Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 1998/99 година

О МОНОТОНОСТИ И ОГРАНИЧЕНОСТИ НИЗА $n \mapsto \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Милан Јовановић и Видан Говедарица, Бањалука

Увод

Реалан број $e(e = 2,71828\ldots)$ је у математичкој анализи од посебног значаја. Он се зове још и Ојлеров број, а логаритми са базом e природни логаритми. Важне класе тригонометријских и хиперболичких функција комплексне промјенљиве се обично дефинишу користећи експоненцијалну функцију са базом e. Ова функција се јавља и у познатој Ојлеровој формули

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

која повезује најважније константе разних математичких области (1 - аритметика, π - геометрија, $0, i$ - алгебра, e - анализа).

Број e се најчешће дефинише као гранична вриједност низа (x_n) чији је општи члан

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Постојање граничне вриједности овог низа се доказује тако што се покаже да је он монотон и ограничен. У ствари, докажу се сљедеће двије тврдње

Теорема 1 *Низ (x_n) је растући, тј.*

$$(\forall n \in N) x_n < x_{n+1}. \tag{1}$$

Теорема 2 *Низ (x_n) је ограничен одозго. Прецизније, вриједи*

$$(\forall n \in N) x_n > 3. \tag{2}$$

Наш циљ је да дамо што више доказа ових тврдњи. У ту сврху је прегледано тридесетак књига из математичке анализе и неких часописа, при чему неки од доказа које ћемо навести нису пронађени у тој литератури.

Наведимо сада неједнакости које користимо за доказе теорема 1 и 2. Међу њима су добро познате неједнакости (3) и (4) и мање познате неједнакости (5) и (6).

Ако је n природан број и $x > -1$, тада вриједи Бернулијева неједнакост

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \tag{3}$$

при чему за $x \neq 0$ и $n > 1$ вриједи строга неједнакост.

Ако је $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ n-торка позитивних реалних бројева и

$$G_n(a) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}, \quad A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

њихова геометријска, односно аритметичка средина тада је

$$G_n(a) \leq A_n(a). \tag{4}$$

Знак једнакости у (4) вриједи ако и само ако је $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Ако је l природан број и $0 < x < y$ тада је

$$lx^{l-1} \leq \frac{y^l - x^l}{y - x} \leq ly^{l-1}, \tag{5}$$

при чему за $l > 1$ вриједе строге неједнакости.

Ако је l природан број и $k \in \{1, 2, \ldots, l\}$ тада је

$$\left(1 + \frac{1}{l}\right)^k < 1 + \frac{k}{l} + \frac{k^2}{l^2}. \tag{6}$$

Ова неједнакост се лако доказује математичком индукцијом по k.

Докази теореме 1

Нека је n природан број већи од 1.

Доказ 1. Пошто је

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1},$$

користећи неједнакост (3) добијамо

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} > \left(1 - \frac{n}{n^2}\right) \frac{n}{n-1} = 1,$$

па вриједи (1).

Доказ 2. Слично претходном, али такође често у литератури имамо

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \frac{n+1}{n} \geq \left(1 - \frac{n-1}{n^2}\right) \frac{n+1}{n} = \frac{n^3+1}{n^3} > 1.$$

Доказ 3. Пошто је $1 - \frac{k}{n-1} < 1 - \frac{k}{n}$ за сваки $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, користећи биномни образац, имамо

$$x_{n-1} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{1}{(n-1)^k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left(1 - \frac{1}{n-1}\right)\left(1 - \frac{2}{n-1}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n-1}\right)}{k!}$$

$$< 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} = 1 + \frac{n}{k=1}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = x_n.$$

Доказ 4. Из претходног доказа, довољно је доказати да је

$$\binom{n-1}{k}\frac{1}{(n-1)^k} \leq \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$$

за сваки $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, што је еквивалентно са

$$1 - \frac{k}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k,$$

а вриједи на основу (3).

Доказ 5. Стављајући у десну страну неједнакости (5)

$$l = n,\ x = \frac{n+1}{n},\ y = \frac{n}{n-1},$$

добијамо

$$n(n-1)\left(\frac{n}{n-1}x_{n-1} - x_n\right) < nx_{n-1},$$

што је еквивалентно са (1).

Доказ 6. Пошто је

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n-1} \cdot \frac{n}{n+1}, \tag{7}$$

узимајући да је $k = n-1$ и $l = n^2 - 1$ у (6), добијамо

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} < \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{n}{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{n}{n+1} = 1.$$

Доказ 7. Користећи идентитет

$$x^n - nx + n - 1 = (1-x)(n - 1 - x - \cdots - x^{n-1}),$$

пошто су за $x \in (0,1)$ оба чиниоца на десној страни позитивна, слиједи да је

$$x^n - nx + n - 1 > 0$$

за сваки $x \in (0,1)$. Узимајући у овој неједнакости $x = \sqrt[n]{\frac{n-1}{n}}$ добијамо

$$\frac{n^2-1}{n^2} > \sqrt[n]{\frac{n-1}{n}},$$

што је након степеновања са n еквивалентно са (1).

