ОДБРАНИ ОЛИМПИСКИ ЗАДАЧИ ОД АЛГЕБРА

Даниел Велинов[1], Самоил Малчески[2]
[1]Градежен факултет Скопје, Универзитет „Св. Кирил и Методиј “ во Скопје
[2]Меѓународен Славјански Универзитет во Свети Николе

Во оваа статија ќе се позанимаваме со динамичниот свет на решавање на алгебраски проблеми во контекст на олимписки натпревари. Алгебрата, како основна математичка област, игра многу важна улога во форми-рањето на аналитичките вештини на учениците кои учествуваат на меѓународните натпревари по математика.

Преку истражувањето на дадените алгебарски проблеми, авторите на оваа статија имаат за цел да им изложат на читателите одредени постапки кои се доста погодни за решавање на олимписки задачи од делот на алгебрата. Од низи, па се до работа со полиноми, ќе бидат прикажани различни техники кои често се користат за решавање на голем број задачи на ниво од меѓународни натпревари. Овој материјал има за цел да обезбеди вреден ресурс за учениците натпреварувачи, наставниците и математичките ентузијасти, користејќи поглед во длабините и сложеноста кои припаѓаат на елеганцијата и комплексноста на алгебарските олимписки проблеми.

Задача 1. За природен број d е дефинирана низата

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{ако } a_n \text{ е парен,} \\ a_n + d, & \text{инаку.} \end{cases}$$

За кои вредности на бројот d, постои природен број n, за кои $a_n = 1$?

Решение. Прво, да забележиме дека за парен d, низата од облик $a_n = 1 + nd$, е растечка низа и члeновите се непарни, па никогаш нема да стигне во 1. Нека d е произволен непарен број. Со помош на принципот на математичка индукција, може да се докаже дека $a_n < d$ ако a_n е непарен и $a_n < 2d$, ако a_n е парен. Според тоа, низата е ограничена и периодична. Нека r е најмалиот индекс таков што $a_r = a_s$, за некој $s \neq r$. Нека претпоставиме дека $r > 0$. Ако $a_r \leq d$, тоа значи дека a_r (па и a_s) е добиен со делење на претходниот член на низата со 2, т.е. $a_r = a_{r-1}/2$, $a_s = a_{s-1}/2$, од каде следува дека $a_{r-1} = a_{s-1}$, што е во контрадикција со минималноста на r.

Ако $a_r > d$, од $a_n \leq 2d$ следува дека a_r и a_s се добиени со собирање со d на претходните членови на низата, од каде следува дека $a_{r-1} = a_{s-1}$, што повторно е во контрадикција со минималноста на индексот r.

Следува, $r = 0$ и $a_s = a_0 = 1$, за некој $s > 0$, за сите непарни d.

Задача 2. Најди барем еден цел број a, таков што за полиномот $P(x) = x^5 + ax$ тврдењето: „Ако $n | P(k) - P(l)$, тогаш $n | k - l$, за сите $k, l \in \mathbb{Z}$ “, важи само за конечно многу природни бреови n, меѓу кои е и $n = 95$.

Решение. Еден таков број е $a = -95^4$.

За овој број важи $P(95) = P(0) = 0$, па n го дели $P(95) - P(0)$ за секој природен број n и n не е делител на $95 - 0$ ако n не е делител на бројот 95. Затоа тврдењето од задачата важи само за конечно многу природни броеви n.

Ќе покажеме дека ова тврдење важи за $n = 95$. Нека $k, l \in \mathbb{N}$ се такви што $95 | P(k) - P(l)$. Бидејќи $95 | a$, заклучуваме дека $95 | k^5 - l^5$. Наша цел е да покажеме дека $95 | k - l$, па е доволно да покажеме дека $5 | k - l$ и $19 | k - l$.

Користејќи ја малата теорема на Ферма, имаме $k^5 \equiv k \pmod 5$ и $l^5 \equiv l \pmod 5$, па заклучуваме дека $5 | k - l$, бидејќи $5 | k^5 - l^5$.

Исто така од малата теорема на Ферма, ако е k заемно прост со 19 важи $k^{18} \equiv 1 \pmod{19}$, па $k^{54} = (k^{18})^3 \equiv 1 \pmod{19}$. Затоа $k^{55} \equiv k \pmod{19}$, при што не е важно дали k е делив со 19. Сосема аналогно, $l^{55} \equiv l \pmod{19}$. Заклучуваме дека $k \equiv (k^5)^{11} \equiv (l^5)^{11} \equiv l \pmod{19}$, т.е. $19 | k - l$, што и требаше да се докаже.

