t}{1-t}+2-t)=\log\frac{(2-t)^2}{1-t}=\log\frac{2-t}{1-t}+\log(2-t)=\log x+\log y.$$

Втор начин. Имаме

$$P_{\triangle AST}=P_{ABCD}+P_{\triangle BSC}+P_{\triangle DCT},$$
$$\frac{xy}{2}=1+\frac{(x-1)\cdot 1}{2}+\frac{(y-1)\cdot 1}{2},$$
$$xy=x+y,$$

од каде следува бараното равенство.

2. Даден е триаголник $ABC,$ таков што $\overline{AC}\neq\overline{BC}$. Нека M е средината на страната AB и нека $\alpha=\measuredangle BAC, \beta=\measuredangle ABC, \varphi=\measuredangle ACM, \psi=\measuredangle BCM$. Докажи дека важи

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\varphi\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.$$

Решение. Да означиме $\overline{CM}=m$. Со примена на косинусната теорема на триаголниците ACM и BCM добиваме

$$b^2+m^2-2bm\cos\varphi=(\tfrac{c}{2})^2=a^2+m^2-2am\cos\psi,$$
$$b^2+(\tfrac{c}{2})^2-bc\cos\alpha=m^2=a^2+(\tfrac{c}{2})^2-ac\cos\beta.$$

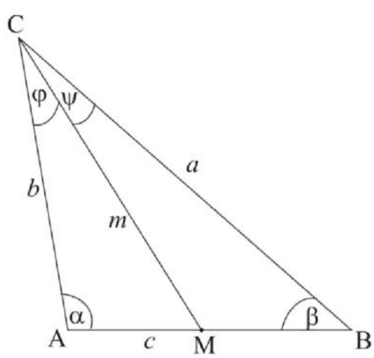
Горните изрази ги средуваме и добиваме

$$2m(a\cos\psi-b\cos\varphi)=a^2-b^2,$$
$$c(a\cos\beta-b\cos\alpha)=a^2-b^2,$$

па затоа

$$a\cos\psi-b\cos\varphi=\frac{c}{2m}(a\cos\beta-b\cos\alpha).$$

Со примена на синусната теорема на триаголникот ACM имаме $\frac{c}{2m}=\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$. Сега, од последните две равенства следува



$$\frac{a\cos\psi-b\cos\varphi}{\sin\varphi}=\frac{a\cos\beta-b\cos\alpha}{\sin\alpha}\text{, т.е. }\frac{\frac{a}{b}\cos\psi-\cos\varphi}{\sin\varphi}=\frac{\frac{a}{b}\cos\beta-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Понатаму, од синусната теорема применета на триаголниците ABC, ACM, BCM следува $\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$, па ако замениме во последното равенство го добиваме равенството

$$\frac{\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\cos\psi-\cos\varphi}{\sin\varphi}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta-\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

од каде по средувањето следува бараното равенство.

3. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a така што за секој $x\in[-1,1]$ важи неравенството

$$ax^2+2(a+1)x+a-4\leq 0.$$

Решение. Даденото неравенство го трансформираме по степени на $x+1$ и добиваме

$$a(x+1)^2+2(x+1)-6\leq 0.$$

Воведуваме смена $x+1=t$ и го добиваме неравенството

$$at^2+2t-6\leq 0,$$

кое треба да е задоволено за секој $t\in[0,2]$.

За $t=0$ имаме $a\cdot 0^2+2\cdot 0-6=-6\leq 0$ и ова важи за секој $a\in\mathbb{R}$.

За $t\in(0,2]$ имаме

$$a\leq\frac{6-2t}{t^2}=2(\frac{3}{t^2}-\frac{1}{t})=2(3u^2-u)\text{, каде }u=\frac{1}{t}\in[\frac{1}{2},+\infty).$$

Неравенството $a\leq 2(3u^2-u)$ треба да важи за секој $u\in[\frac{1}{2},+\infty)$, па доволно е параметарот a да е ограничен од горе со минимумот на квадратната функција $2(3u^2-u)$ на дадениот интервал, т.е. треба да важи $a\leq\min\limits_{u\in[\frac{1}{2},+\infty)}2(3u^2-u)$. Квадратната функција $f(u)=2(3u^2-u)$ има минимум во темето $u=\frac{1}{6}$ и расте за $u>\frac{1}{6}$. Тогаш за $u\in[\frac{1}{2},+\infty)$, минимумот се достигнува во $u=\frac{1}{2}$. Значи, треба да важи $a\leq 2(3(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$, што значи $a\in(-\infty,\frac{1}{2}]$.

4. Нека $\alpha_i\in(0,1), i=1,2,...,2021$ и $x\in(0,\frac{\pi}{4})$. Докажи дека за изразот

$$A=\frac{2021\sin(\alpha_1 x)\sin(\alpha_2 x)...\sin(\alpha_{2021}x)}{\cos(\alpha_1 x)+\cos(\alpha_2 x)+...+\cos(\alpha_{2021}x)}$$

е точно неравенството:

$$\log_{\cos(\alpha_1 x)}A+\log_{\cos(\alpha_2 x)}A+...+\log_{\cos(\alpha_{2021}x)}A\geq 2020\cdot 2021.$$

Решение. Од $\alpha_i x\in(0,\frac{\pi}{4}),\ i=1,2,...,2021$ следува дека $\cos(\alpha_i x)>0$, па од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$\cos(\alpha_1 x)+\cos(\alpha_2 x)+...+\cos(\alpha_{2021}x)\geq 2021\sqrt[2021]{\cos(\alpha_1 x)\cos(\alpha_2 x)...\cos(\alpha_{2021}x)}\ .$$

Понатаму, за секој $\theta\in(0,\frac{\pi}{4})$ важо $\sin\theta\leq\cos\theta$, па затоа

$$A=\frac{2021\sin(\alpha_1 x)\sin(\alpha_2 x)...\sin(\alpha_{2021}x)}{\cos(\alpha_1 x)+\cos(\alpha_2 x)+...+\cos(\alpha_{2021}x)}\leq\frac{2021\cos(\alpha_1 x)\cos(\alpha_2 x)...\cos(\alpha_{2021}x)}{\cos(\alpha_1 x)+\cos(\alpha_2 x)+...+\cos(\alpha_{2021}x)}$$

$$\leq\frac{\cos(\alpha_1 x)\cos(\alpha_2 x)...\cos(\alpha_{2021}x)}{\sqrt[2021]{\cos(\alpha_1 x)\cos(\alpha_2 x)...\cos(\alpha_{2021}x)}}=(\cos(\alpha_1 x)\cos(\alpha_2 x)...\cos(\alpha_{2021}x))^{\frac{2020}{2021}}.$$

Јасно, $\cos(\alpha_i x)\in(0,1)$, за $i=1,2,...,2021$, па ако го логаритмираме неравенството

$$A\leq(\cos(\alpha_1 x)\cos(\alpha_2 x)...\cos(\alpha_{2021}x))^{\frac{2020}{2021}},$$

добиваме

$$\log_{\cos(\alpha_i x)}A\geq\frac{2020}{2021}\log_{\cos(\alpha_i x)}(\cos(\alpha_1 x)\cos(\alpha_2 x)...\cos(\alpha_{2021}x))\ , \qquad (1)$$

за $i=1,2,...,2021$. Ако ги собереме логаритмите (1), добиваме

$$\log_{\cos(\alpha_1 x)}A+\log_{\cos(\alpha_2 x)}A+...+\log_{\cos(\alpha_{2021}x)}A\geq$$

$$\geq\frac{2020}{2021}\sum_{i=1}^{2021}\log_{\cos(\alpha_i x)}(\cos(\alpha_1 x)\cos(\alpha_2 x)...\cos(\alpha_{2021}x))$$

$$=\frac{2020}{2021}[\log_{\cos(\alpha_1 x)}\cos(\alpha_1 x)+...+\log_{\cos(\alpha_1 x)}\cos(\alpha_{2021}x)+$$
$$+\log_{\cos(\alpha_2 x)}\cos(\alpha_1 x)+...+\log_{\cos(\alpha_2 x)}\cos(\alpha_{2021}x)+$$
$$+...+\log_{\cos(\alpha_{2021}x)}\cos(\alpha_1 x)+...+\log_{\cos(\alpha_{2021}x)}\cos(\alpha_{2021}x)]$$

$$=\frac{2020}{2021}[2021+\log_{\cos(\alpha_1 x)}\cos(\alpha_2 x)+...+\log_{\cos(\alpha_1 x)}\cos(\alpha_{2021}x)+$$
$$+\log_{\cos(\alpha_2 x)}\cos(\alpha_1 x)+\log_{\cos(\alpha_2 x)}\cos(\alpha_3 x)+...+\log_{\cos(\alpha_2 x)}\cos(\alpha_{2021}x)+$$
$$+...+\log_{\cos(\alpha_{2021}x)}\cos(\alpha_1 x)+...+\log_{\cos(\alpha_{2021}x)}\cos(\alpha_{2020}x)]$$

$$=\frac{2020}{2021}[2021+(\log_{\cos(\alpha_1 x)}\cos(\alpha_2 x)+\log_{\cos(\alpha_2 x)}\cos(\alpha_1 x))+...+$$
$$+(\log_{\cos(\alpha_1 x)}\cos(\alpha_{2021}x)+\log_{\cos(\alpha_{2021}x)}\cos(\alpha_1 x))+...+$$
$$+(\log_{\cos(\alpha_{2020}x)}\cos(\alpha_{2021}x)+\log_{\cos(\alpha_{2021}x)}\cos(\alpha_{2020}x))]$$

$$\geq\frac{2020}{2021}(2021+2\cdot\frac{2021\cdot 2020}{2}\,)=2020\cdot 2021$$

при последното неравенство следува од неравенството меѓу аритметичката и геометрискста средина за два броја, бидејќи од $0<\cos(\alpha_i x)\cos(\alpha_k x)<1$ следува $\log_{\cos(\alpha_i x)}\cos(\alpha_k x)>0$.

IV година

1. По бришењето на три последователни броја, од низата природни броеви од 1 до 2021, констатирано е дека аритметичката средина на преостанатите броеви е природен број. Определи ги броевите кои се избришани.

Решение. Збирот на сите природни броеви од 1 до 2021 е

$$S=\frac{2021\cdot 2022}{2}=2021\cdot 1011.$$

Нека $x-1, x, x+1$ се избришаните броеви. Тогаш аритметичката средина на преостанатите броеви е

$$N=\frac{2021\cdot 1011-(x-1+x+x+1)}{2021-3}=\frac{2021\cdot 1011-3x}{2018}.$$

Воведуваме смена $x=1011+y$, каде $-1009\le y\le 1009$ и добиваме

$$N=\frac{2021\cdot 1011-3(1011+y)}{2018}=\frac{2018\cdot 1011-3y}{2018}=1011-\frac{3y}{2018}.$$

Според условот на задачата N е природен број, а од ограничувањето за y дополнително имаме $-\frac{3}{2}\le\frac{3y}{2018}\le\frac{3}{2}$. Цели броеви во интервалот $[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$ се $-1,0,1$, од каде следува дека $y=0$ е единствената можна вредност за y. Според тоа, избришаните броеви се 1010, 1011 и 1012.

2. Во група од n луѓе има 2021 пријателства на по двјца луѓе (пријателството е симетрична релација). Познато е дека не постои човек со повеќе од 45 пријатели, како и дека постои човек кој има точно 45 пријатели. Ако со x_k го означиме бројот на пријателите кои ги има $k-$тиот човек, докажи дека

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\le 2024n+2018.$$

Решение. Бидејќи постои човек кој има 45 пријатели, заклучуваме дека $n\ge 46$. Понатаму, од условот на задачата следува $x_k\le 45$ за $k=1,2,...,n$ и

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=2\cdot 2021=4042. \qquad (1)$$

Оттука следува

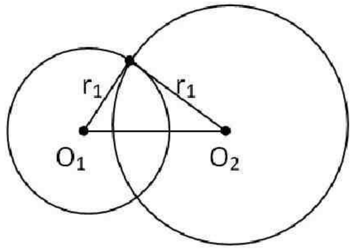
$$x_k^2-x_k=x_k(x_k-1)\le 45\cdot 44=1980. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\le 1980n+(x_1+x_2+...+x_n)=1980n+4042.$$

Останува да докажем,е дека $1980n+4042\le 2024n+2018$, што е еквивалентно со $n\ge 46$.

3. Определи го центарот на кружница со радиус r, која ја сече секоја кружница што минува низ точките $(-1,0)$ и $(1,0)$ под агол од 90°.



Решение. Две кружници се сечат под агол α ако аголот кој го формираат тангентите во пресечната точка е еднаков на α.

Ако дадена кружница минува низ точките $(-1,0)$ и $(1,0)$, тогаш нејзиниот центар лежи на $y-$оската. Да го означиме со $O(0,q)$ овој центар. Тогаш равенката на произволна кружница k која минува низ точките $(-1,0)$ и $(1,0)$ гласи

$$k: \quad x^2+(y-q)^2=q^2+1, \tag{1}$$

т.е. $k((0,q),\sqrt{q^2+1})$. Понатаму, две кружници $k_1(O_1,r_1)$ и $k_2(O_2,r_2)$ се сечат пода агол од 90° ако и само ако важи

$$r_1^2+r_2^2=\overline{O_1O_2}^2. \tag{2}$$

Нека центарот на кружницата со радиус $r>0$ која сече произволна кружница од облик (1) под агол од 90°, се наоѓа во точката (a,b). Од (2) имаме

$$r^2+q^2+1=a^2+(b-q)^2, \text{ т.е. } r^2+1=a^2+b^2-2bq.$$

Последното равенство треба да важи за секој q, а тоа е можно само за $b=0$. Сега со замена во последната равенка добиваме $a=\pm\sqrt{r^2+1}$. Конечно, центарот на бараната кружница е $(-\sqrt{r^2+1},0)$ или $(\sqrt{r^2+1},0)$.

4. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со

$$a_1=2, a_2=5 \text{ и } a_{n+2}=(5-n^3)a_{n+1}+(5+n^3)a_n, \text{ за } n\geq 1.$$

Дали постојат природни броеви m,n,t за кои важи $a_ma_n=a_t$?

Решение. Првите неколку членови на низата се $2,5,32,-31,1706,\dots$. Со помош на математичка индукција ќе докажеме дека $a_n\equiv 2(\text{mod}\,3)$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Јасно, $a_1,a_2\equiv 2(\text{mod}\,3)$. Нека претпоставиме дека $a_n,a_{n+1}\equiv 2(\text{mod}\,3)$. Тогаш

$$a_{n+2}\equiv 2(5-n^3)+2(5+n^3)=20\equiv 2(\text{mod}\,3).$$

Според тоа, $a_n\equiv 2(\text{mod}\,3)$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Сега добиваме $a_na_m\equiv 4\equiv 1(\text{mod}\,3)$ и $a_t\equiv 2(\text{mod}\,3)$, што значи дека не постојат природни броеви m,n,t за кои важи $a_ma_n=a_t$.