*Лилјана Грибовска Пойовиќ*

# ЗА НЕКОИ ЕКСТЕРМАЛНИ ПРОБЛЕМИ

Неравенствата се интересна област за проучување. Колку повеќе се навлегува во неа, толку повеќе не тера на нови истражувања. Од неа, по својата убавина, особено се издвојуваат екстермалните проблеми. Овде ќе бидат презентирани неколку теореми и задачи од екстермалните проблеми. Користејќи ги нив, меѓу другото, ќе дадеме и доказ на познатото неравенство на Коши.

***Својсшво* 1.** Производот на два позитивни реални броја, чиј збир е константен, има најголема вредност тогаш кога множителите се еднакви меѓу себе.

За ова својство ќе презентираме два доказа.

**Доказ I.** Од условот на задачата, бидејќи збирот на двата позитивни реални броја (да ги означиме со $x$ и $y$) е константен, нека избереме дека изнесува $2c$. Нивниот производ $xy$ да го означиме со $z$. Значи, $x+y=2c$, додека $xy=z$. Заклучуваме дека $x$ и $y$ се решенија на квадратната равенка $u^2-2cu+z=0$. Од овде, бидејќи $y=2c-x$ и $y=\frac{z}{x}$ добиваме дека $2c-x=\frac{z}{x}$.

По средувањето се добива квадратната равенка $x^2-2cx+z=0$. Решенијата на оваа равенка ќе бидат реални броеви ако дискриминантата $D=4c^2-4z$ е позитивна, значи ако $4c^2-4z\geq 0$, односно $c^2-z\geq 0$. Од последното неравенство заклучуваме дека најголемото $z$ за кое неравенството е сè уште исполнето е $z=c^2$. Значи $xy=c^2$ и бидејќи $x+y=2c$, а $x$ и $y$ се позитивни, следува дека $x=y=c$, што требаше да се докаже.

**Доказ II.** Да ги зачуваме ознаките од претходниот доказ. Да земеме за $x$ и $y$ вредности $x_1$ и $y_1$ соодветно, за кои важи дека $x_1=y_1$, односно $x_1=y_1=c$. Ако дозволиме $x$ и $y$ да примат други вредности, $x_2$ и $y_2$ соодветно, при што $x_2\neq y_2$, тогаш ќе имаме $x_2\neq c$ и $y_2\neq c$. Тогаш постои $a\neq 0$ т.ш. $x_2=c+a$, $y_2=c-a$. Сега за производот $x_2y_2$ имаме $x_2y_2=(c+a)(c-a)=c^2-a^2<c^2$. Значи $x_2y_2<c^2$, а бидејќи $x_1y_1=c^2$, добиваме $x_1y_1>x_2y_2$. Заклучуваме дека приозводот на два позитивни реални броја, чиј збир е константен, има најголема вредност кога тие се еднакви меѓу себе, што произлегува од произволноста на $x_2$ и $y_2$.

Ова својство може да се воопшти за производ од повеќе реални броеви.

**ТЕОРЕМА 1.** Производот од $m$ позитивни реални броеви, чиј збир е константен, има најголема вредност кога множителите се еднакви меѓу себе.

**Доказ.** Нека $x, y, z, \ldots, t$ се $m$-те произволни позитивни реални броеви чиј збир е константен, еднаков на $m\cdot c$ (каде $c$ е константа). Нека тие ги примат вредностите $x_1, y_1, z_1, \ldots, t_1$, соодветно, при што $x_1=y_1=z_1=\ldots=t_1=c$. Тогаш нивниот производ ќе биде $P_1=x_1y_1z_1\ldots t_1=c^m$.

Сега, слично како во вториот доказ на претходната задача, нека $x_2$, $y_2$, $z_2$, ..., $t_2$ се такви вредности на $x$, $y$, $z$, ..., $t$, меѓу кои има и нееднакви, но такви што $x_2+y_2+z_2+...+t_2=mc$. Ќе докажеме дека $P_2=x_2y_2z_2...t_2<P_1$.