Задача 3. Одреди ги сите низи $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, така што за сите $n \in \mathbb{N}$ важи

$$a_n + a_{n+1} = a_{n+2} a_{n+3} - 200.$$

Решение. Со одземање на равенствата

$$a_n + a_{n+1} = a_{n+2} a_{n+3} - 200$$
$$a_{n+1} + a_{n+2} = a_{n+3} a_{n+4} - 200,$$

добиваме

$$a_n - a_{n+2} = a_{n+3}(a_{n+2} - a_{n+4}) .$$

Бидејќи $a_{n+3} > 0$, имаме

$$a_n > a_{n+2} \text{ ако и само ако } a_{n+2} > a_{n+4}$$

$$a_n = a_{n+2} \text{ ако и само ако } a_{n+2} = a_{n+4}$$

$$a_n < a_{n+2} \text{ ако и само ако } a_{n+2} < a_{n+4} .$$

Во првиот случај, би имале $a_n > a_{n+2} > a_{n+4} > ...$ па мора да постои член од низата кој е помал од 1, што е контрадикција.

Затоа мора да важи:

$a_n = a_{n+2}$ за сите непарни n или $a_n < a_{n+2}$ за сите непарни n

и

$a_n = a_{n+2}$ за сите парни n или $a_n < a_{n+2}$ за сите парни n.

Значи, треба да разгледаме четири случаи:

1) $a_n < a_{n+2}$, за сите природни броеви n. Тогаш постои n таков што $a_{n+2} > 15$ и $a_{n+3} > 15$, па важи

$$(a_{n+2} - 1)(a_{n+3} - 1) \geq 225 > 201 ,$$

па тогаш

$$\begin{aligned} a_n + a_{n+1} &< a_{n+2} + a_{n+3} \\ &= a_{n+2}a_{n+3} - (a_{n+2} - 1)(a_{n+3} - 1) + 1 \\ &< a_{n+2}a_{n+3} - 200 \end{aligned}$$

што е контрадикција.

2) $a_n = a$ за сите непарни n и $a_n = b$ за сите парни n. Од дадениот услов ја добиваме равенката $a + b = ab - 200$, која може да се запише во обликот $(a-1)(b-1) = 201 = 3 \cdot 67$. Решенијата се $(a,b) \in \{(2,202),(202,2),(4,68),(68,4)\}$.

3) $a_n = b$ за сите непарни n и $a_n < a_{n+2}$ за сите парни n. Тогаш

$$\begin{aligned} a_4 - a_2 &= a(a_6 - a_4) = a^2(a_8 - a_6) = ... \\ &= a^{m-1}(a_{2m+2} - a_{2m}) = ..., \end{aligned}$$

што е можно само ако $a = 1$. Нека означиме дека $d = a_4 - a_2$. Тогаш $a_{2m+2} - a_{2m} = d$, за сите природни броеви m, па затоа $a_{2m} = a_2 + (m-1)d$. Од почетниот услов добиваме дека $d = 201$. За $b \in \mathbb{Z}$, низата $1, b, 1, b+201, 1, b+402, 1, ...$, го задоволува условот на задачата.

4) $a_n < a_{n+2}$ за сите непарни броеви n и $a_n = a$ за сите парни броеви n. Сосема аналогно како и во претходниот случај го добиваме решението $a, 1, a+201, 1, a+402, 1, \dots$, каде $a \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. Нека $n \geq 2$ е природен број и нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ се реални броеви различни од нула такви што $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$. Докажи дека постојат различни природни броеви i и j $(i, j \leq n)$ такви што $\frac{1}{2} \leq |\frac{x_i}{x_j}| \leq 2$.

Решение. Доколку помеѓу дадените броеви се наоѓаат два еднакви броеви, тогаш можеме да најдеме два такви броеви. Нека претпоставиме дека сите броеви се различни и без губење на општоста претпоставуваме дека $x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Бидејќи збирот на сите броеви е еднаков на нула постои индекс k $(1 < k < n)$ таков што $x_k > 0 > x_{k+1}$. Важи

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_k| = |x_{k+1}| + |x_{k+2}| + \dots + |x_n|.$$

Нека претпоставиме дека не постојат i и j со бараното својство. За $i = 1, 2, \dots, k-1$ важи

$$\frac{|x_i|}{|x_{i+1}|} > 1 > \frac{1}{2},$$

што значи мора да важи

$$\frac{x_i}{x_{i+1}} > 2.$$

Тогаш важи

$$x_i < \frac{1}{2} x_{i-1} < \frac{1}{2^2} x_{i-2} < \dots < \frac{1}{2^i} x_1, \text{ за } i = 1, 2, \dots, k-1.$$

На сличен начин за негативните броеви може да се докаже дека

$$|x_j| < \frac{1}{2^{n-j}} |x_n|, \text{ за } j = k, k+1, \dots, n.$$

Конечно, имаме

$$\begin{aligned} |x_1| &< |x_1| + |x_2| + \dots + |x_k| = |x_{k+1}| + |x_{k+2}| + \dots + |x_n| \\ &< |x_n| \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-k+1}}\right) \\ &< 2|x_n|. \end{aligned}$$

На ист начин, од друга страна имаме

$$\begin{aligned} |x_n| &< |x_k| + |x_{k+1}| + \dots + |x_n| \\ &= |x_1| + |x_2| + \dots + |x_k| < |x_1| \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &< 2|x_1|. \end{aligned}$$

Конечно,

$$\frac{1}{2} \leq \left|\frac{x_1}{x_n}\right| \leq 2.$$

Задача 5. Во зависност од природниот број k, одреди го најмалиот реален број D_k таков што

$$(abc)^2 + (bcd)^2 + (cda)^2 + (dab)^2 \leq D_k$$

за сите ненегативни реални броеви a, b, c, d за кои важи

$$a^k + b^k + c^k + d^k = 4.$$

Решение. Четворката $(a,b,c,d) = (1,1,1,1)$ го задоволува дадениот услов за секој природен број k, што значи дека $D_k \geq 4$, за секој природен број k. Ќе докажеме дека $D_k = 4$, за сите $k \geq 2$. Ако $k \geq 2$, тогаш имаме,

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \leq \sqrt[k]{\frac{a^k+b^k+c^k+d^k}{4}} = 1,$$

односно

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4.$$

Ставајќи ги смените $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$, $w = d^2$, претходното неравенство го добива обликот

$$x + y + z + w \leq 4,$$

а бараното неравенство го добива обликот

$$xyz + xyw + xzw + yzw \leq 4. \qquad (*)$$

Доволно е да докажеме дека

$$16(xyz + xyz + xzw + yzw) \leq (x + y + z + w)^3.$$

Важи

$$(x - y + z - w)^2 \geq 0,$$

што може да се запише како

$$(x + y + z + w)^2 \geq 4(xy + yz + zw + wx). \qquad (**)$$

Исто така важи

$$(x + y + z + w)(xy + yz + zw + wx) \geq 4(xyz + xyw + xzw + yzw). \qquad (***)$$

Последното неравенство е еквивалентно на неравенството

$$(x^2 + z^2)(y + w) + (y^2 + w^2)(x + z) \geq 2(xyz + xzw + xyw + yzw),$$

кое се добива со користење на неравенството помеѓу аритметичката и геометриската средина

$$x^2 + z^2 \geq 2xz \quad \text{и} \quad y^2 + w^2 \geq 2yw .$$

Со множење на неравенствата (**) и (***), го добиваме бараното неравенство (*).

Во случајот $k=1$, важи $D_k > 4$. Навистина, со замена на четворката $(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4},0)$, добиваме $D_1 \geq (\frac{4}{3})^6 > 4$. Ќе докажеме дека D_1 е всушност еднаков на тој број.

Нека претпоставиме за некои четири реални броеви a,b,c,d важи $a+b+c+d=1$ и $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$. Нека означиме $a'=a$, $b'=b+\frac{d}{2}$, $c'=c+\frac{d}{2}$, $d'=0$. Со смената $(a,b,c,d) \to (a',b',c',d')$, изразот на левата страна на даденото неравенство се зголемува. Навистина,

$$\begin{aligned}(a'b'c')^2 + (a'b'd')^2 + (a'c'd')^2 + (b'c'd')^2 &= a^2 (b+\tfrac{d}{2})^2 (c+\tfrac{d}{2})^2 \\ &= a^2 (b^2 + bd + \tfrac{d^2}{4})(c^2 + cd + \tfrac{d^2}{4}) \\ &\geq a^2b^2c^2 + a^2b^2cd + a^2bdc^2 + a^2bdcd \\ &\geq (abc)^2 + (abd)^2 + (acd)^2 + (bcd)^2\end{aligned}$$

при што последното неравенство важи заради подредувањето на броевите a,b,c,d. Од ова следува дека левата страна на даденото неравенство го достигнува својот максимум кога еден од броевите е еднаков на нула. Без губење на општоста, можеме да претпоставиме дека $d=0$. Меѓутоа, тогаш важи

$$(abc)^2 + (abd)^2 + (acd)^2 + (bcd)^2 = (abc)^2 \leq (\tfrac{a+b+c}{3})^6 = (\tfrac{4}{3})^6 ,$$

што значи дека $D_1 = (\frac{4}{3})^6$.

Задача 6. Одреди го најмалиот реален број C таков што за сите позитивни реални броеви a_1,a_2,a_3,a_4 и a_5 може да се изберат меѓусебно различни индекси i,j,k,l така што

$$\left| \frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l} \right| \leq C .$$

Решение. Одговорот е $C=\frac{1}{2}$. Да ги разгледаме броевите $1,2,2,2,n$, каде $n>5$. Сите дропки кои можеме да ги добиеме од тие броеви се

$$\frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \frac{1}{2} < 1 < 2 < \frac{n}{2} < n .$$

Најмалите две дропки не можеме да ги добиеме истовремено (и двете го користат бројот n). Разликата на било која дропка поголема од $\frac{1}{2}$ со било која друга од дадените дропки е барем $\frac{1}{2}$, па најмалата разлика која може да се добие е $\frac{1}{2}-\frac{2}{n}$. Ова ни покажува дека $C\geq\frac{1}{2}-\frac{2}{n}$, за секој природен број n, од каде следува дека $C\geq\frac{1}{2}$.

Нека a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 се произволни реални броеви. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $a_1\leq a_2\leq a_3\leq a_4\leq a_5$. Броевите

$$\frac{a_1}{a_2},\frac{a_3}{a_4},\frac{a_1}{a_5},\frac{a_2}{a_3},\frac{a_4}{a_5},$$

се наоѓаат во интервалот $[0,1]$. Бидејќи се пет вакви дропки, од принципот на Дирихле три се наоѓаат во еден од интервалите $[0,\frac{1}{2}]$ или $[\frac{1}{2},1]$. Но, тоа значи дека некои две последователни (при што првата и последната дропка ги сметаме последователни) се наоѓаат во тој интервал. Броевите во тие две дропки имаат различни индекси и дропките се оддалечени (нивната апсолутна разлика) е најмногу $\frac{1}{2}$. Со ова добиваме дека $C\leq\frac{1}{2}$, па доказот е завршен.

Задача 7. Докажи дека за секој $x\in[\frac{1}{111},\frac{110}{111}]$, можеме да ги избереме броевите $a_i\in\{-1,1\}$, $i=1,2,...,101$, такви што

$$|x_{101}-x|\leq\frac{1}{402},$$

при што

$$x_0=1,\ x_k=(x_{k-1}+1)^{a_k},\ \text{за}\ k=1,2,...,101.$$

Решение. За природниот број n, нека S_n го означува множеството од сите можни вредности кои x_n може да ги прими за различен избор на броевите a_i, $1\leq i\leq n$. На пример

$$S_1=\{\tfrac{1}{2},2\},\quad S_2=\{\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},\tfrac{3}{2},3\},\quad S_3=\{\tfrac{1}{4},\tfrac{2}{5},\tfrac{3}{5},\tfrac{3}{4},\tfrac{4}{3},\tfrac{5}{3},\tfrac{5}{2},4\},\ \ldots$$

Да забележиме дека за секој $x\in S_n$ и бројот $x+1$ и бројот $\frac{1}{x+1}$, припаѓаат на множеството S_{n+1}. Понатаму, еден од тие два броја е помал од 1, а другиот е поголем од 1. Затоа секое множество S_n има парен број на елементи.

За природниот број n, нека

$$S_n=\{a_1,a_2,...,a_{2m}\}, \text{ каде } a_1<a_2<...<a_{2m}$$

и

$$S_{n+1}=\{b_1,b_2,...,b_{2k}\}, \text{ каде } b_1<b_2<...<b_{2k}.$$

Следниве тврдења, лесно можат да се докажат со помош на математичка индукција:

Тврдење 1. $m=2^{n-1}$, $k=2^n$ и затоа $|S_{n+1}|=2|S_n|$.

Тврдење 2. $a_1=\frac{1}{n+1}$, $a_m=\frac{n}{n+1}$, $a_{m+1}=\frac{n+1}{n}$, $a_{2m}=n+1$.

Тврдење 3. $b_1<b_2<...<b_{2m}<1<b<b_{2m+1}<...<b_{4m}$.

Тврдење 4. $a_i=\frac{1}{a_{2m+1-i}}$, $b_i=\frac{1}{b_{4m+1-i}}$.

Тврдење 5. $b_i=\frac{1}{1+a_{2m+1-i}}$, за $1\le i\le 2m$.

Тврдење 6. $b_i=\frac{1}{b_{2m+1-i}}$, за $1\le i\le 2m$.

Користејќи ги Тврдење 5 и Тврдење 4, добиваме

$$b_i=\frac{a_i}{1+a_i}, \text{ за } 1\le i\le 2m. \qquad (*)$$

За сите природни броеви $n\ge 2$, ќе докажеме дека $a_{i+1}-a_i\le\frac{1}{2n-1}$ за сите $1\le i\le m$. Ова очигледно е вистина за $n=2$.

Како индуктивна претпоставка, нека претпоставиме дека тврдењето е точно за некој природен број n. Ќе докажеме дека ова тврдење важи и за $n+1$, т.е. ќе докажеме дека

$$b_{i+1}-b_i\le\frac{1}{2n+1} \text{ за сите } 1\le i\le 2m.$$

Користејќи го (*) и *Тврдење* 2, заклучуваме дека

$$b_m=\frac{n}{2n+1}, \quad b_{m+1}=\frac{n+1}{2n+1}.$$

Оттука,

$$b_{m+1}-b_m=\frac{1}{2n+1},$$

па тврдењето важи за $i=m$. Ќе докажеме дека тврдењето важи за $i<m$. Имаме

$$b_{i+1}-b_i=\frac{1}{a_{i+1}+1}-\frac{1}{a_i+1}=\frac{a_{i+1}-a_i}{(1+a_i)(1+a_{i+1})}.$$

Од индуктивната претпоставка имаме дека $a_{i+1}-a_i\le\frac{1}{2n-1}$, па од *Тврдење* 2 заклучуваме дека $a_i\ge\frac{1}{n+1}$ и $a_{i+1}\ge\frac{1}{n+1}$. Затоа,

$$b_{i+1}-b_i=\frac{a_{i+1}-a_i}{(1+a_i)(1+a_{i+1})}\le\frac{\frac{1}{2n-1}}{(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n+1})}<\frac{1}{2n+1},$$

при што последното неравенство е еквивалентно на неравенството $2n^2-5>0$ кое очигледно е точно за сите $n\ge 2$. Конечно, ќе докажеме дека $b_{i+1}-b_i\le\frac{1}{2n+1}$, за $m<i<2m$.

Од *Тврдење* 6 следува дека

$$b_{i+1}-b_i=\frac{1}{b_j}-\frac{1}{b_{j+1}}=\frac{b_{j+1}-b_j}{(1+b_j)(1+b_{j+1})}<b_{j+1}-b_j<\frac{1}{2n+1},$$

каде $j=2m-i<m$.

За $n=101$, нека $S_{101}=\{c_1,c_2,...,c_s\}$, каде $c_1<c_2<...<c_s$.

Бидејќи $c_1=\frac{1}{102}$ и $c_s=\frac{101}{102}$, знаеме дека $c_1-\frac{1}{111}<\frac{1}{201}$ и $\frac{110}{111}-c_s<\frac{1}{201}$.

Па, во множеството $S'_n=\{c_0,c_1,c_2,...,c_s,c_{s+1}\}$, каде $c_0=\frac{1}{111}$ и $c_{s+1}=\frac{110}{111}$ важи

$$c_{i+1}-c_i\le\frac{1}{201},\text{ за } 0<i\le s.$$

За дадениот $x\in[\frac{1}{111},\frac{110}{111}]$, нека j е индекс таков што $c_j\le x\le c_{j+1}$. Бидејќи $c_{j+1}-c_j\le\frac{1}{201}$, заклучуваме дека $|x-c_j|\le\frac{1}{402}$ или $|x-c_{j+1}|\le\frac{1}{402}$.