О ВОЛОВИМА И МАТЕМАТИЧАРИМА

Ратко Тошић, Нови Сад

Питагорини волови

Славни грчки математичар Питагора (око 580 – 500. пре Христа) је најчувенији по својој теореми, која се данас учи већ у седмом разреду основне школе и једна је од најпознатијих теорема у математици. Ђаци су одувек смишљали разне начине да је боље запамте, а Бранислав Нушић у својој *Аутобиографији* даје и њену формулацију у стиховима:

Квадрат над хипотенузом,
то зна свако дете,
једнак је квадратима
над обе катете.

Та теорема је и пре Питагоре била позната Египћанима, Вавилонцима, Индусима и Кинезима, иако они нису знали општи доказ те теореме. Индијци су је користили при градњи храмова који су, према верским прописима, морали имати строго одређен геометријски облик и оријентацију у односу на стране света.

Када су стари Грци желели да се захвале боговима на нечему што су им ови подарили, приносили су у њихову славу жртве – заклане животиње. Према легенди, кад је Питагора открио своју чувену теорему, у знак захвалности принео је на жртву боговима стотину волова. Таква жртва називала се хекатомба (грчки: hekatómbē, од hekatón – сто и boûs – во). Неки у шали тиме објашњавају наводну чињеницу да волови ни данас не воле математику, мада, ако је веровати нашем писцу Радоју Домановићу, во уопште није глупа животиња и понекад је склон размишљању.

Питагора и његови следбеници веровали су у *метампсихозу*, тј. сељење душа: кад неко умре, душа му се пресели у неко друго, након тога рођено биће – човека или животињу.

Немачки песник Хајнрих Хајне који вероватно није волео математику, имајући у виду Питагорино учење о метампсихози, написао је једном приликом: „Ко зна? Можда се Питагорина душа, после многих сељакања, преселила у неког кандидата који пада на испиту, јер не зна да докаже Питагорину теорему, док се у професору који га испитује налази душа неког вола, којега је Питагора принео на жртву."

Архимедови волови

У грчком фолклору као пример „бесконачно великог" броја навођен је број зрна песка.

Своје дело „Псамит", које се доста слободно преводи као „Број зрна песка", Архимед из Сиракузе (287 – 212. пре Христа) посветио је владару Гелону, који је управљао Сиракузом, заједно са Хијероном.

У њему Архимед доказује да је нетачно да је број зрна песка већи од сваког броја. Чак и ако повећамо број свих постојећих зрна песка толико да она испуне цео свет, и онда њихов број неће бити већи од сваког броја. При томе он полази од Аристарховог хелиоцентричног система света (што показује да је он прихватао то учење), рачунајући да је пречник целог света отприлике онолико пута већи од пречника сунчевог система, колико је пута овај пречник већи од пречника земље.

При разматрању овог проблема, Архимед гради својеврстан бројевни систем. За основу узима „миријарду миријарди“, број који данас записујемо у облику 10^8 и посматра „периоде“, тј. бројеве од којих је сваки 10^8 пута већи од претходног. Последњи број до кога је вршио разматрања је $10^{8\cdot 10^{15}}$. По његовом рачуну, Васиона – сфера са пречником 10^{10} стадија, напуњена песком, садржала би мање од 10^{51} зрна песка.

Друго Архимедово дело у коме фигуришу велики бројеви, открива још једну страну Архимедове личности, као популаризатора, који је већ у трећем веку пре Христа антиципирао чувену Паскалову мисао да је математика толико озбиљна наука да не треба пропустити ниједну прилику да се она учини забавном.

У једном писму Ератостену из Александрије, Архимед је у облику епиграма послао проблем александријским математичарима.

Проблем се односи на број волова и крава бога Хелиоса (бога сунца код старих Грка). Његово стадо састојало се од бикова и крава, међу којим је било белих, црних, шарених и смеђих. Проблем се своди на решавање система диофантских једначина (названих тако касније, по грчком математичару Диофанту, из 3. века нове ере), тј. једначина са целобројним коефицијентима, чија се решења траже у скупу целих бројева. Тај систем се, после елементарних, али врло обимних израчунавања, своди на тзв. Пелову једначину

$$x^2 - 4729494y^2 = 1.$$

Решење ове једначине је:

$x = 109931986732829734979866232821433543901088049,$

$y = 50549485234315033074477819735540408986340.$

Враћајући се уназад, долазимо до решења оригиналног Архимедовог проблема. Минимално решење (укупан број стоке) публиковано је тек 1965. године и изражава се бројем од 206545 цифара. Само за записивање тога броја потребна је књига од стотинак страна. Јасно је да Архимед није могао да дође до тачног решења, које је морало да сачека компјутерску еру. Само решење нема никакав практичан значај, јер је укупан број атома у свемиру неупоредиво мањи од добијеног броја. Значај је у самом постављању проблема, који је представљао изазов за математичаре, и инспирисао их да, тражећи решење, развију математичке методе које су нашле примену у разним другим областима математике.

Њутнови волови

Три ливаде, нигде лада нема...
Из шумадијског фолклора

Тешко је, а можда и немогуће, наћи научника који је, као Њутн (1643 – 1727.),имао тако велики утицај на развој светске науке и културе. Математичар, професор, теолог, алхемичар, управник ковнице новца, проналазач инфинитезималног рачуна, открио је закон универзалне гравитације, законе кретања, корпускуларну теорију светлости. Полазећи од закона гравитације, који је он открио, створио је логичан и складан систем света. Већи део математичког апарата савремених природних наука заснива се на математици бесконачно малих величина, коју је разрадио Њутн.

Са Њутном је наука изашла из свог детињства. Према Ајнштајну, „он је у истој особи окупио експериментатора, теоретичара, мајстора и – ништа мање – уметника; у излагању се појављује пред нама снажан, уверен и усамљен; његова радост стварања и јувелирска тачност виде се у свакој његовој речи и сваком цртежу.“

Тај велики Њутн није пропуштао прилику да кад год је то могуће, учини математику интересантном. Свестан чињенице да је за „завођење“ у математику, корисније решавати задатке, него учити правила, он у својој *Општој аритметици* поставља следећи задатак:

Три ливаде, покривене једнако густом травом, која једнако брзо расте, имају површину $3\frac{1}{3}$ хектара, 10 хектара и 24 хектара. Прва исхрани 12 волова за 4 недеље, а друга 21 вола за 9 недеља. Колико волова може исхранити трећа ливада за 18 недеља?

Срећу нам квари трава која непрекидно расте, додуше једнако брзо, као права дисциплинована, сочна енглеска трава. Волови једу, а трава расте. Подразумева се да сви волови поједу исту количину траве у току једног дана.

У задатку се тражи број волова који могу на трећој ливади да пасу 18 дана. По обичају, означимо тај број са x.

У условима задатка, међутим, крије се још једна непозната величина, од које очигледно зависи одговор на питање постављено у задатку. То је брзина којом трава расте. Означимо зато са y количину траве која израсте у току једне недеље на једном хектару ливаде.

Уз наведене ознаке, прираст траве на првој ливади за једну недељу износи $3\frac{1}{3}y$, а за 4 недеље прираст је $4\cdot 3\frac{1}{3}y$.

Закључујемо да ће за 4 недеље волови на првој ливади појести $3\frac{1}{3}$ хектара траве, која се на почетку већ налазила на ливади, и траву која је у међувремену израсла, а то је укупно

$$3\frac{1}{3}+4\cdot 3\frac{1}{3}y.$$

То је трава коју је 12 волова појело за 4 недеље. Један во ће за једну недељу појести $4\cdot 12=48$ пута мање, тј.

$$\frac{10+40y}{3\cdot 48}=\frac{10+40y}{144}.$$

На исти начин закључујемо да ће на другој ливади за 9 недеља прираст траве бити $90y$, што значи да ће 21 во за 9 недеља појести $10+90y$ траве, а количина траве коју ће појести један во за једну недељу је:

$$\frac{10+90y}{9\cdot 21}=\frac{10+90y}{189}.$$

Како један во за једну недељу поједе исти количину траве, без обзира на којој се ливади налази, то је

$$\frac{10+40y}{144}=\frac{10+90y}{189}.$$

Решавањем ове једначине налазимо да је $y=\frac{1}{12}$.

Сада можемо израчунати колико ће траве појести један во на трећој ливади. Број волова на трећој ливади већ смо означили са x, одакле следи да један во на трећој ливади за недељу дана поједе

$$\frac{24+18\cdot 24y}{18x}=\frac{24+432y}{18x}$$

траве, а то је једнако паши једног вола за једну недељу на било којој ливади. Дакле, важи

$$\frac{24+432y}{18x}=\frac{10+90y}{189}.$$

Како је $y=\frac{1}{12}$, једначина постаје

$$\frac{24+432\cdot\frac{1}{12}}{18x}=\frac{10+90\cdot\frac{1}{12}}{189}.$$

Решење ове једначине је $x = 36$. Дакле, трећа ливада може хранити 36 волова 18 недеља.

Волови су и даље међу нама

Њутнов задатак је представљао узор за низ сродних задатака, који се могу наћи у литератури. Наводимо два таква задатка.

Задатак. На ливади расте трава. Ту је пуштено 9 волова да пасу и они су појели сву траву за 4 дана. Да је на ливаду пуштено 8 волова, они би појели сву траву за 6 дана.

а) Колико волова може да се храни непрекидно на ливади све време док расте трава?

б) Колико дуго би на тој ливади могло да пасе 7 волова?

Решење. а) Означимо са p порцију траве, тј. количину траве коју може да поједе један во за један дан, са d дневни прираст траве на ливади и са l количину траве на ливади на почетку. Из услова задатка следи да је

$$36p = l + 4d \tag{1}$$

и

$$48p = l + 6d. \tag{2}$$

Одузимајући прву једначину од друге, добијамо да је $2d = 12p$, тј.

$$d = 6p. \tag{3}$$

Значи да за један дан на ливади израсте 6 порција траве. Према томе, на ливади може да пасе неограничено 6 волова.

б) Нека је n тражени број дана. Из (1) и (3) следи да је

$$l = 36p - 4d = 36p - 24p = 12p.$$

Тада је $7np = l + nd$, тј. $7np = 12p + 6np$, односно $7n = 12 + 6n$, одакле је $n = 12$. Дакле, 7 волова ће да поједе сву траву на ливади за 12 дана.

Задатак. У језерце се улива поточић. Стадо од 183 вола може да попије сву воду из језерцета за један дан, а стадо од 37 волова могло би да осуши то језерце за 5 дана. За колико дана би сву воду из језерцета попио један во?

Решење. Ако означимо са x запремину воде у језеру, са y запремину воде која се за дан улије у језеро из поточића, а са z количину воде коју један во попије за један дан, услови задатка се записују у облику система једначина

$$x + y = 183z, \quad x + 5y = 5\cdot 37\cdot z.$$

Одузимајући прву једначину од друге, добијамо да је $4y = 2z$, тј.

$$z = 2y. \tag{4}$$

Заменом у прву једначину добијамо да је

$$x = 365y. \tag{5}$$

Ако један во попије воду из језера за t дана, тада је $x + ty = tz$, па је на основу (4) и (5), $(365 + t)y = 2ty$, одакле је $365 + t = 2t$, тј. $t = 365$. Дакле, један во би попио сву воду из језера за 365 дана.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија