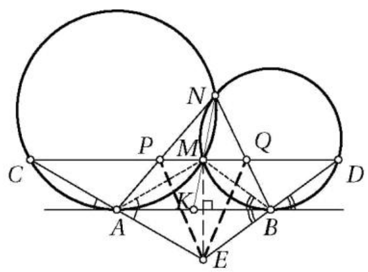
XLI олимпијада

1. Кружниците Γ_1 и Γ_2 се сечат во точките M и N. Нека правата AB ги допира кружниците Γ_1 и Γ_2 во точките A и B соодветно, така што точката M е поблиску до правата AB од точката N. Нека правата која минува низ точката M и е паралелна со правата AB по втор пат ги сече кружниците Γ_1 и Γ_2 во точките C и D соодветно. Правите CA и DB се сечат во точката E, правите CA и DB се сечат во точката E, правите AN и CD во точката P, а правите BN и CD во точката Q. Докажи дека $\overline{EP}=\overline{EQ}$.



Решение. Нека правите MN и AB се сечат во точката K. Од степенот на точката K во однос на кружниците Γ_1 и Γ_2 следува

$$\overline{KA}^2=\overline{KM}\cdot\overline{KN}=\overline{KB}^2,$$

т.е. $\overline{KA}=\overline{KB}$, што значи дека K е средина на отсечката AB. Но правата CD е паралелна на правата AB, што значи дека PQ е паралелна на AB. Сега, бидејќи K е средина на отсечката AB заклучуваме дека M е средина на отсечката PQ. Аголот меѓу тангентата AB и тетивата AM е еднаков на аголот над тетивата AM, т.е. $\measuredangle BAM=\measuredangle ACM$, а $\measuredangle ACM=\measuredangle EAB$ како агли со паралелни краци, па затоа

$$\measuredangle BAM=\measuredangle ACM=\measuredangle EAB$$

На потполно ист начин заклучуваме дека $\measuredangle ABM=\measuredangle EBA$, па затоа точките E и M се симетрични во однос на правата AB. Според тоа, $EM\perp AB\,||\,PQ$. Конечно, триаголниците EMP и EMQ се складни, па затоа $\overline{EP}=\overline{EQ}$.

2. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи, дека

$$(a-1+\tfrac{1}{b})(b-1+\tfrac{1}{c})(c-1+\tfrac{1}{a})\le 1.$$

Решение. Од $abc=1$ следува дека $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$ за некои $x,y,z>0$. Даденото неравенство се сведува на неравенството

$$\tfrac{x-y+z}{y}\cdot\tfrac{y-z+x}{z}\cdot\tfrac{z-x+y}{x}\le 1. \tag{1}$$

Ги воведуваме ознаките $p=z-x+y, q=x-y+z, r=y-z+x$ и неравенството (1) го запишуваме во обликот

$$8pqr\le(p+q)(q+r)(r+p). \tag{2}$$

Меѓу броевите p,q,r најмногу еден е негативен. Навистина, ако два од броевите p, q, r се негативни, на пример p и q, тогаш

$$0 > p+q = z-x+y+(x-y+z) = 2z > 0,$$

што е противречност, а ако сите три броја се негативни, тогаш

$$0 > p+q+r = z-x+y+(x-y+z)+(y-z+x) = x+y+z > 0,$$

што повторно е противречност. На пример, нека $p<0$. Тогаш левата страна на (2) е негативна, а десната страна е позитивна. Ако $p, q, r \geq 0$, тогаш неравенството (2) се добива со множење на неравенствата

$$p+q \geq 2\sqrt{pq}\,,\ q+r \geq 2\sqrt{qr} \text{ и } r+p \geq 2\sqrt{rp}\,.$$

3. Нека $n \geq 2$. На хоризонтална права се наоѓаат n болви но така што не се сите во една точка. За позитивен број λ *потез* се дефинира на следниов начин: Се избираат две болви кои се наоѓаат во произволни точки точки A и B при што точката A се наоѓа лево од точката B. Болвата од точката A скока во точката C, која на дадената права се наоѓа десно од B така што важи $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \lambda$.

Определи ги сите вредности на λ така што за секоја точка M на дадената права и произволен почетен распоред на $n-$те болви постои конечна низа потези после која сите болви ќе се најдат десно од точката M.