Бидејќи меѓу множителите $x_2, y_2, z_2, ..., t_2$ има и нееднакви, а нивниот збир е еднаков ма $mc$, некој од нив ќе биде помал, додека друг ќе биде поголем од $c$. Затоа, нека $x_2=c+h$ и $y_2=c-k$, каде што $h>0$ и $k>0$. Тогаш $x_2+y_2=2c+h-k$, додека $P_2=(c+h)(c-k)\cdot z_2\cdot...\cdot t_2=\left[c^2+c(h-k)-kh\right]\cdot z_2\cdot...\cdot t_2$. Ако ги замениме $x_2=c+h$ со $x_3=c$ и $y_2=c-k$ со $y_3=c+h-k$, тогаш, бидејќи $x_2+y_2=x_3+y_3$, збирот на сите множители нема да се измени.

Ќе покажеме дека при таа измена производот ќе се зголеми.

Навистина, $x_3y_3=c(c+h-k)=c^2+c(h-k)>c^2+c(h-k)-kh=x_2y_2$. На таков начин докажавме дека $P_3>P_2$ каде $P_3$ е производот на $x_3y_3z_2...t_2$. Така, производот $P_3$ ќе има поголема вредност ако еден од множителите ($x_3$) е еднаков на $c$.

Ако понатаму меѓу множителите на $P_3$ има нееднакви, тогаш меѓу нив има два такви што едниот е поголем од $c$, додека другиот е помал од $c$. Тогаш, постапката ќе ја повториме, ќе извршиме замена на тие два множитела како и во случај на производителот $P_3$, при што новиот производ ќе прими поголема вредност од претходниот, т.е. $P_4>P_3>P_2$. Притоа во $P_4$ има помалку множители различни од $c$, отколку во $P_3$.

Оваа постапка можеме да ја продолжиме сè додека сите множители не станат еднакви на $c$. На тој начин, зголемувајќи ги производите по вредност, ќе дојдеме до производот $P_1$, во кој сите множители се еднакви меѓу себе и еднакви на $c$. Тоа значи дека $P_1>P_2$, што требаше да се докаже.

Значи според дадените услови, производ со најголема вредност е оној чии множители се еднакви меѓу себе и притоа најголемата вредност на производот е $P_1=c^m$. ■

Користејќи ја Теорема 1, ќе го докажеме познатото неравенство на Коши.

**ТЕОРЕМА 2.** (Неравенство на Коши) Геометриската страна на $m$ позитивни реални броеви не е поголема од нивната аритметичка средина.

**Доказ.** Нека се дадени реалните броеви $a_1>0, a_2>0, a_3>0, ..., a_m>0$ и нека

$$a_1+a_2+a_3+...+a_m=ma, \tag{1}$$

каде $a$ е константа. Според Теоремата 1 имаме

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot...\cdot a_m\le a^m. \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot...\cdot a_m\le\left(\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_m}{m}\right)^m,$$

или

$$\sqrt[m]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot...\cdot a_m}\le\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_m}{m}, \tag{3}$$

што требаше да се докаже.■

Да забележиме дека од доказот на Теоремата 1 следува дека во (3) важи знакот за равенство само ако $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_m$.

Сега повторно ќе се вратиме на екстермалните проблеми. Во еден од нив ќе го примениме неравенството на Коши.

***Својство* 2.** Збирот од два позитивни реални броја чиј производ е константен, има најмала вредност кога собироците се еднакви меѓу себе.

Како и кај првото својство, ќе презентираме два доказа.

**Доказ 1.** Нека собироците $x$ и $y$ имаат збир еднаков на $z$, т.е. $x + y = z$ и нека $xy = c^2$, каде $c$ $(> 0)$ е константа. Значи $x$ и $y$ се решенија на квадратната равенка $u^2 - zu + c^2 = 0$, која има решенија во множеството реални броеви само ако дискриминантата $D$ е ненегативна, т.е. ако $z^2 - 4c^2 \geq 0$. Од овде заклучуваме дека $z^2$ ќе има најмала вредност ако $z = 2c$. Тогаш $D = 0$; значи $x = y = c$.