Доказ 8. Из неједанкости (4) за n-торку $a = \left(1, \frac{n}{n-1}, \ldots, \frac{n}{n-1}\right)$, добијамо

$$x_{n-1} = 1 \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} < \left(\frac{1 + (n-1)\frac{n}{n-1}}{n}\right)^{n} = x_n.$$

Докази теореме 2

Доказ 1. Користећи биномни образац и неједнакост $k! \geq 2^{k-1}$ за природан број k, добијамо

$$x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} < 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Доказ 2. Из (6) за $k = l = n$ слиједи (2).

Доказ 3. На основу (3) је $\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n > 1 - \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, па имамо

$$1 > \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n > \frac{1}{2}\sqrt{x_{2n}}.$$

Одавде, користећи теорему 1, добијамо

$$x_n < x_{2n} < 4.$$

Слично можемо доказати да вриједи (2). Заиста је

$$1 > \left(1 - \frac{1}{36n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{6n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{6n}\right)^n > \frac{5}{6}\sqrt[6]{x_{6n}}$$

односно

$$x_n < x_{6n} < \left(\frac{6}{5}\right)^6 < 3.$$

Доказ 4. Из (7) користећи (3) добијамо за $k > 1$

$$\frac{x_{k-1}}{x_k} \geq \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)\frac{k}{k+1} = \frac{k(k+2)}{(k+1)^2}, \tag{8}$$

односно

$$\frac{x_{l-1}}{x_n} = \prod_{k=l}^{n} \frac{x_{k-1}}{x_k} \geq \prod_{k=l}^{n} \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \frac{l}{l+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} > \frac{l}{l+1},$$

па је

$$x_n < \frac{l+1}{l} x_{l-1}$$

за сваки природан број n и $l \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Одавде за $l = 2$ слиједи (2).

Доказ 5. Стављајући у лијеву страну неједнакости (5) $l = k-1$, $x = \frac{k+1}{k}$, $y = \frac{k}{k-1}$ добијамо за $k > 1$

$$(k-1)\frac{k^2}{(k+1)^2}x_k \leq k(k-1)\left(x_{k-1} - \frac{k}{k+1}x_k\right).$$

Ова неједнакост је еквивалентна са (8) па понављајући поступак из претходног доказа вриједи (2).

Доказ 6. Неједнакост (4) за n-торку $a = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \ldots, 1\right)$ даје за $n > 1$, $\sqrt[n]{\frac{1}{4}} < \frac{n-1}{n}$, одакле користећи неједнакост $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$ добијамо $x_n < 4$.

Користећи (4) можемо доказати и неједнакост (2), ако је $n \geq 6$. То добијамо за n-торку $a = (a_1, a_1, 1_1, a_2, a_2, a_2, 1, \ldots, 1)$ гдје су $a_{1/2} = \frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} - \sqrt[3]{\frac{1}{3}}}$ позитивни бројеви. Наравно, (2) вриједи и за $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (на основу теореме 1 или директно провјеравајући).

Доказ 7. Опет, користећи (4) за $(n+k+1)$-торку у којој се n пута појављује члан $\frac{n+1}{n}$, а $k+1$ пута члан $\frac{k}{k+1}$, добијамо да вриједи

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} < \left(\frac{n+1+k}{n+k+1}\right)^{n+k+1} = 1,$$

односно

$$x_n < \frac{k+1}{k}x_k$$

за све природне бројеве n и k. Одавде за $k = 5$ добијамо (2).

Доказ 8. Слично као што смо доказивали да је низ (x_n) растући можемо доказати да је низ (y_n) чији је општи члан $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ опадајући. На пример, користећи (3) имамо

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}\frac{n-1}{n} > \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\frac{n-1}{n} = 1.$$

Пошто је за $n \geq 5$

$$x_n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)x_n = y_n \leq y_5 < 3,$$

(2) вриједи за $n \geq 5$. Јасно је да (2) вриједи и за $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Задатак 1 Слично осталим доказима теореме 1, доказати да је низ (y_n) опадајући.

Напомена: Често се за доказивање монотоности и ограничености низова користи монотоност функција, гдје важну улогу има појам извода функције. Тако се теореме 1 и 2 лако доказују ако покажемо да су функције $x \longrightarrow \frac{ln(1+x)}{x}$ и $x \longrightarrow ln(1+x) - x$ опадајуће на $(0, 1]$. Међутим, ове доказе ћемо испустити зато што се, као што смо већ рекли, база e функције l_n најчешће дефинише као гранична вриједност низа (x_n).