Решение. Ќе докажеме дека за $\lambda \geq \frac{1}{n-1}$ сите болви може да отидат произволно далеку во десно. Со d и δ да го означиме најголемото и најмалото растојание меѓу две болви во дадениот момент, соодветно. Јасно, $d \geq (n-1)\delta$. Ако крајната лева болва ја прескокне крајната десна болва, тогаш најмалото растојание меѓу две болви нема да се намали бидејќи $\lambda d \geq \delta$, а притоа позицијата на крајната десна болва се поместила во десно за најмалку δ. Со низа на вакви скокови на болвите се постигнува саканата цел.

Сега нека $\lambda < \frac{1}{n-1}$. На секоја болва нека и ја придружиме координатата на нејзината положба на реалната права. Со w_k и s_k да ги означиме координатата на крајната десна болва и збирот на координатите на сите болви по k скокови, соодветно. Ако во $(k+1)-$от скок болвата од точка a прескокне преку болвата во точка b во точка c, тогаш

$$s_{k+1}-s_k = c-a = \tfrac{1+\lambda}{\lambda}(c-b) \geq \tfrac{1+\lambda}{\lambda}(w_{k+1}-w_k)\,.$$

Ако за $k = 0,1,2,\dots,i-1$ ги собереме овие неравенства добиваме

$$nw_i \geq s_i \geq s_0 + \tfrac{1+\lambda}{\lambda}(w_i - w_0)\,,$$

т.е.

$$(\tfrac{1+\lambda}{\lambda} - n)w_i \leq \tfrac{1+\lambda}{\lambda} w_0 - s_0\,,$$

што покажува дека низата w_i е ограничена бидејќи $\frac{1+\lambda}{\lambda} - n > 0$. Според тоа, во овој случај сите болви не може да стасаат произволно далеку.

4. Маѓионичар има 100 карти нумерирани со броевите од 1 до 100. Тој ги става сите карти во три кутии – црвена, бела и сина, така што секоја кутија содржи барем една карта. Гледач од публиката прво избира две кутии, а потоа избира по една карта од секоја од избраните кутии и го соопштува збирот на броевите на избраните карти. Знаејќи го тој збир маѓионичарот ја определува кутијата од која не е избрана карта.

На колку начини маѓионичарот може да ги распореди картите во кутиите така што овој трик секогаш ќе биде успешен? (Два распореди се различни ако барем една карта не е двата пати ставена во иста кутија.)

Решение. Нека a, b, c и d се карти такви што a, b, c се во различни кутии и $c + d = a + b$. Тогаш картите c и d мора да се во иста кутија, бидејќи во спротивно ако гледачот го соопшти збирот $a + b$ маѓионичарот нема да може да даде сигурен одговор.

Нека претпоставиме дека за некој i картите $i, i+1, i+2$ се во различни кутии. Бидејќи $i + (i+3) = (i+1) + (i+2)$, заклучуваме дека картите i и $i+3$ се во иста кутија. Слично, $i-1$ е во иста кутија како $i+2$ (ако $i > 1$). Со едноставна индукција се докажува дека картите 1, 4, 7, ..., 100 се во една кутија, картите 2, 5, ..., 98 во друга и картите 3, 6, ..., 99 во трета кутија. Така во овој случај имаме 6 можни распореди.

Да претпоставиме дека не постојат три последователно нумерирани карти кои не се во различни кутии. Нека картата 1 е во кутијата A и нека b и c се картите со најмали броеви кои се во кутиите B и C, соодветно, при што на пример $b < c$. Картата $b-1$ е во кутијата A, па по претпоставка $b+1$ не е во C, што значи $c > b+1$. Ако сега $c < 100$, тогаш од

$$b + c = (b-1) + (c+1)$$

следува дека $c+1$ е во A, но тогаш од

$$b + (c+1) = (b+1) + c$$

следува дека $b+1$ е во C, што е противречност. Според тоа, $c = 100$, и тоа е единствената карта во C. Понатаму, од

$$99 + b = 100 + (b-1)$$

следува дека 99 е во B. Сега, кутијата A не може да содржи ниту една од картите k за $2 \le k \le 99$, бидејќи во спротивно од

$$99 + k = 100 + (k-1)$$

ќе следува дека $k-1$ е во C, што не е можно. Според тоа, во A е само картата 1, а картите 2, 3, ..., 99 се во B. И во овој случај имаме 6 можни распореди, па затоа вкупнот број распореди е 12.

5. Дали постои природен број n кој е делив со точно 2000 различни прости броеви, таков што бројот 2^n+1 е делив со n?

Решение. Со индукција по k ќе докажеме дека за секој $k\in\mathbb{N}$ постои $n_k\in\mathbb{N}$ кој има точно k различни прости делители и важи $n_k\,|\,2^{n_k}+1$ и $3\,|\,n_k$.

За $k=1$ бројот $n_1=3$ го задоволува горното тврдење. Нека претпоставиме дека $k\geq 1$ и $n_k=3^a m$, каде $3\nmid m$, па m има $k-1$ прости делители. Тогаш бројот $3n_k=3^{a+1}m$ има точно k прости делители и

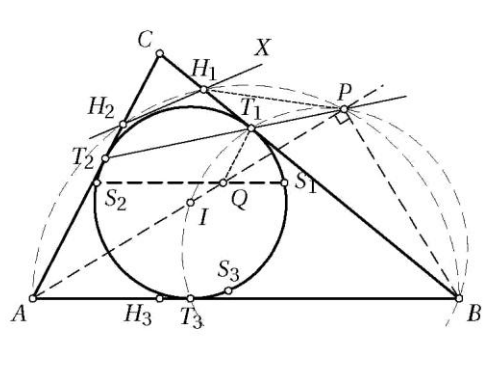
$$2^{3n_k}+1=(2^{n_k}+1)(2^{2n_k}-2^{n_k}+1)$$

е делив со $3n_k$, бидејќи $3\,|\,2^{2n_k}-2^{n_k}+1$. Ќе земеме прост број p кој не е делител на n_k и нека $n_{k+1}=3pn_k$. Доволно е да се земе p така што $p\,|\,2^{3n_k}+1$ и $p\nmid 2^{n_k}+1$.

Последното е можно, бидејќи за секој природен број $a>2$ постои прост број p кој е делител на $a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)$, но не е делител на $a+1$. Навистина, од $a^2-a+1=(a+1)(a-2)+3$ следува дека $\mathrm{NZD}(a+1,a^2-a+1)\,|\,3$ и $3^2\nmid a^2-a+1$, па за p може да се земе било кој прост делител на бројот a^2-a+1 поголем од 3.

6. Нека AH_1,BH_2,CH_3 се висините на остроаголниот триаголник ABC. Впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните BC,CA,AB во точките T_1,T_2,T_3, соодветно. Нека правите l_1,l_2,l_3 се симетрични на правите H_2H_3,H_3H_1,H_1H_2 во однос на правите T_2T_3,T_3T_1,T_1T_2, соодветно. Докажи дека правите l_1,l_2,l_3 определуваат триаголник чии темиња лежат на впишаната кружница на триаголникот ABC.

Решение. За аглите на триаголникот ABC ќе ги користиме стандардните ознаки α,β,γ. Нека I е центарот на впишаната кружница на триаголникот ABC и нека точките S_1,S_2,S_3 се симетрични на точките T_1, T_2,T_3 во однос на правите AI, BI,CI, соодветно. Ќе докажеме



дека бараниот триаголник е триаголникот $S_1S_2S_3$. Нека правата AI ја сече правата T_1T_2 во точката P. Бидејќи $\measuredangle BIP = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = \measuredangle BT_1P$, четириаголникот BIT_1P е тетивен, па затоа важи $\measuredangle APB = \measuredangle IT_1B = 90^\circ$. Оттука следува дека точките A, B, P, H_1 лежат на една кружница, па затоа

$$\measuredangle APH_1 = \measuredangle ABH_1 = \beta = 2\measuredangle IBT_1 = 2\measuredangle APT_1,$$

што значи дека правите H_1P и AP се симетрични во однос на правата T_1T_2. Според тоа, точката $Q \in l_3$ која е симетрична на точката H_1 во однос на T_1T_2 лежи на правата AP.
Сега,

$$\measuredangle T_1QS_1 = 2\measuredangle T_1QP = 2\measuredangle T_1H_1P = 2\measuredangle BAP = \alpha = \measuredangle CH_1H_2 = \measuredangle T_1H_1X$$

за произволна точка X на правата H_1H_2 (важи $H_2 - H_1 - X$), од каде заклучуваме дека правата QS_1 е симетрична на правата H_1H_2 во однос на T_1T_2, т.е. $S_1 \in l_3$. Аналогно важи $S_2 \in l_3$, $S_1, S_3 \in l_2$ и $S_2, S_3 \in l_1$.