**Доказ 2.** Нека избереме вредности $x_1$ и $y_1$ на собироците $x$ и $y$ соодветно, при тоа нека $x_1 = y_1$. Тогаш е очевидно дека $x_1 = y_1 = c$ и $x_1 + y_1 = 2c$.

Да дозволиме други вредности $x_2$ и $y_2$ за $x$ и $y$, соодветно, при што $x_2 \neq y_2$. Ако земеме $x_2 = c + a$, каде $a > 0$, тогаш $y_2 = \dfrac{c^2}{c+a}$, бидејќи $x_2 y_2 = c^2$. Така имаме:

$$x_2 + y_2 = c + a + \frac{c^2}{c+a} > c + a + \frac{c^2}{c+a} - \frac{a^2}{c+a} = c + a + \frac{c^2 - a^2}{c+a} = c + a + c - a = 2c.$$

Значи $x_2 + y_2 > 2c$, односно $x_2 + y_2 > x_1 + y_1$. Од произволноста на $x_2$ и $y_2$ произлегува дека навистина збирот од два позитивни реални броја има најмала вредност, доколку производот им е константен, кога тие се еднакви меѓу себе.

Ова својство може да се воопшти за збир од повеќе реални броеви.

**ТЕОРЕМА 3.** Збирот од $m$ позитивни реални броеви, чиј производ е константен, има најмала вредност кога собироците се еднакви меѓу себе.

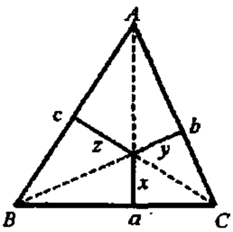
**Доказ.** Нека за реалните броеви $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, \ldots, a_m > 0$ имаме $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_m = b^m$, каде $b^m$ е константа. Според Теоремата 2, т.е. неравенството на Коши, имаме $\sqrt[m]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_m} \leq \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m}{m}$, од каде $\sqrt[m]{b^m} \leq \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m}{m}$ односно $b \leq \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m}{m}$. Знак на равенство имаме само кога $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_m$. На крајот имаме $mb \leq a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m$ и овој збир има најмала вредност само ако важи знак за равенство т.е. ако $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_m$, што требаше да се докаже. ■

Во продолжение ќе бидат приложени неколку примери на примена на погоре наведените својства и теореми.

***Пример 1.*** Во внатрешноста на $\Delta ABC$ да се најде точка, чиј производ на растојанија до страните на триаголникот е најголем.

*Решение.* Нека $x$, $y$, $z$ се растојанија од произволна точка $M$ во внатрешноста на $\Delta ABC$, до страните на триаголникот.

Бидејќи $P = P_{\Delta ABC} = P_{\Delta BMC} + P_{\Delta CMA} + P_{\Delta AMB}$ имаме $P = \frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2}$ т.е. $2P = ax + by + cz$ т.е. $ax + by + cz$ е константа. Производот $x \cdot y \cdot z$ ќе биде најголем тогаш кога $ax \cdot by \cdot cz$ е најголем, а ова е можно кога $ax = by = cz = \frac{2P}{3}$. Од овде следува дека $x = \frac{2P}{3a} = \frac{a \cdot h_a}{3a} = \frac{h_a}{3}$, соодветно $y = \frac{h_b}{3}$, односно $z = \frac{h_c}{3}$, каде $h_a$, $h_b$ и $h_c$ се висини во $\Delta ABC$. Значи, бараната точка е тежиштето на $\Delta ABC$.




***Пример 2.*** Да се покаже дека од сите триаголници со дадена плоштина $P$, рамностраниот има најмал периметар.

*Решение.* Според Хероновата формула, за плоштината на триаголникот имаме:

$$P = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}}$$

каде *a*, *b* и *c* се страните на триаголникот.

Од овде се добива

$$16P^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a). \qquad (1)$$

Периметарот $L = a + b + c$ можеме да го претставиме вака:

$$L = a + b + c = \frac{3}{4}\left(\frac{a+b+c}{3} + \frac{a+b-c}{1} + \frac{a+c-b}{1} + \frac{b+c-a}{1}\right) \qquad (2)$$

Да го запишеме равенството (1) во вид:

$$\frac{16P^2}{3} = \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a+b-c}{1} \cdot \frac{a+c-b}{1} \cdot \frac{b+c-a}{1} \qquad (3)$$

Од (3) гледаме дека производот на множителите, кои во (2) се јавуваат како собироци е константен. Затоа сумата $L$ прима најмала вредност кога тие множители се еднакви меѓу себе, т.е.

$$\frac{a+b+c}{3} = a+b-c = a+c-b = b+c-a$$

што е можно само кога $a = b = c$. Значи, навистина, рамностраниот триаголник е оној со најмал периметар.

***Пример 3.*** Да се најде најголемата вредност на функцијата $y = 3x^2 - 2x^3$, ако $0 < x < \frac{3}{2}$.

*Решение.* Дадената функција можеме да ја запишеме на следниов начин: $y = x^2(3-2x) = xx(3-2x)$. Тогаш според Теоремата 1 како производ од три ненегативни множитела $y$ чиј збир е константен (имено $x + x + (3-2x) = 3$), има најголема вредност кога множителите се еднакви меѓу себе т.е. при $x = 3 - 2x$, односно за $x = 1$. Значи, за $x = 1$ функцијата $y = 3x^2 - 2x^3$ ќе има најголема вредност $y_{\max} = 1$.

**Пример 4.** Да се најде најмалата вредност на збирот $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, ако $x>0$, $y>0$ и $x+y=2a$, каде $a$ е константа.

***Решение.*** Нека со $z$ го означиме збирот $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, тогаш него можеме да го напишеме и на следниов начин: $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{2a}{xy}$. Бидејќи $xy>0$ изразот $\frac{2a}{xy}$ има најмала вредност кога $xy$ има најголема вредност. Имено, дропка чиј броител е константен ќе има најмала вредност кога нејзиниот именител е најголем. Според Теорема 1 и условот на задачата $x+y=2a$, производот $xy$ ќе има најголема вредност ако $x=y=a$. Значи, најмалата вредност на $z$ ќе биде $z_{\min}=\frac{2a}{aa}=\frac{2}{a}$.

## *Задачи за самостојна работа*

**1.** Да се докаже дека, ако $mx+ny=2c$, каде $m$, $n$ и $c$ се позитивни константи, а $x>0$, $y>0$, тогаш производот $xy$ има најголема вредност за $x=\frac{c}{m}$, $y=\frac{c}{n}$.

**2.** Да се докаже дека збирот од два позитивни собироци $mx$ и $ny$, каде $m$ и $n$ се позитивни константи има мајмала вредност $2\cdot c\cdot\sqrt{mn}$, доколку производот $xy=c^2$, каде $c>0$ е константа.

**3.** Да се најде најголемата вредност на функцијата $y=4x^3-x^4$, ако $0<x<4$.

**4.** Да се најде најмалата вредност на $z=x+y$, ако $x>0$, $y>0$ и $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$, каде $a$ е константа.

**5.** Да се најде најмалата вредност на изразот $M=x^2+y^2+z^2$ ако $x+y+z=3a$, каде $x>0$, $y>0$, $z>0$ и $a$ е константа.

**6.** Да се докаже неравенството $(1-a)(1-b)(1-c)\geq 8abc$ ако $a+b+c=1$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

**7.** Да се докаже неравенството:

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\ldots+\sqrt{a_1a_n}+\sqrt{a_2a_3}+\ldots+\sqrt{a_{n-1}a_n}\leq\frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$$

каде $a_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

**8.** Да се докаже неравенството

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

каде $a_i$ се позитивни реални броеви.



Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија