ММО 1999

1. Во едно множество од 21 број, збирот на произволни 10 броја е помал од збирот на останатите 11 броја. Докажи дека сите броеви се позитивни.

Решение. Броевите да ги означиме со $a_1, a_2, \dots, a_{21}$. Без губење на општоста претпоставуваме дека $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_{21}$. Тогаш

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{11} > a_{12} + a_{13} + \dots + a_{21} \ge a_2 + a_3 + \dots + a_{11}.$$

Од овде следува $a_1 > 0$, а исто така и $a_2 > 0, a_3 > 0, \dots, a_{21} > 0$.

2. Дадени се 13, наизглед еднакви топчиња меѓу кои само едно е дефектно (потешко или полесно). Како може со три мерења на вага без тегови да се открие кое топче е дефектно? (Не мора да се најде дали е потешко или полесно).

Решение. На вагата ставаме 4 топчиња на едната страна и 4 топчиња на другата страна. Можни се два случаи:

1. Вагата е во рамнотежа.

Во овој случај дефектното топче сигурно е меѓу останатите 5 топчиња. Во второто мерење на едната страна од вагата ставаме произволни 3 од петте топчиња, а од другата страна на вагата ставаме произволни 3 исправни топчиња. Пак се можни два случаи:

1.1. Ако вагата е во рамнотежа, тогаш избраните три топчиња се исправни, па едно од останатите две топчиња е дефектно. Затоа во третото мерење споредуваме едно од двете останати топчиња со едно исправно топче.

1.1.1. Ако вагата е во рамнотежа, тогаш останатото од двете топчиња е дефектно и за него не знаеме дали е потешко или полесно од исправните.

1.1.2. Ако пак вагата не е во рамнотежа, тогаш избраното топче од двете топчиња е дефектно.

1.2. Ако вагата не е во рамнотежа, тогаш едно од трите избрани топчиња е дефектно. Освен тоа од ова мерење знаеме дали дефектното топче е потешко или полесно од исправните. Во третото мерење споредуваме произволни 2 од тие 3 топчиња.

1.2.1. Ако вагата не е во рамнотежа, тогаш·потешкото од тие две топчиња е дефектно, ако дефектното топче е потешко, и обратно ако дефектното топче е полесно, тогаш плесното од тие две топчиња е дефектно.

1.2.2. Ако пак избраните две топчиња се еднакво тешки, тогаш дефектното топче е останатото.

2. Вагата не е во рамнотежа.

Тогаш едно од избраните 8 топчиња не е исправно, а останатите 5 топчиња се исправни. Во второто мерење на едната страна од вагата ставаме 3 топчиња од потешката страна и 2 топчиња од полесната страна, а од другата страна ѓи ставаме и петте исправни топчиња. Можни се три случаи:

2.1. Ако петте исправни топчиња се полесни, тогаш дефектното топче е потешко од исправните и се наоѓа меѓу трите топчиња избрани од потешката страна. Затоа со третото мерење може да го најдеме дефектното топче аналогно како во претходниот случај **1.**, споредувајќи две од тие три топчиња.

2.2. Ако петте исправни топчиња се потешки, тогаш дефектното топче е полесно од исправните и се наоѓа меѓу двете топчиња избрани од полесната страна. Затоа во третото мерење ги споредуваме овие две топчиња кои се со различна тежина и полесното од нив е дефектно.

2.3. Ако вагата е во рамнотежа, тогаш дефектното топче се наоѓа меѓу преостанатите две од полесната страна или пак останатото едно топче од потешката страна. Во третото мерење ги споредуваме двете топчиња од полесната страна. Ако тие се со различна тежина, тогаш полесното од нив е дефектното топче. Ако пак тие се еднакво тешки, тогаш тие две топчиња се исправни, па тогаш останатото топче од потешката страна е дефектното топче.

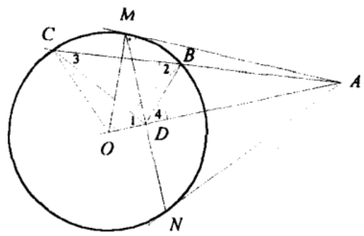
3. Од точката A што се наоѓа надвор од кружницата k, повлечени се две тангенти на кружницата k, AM и AN (M, N се допирните точки) и секанта што кружницата k ја сече во две точки B и C. Нека D е средина на MN. Докажи дека MN е симетрала на аголот BDC.

Решение. Воведуваме ознаки $\angle ODC = \angle 1, \angle OBC = \angle 2, \angle OCB = \angle 3$ и $\angle ADB = \angle 4$. Триаголникот AMO е правоаголен па $\overline{AM}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AO}$ и од равенството

$$\overline{AM}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

добиваме

$$\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AO} : \overline{AC}.$$



Па од овде добиваме дека $\Delta ABC \sim \Delta AOC$ од што следува $\angle 4 = \angle 3$. Со помош на последното равенство добиваме

$$\angle ODB = 180^\circ - \angle 4 = 180^\circ - \angle 3 = 180^\circ - \angle OCB \Rightarrow \angle ODB + \angle OCB = 180^\circ.$$

Значи четириаголникот $ODBC$ е тетивен па $\angle 1 = \angle 2$. $\angle 2 = \angle 3$ бидејќи ΔBCO е рамнокрак. Од погорните равенства $\angle 1 = \angle 4$ па заради тоа

$$\angle CDM = 90^\circ - \angle 1 = 90^\circ - \angle 4 = \angle MDB$$

што и требаше да се докаже.

4. Дали постојат 100 прави во една рамнина така што тие да имаат вкупно 1999 пресечни точки? Одговорот да се образложи.

Решение. Ќе докажеме дека одговорот е позитивен. Правите ќе ги поставуваме така што било кои три прави немаат заедничка точка. Да пртпоставиме дека има p_1 прави паралелни меѓу себе, други p_2 прави паралелни меѓу себе, ..., p_k прави паралелни меѓу себе, при што $p_1+\ldots+p_k \le 100$ и $p_1, p_2, \ldots, p_k \ge 2$. За бројот на пресечните точки важи равенството

$$\binom{100}{2} = 1999 + \binom{p_1}{2} + \ldots + \binom{p_k}{2}, \qquad (1)$$

па проблемот се сведува на наоѓање на броевите

$$p_1, \ldots, p_k \ge 2, \quad p_1+\ldots+p_k \le 100,$$

така што да важи (1), т. е.

$$2951 = \binom{p_1}{2} + \ldots + \binom{p_k}{2}.$$

Бидејќи $\binom{77}{2} < 2953 < \binom{78}{2}$, земаме $p_1 = 77$, па

$$25 = \binom{p_2}{2} + \ldots + \binom{p_k}{2}.$$

Очигледно доволно е да се земе $k=3$, $p_2=6$ и $p_3=5$.

Затоа земаме 77 паралелни прави, други 6 паралелни прави, нови 5 паралелни прави и уште 12 прави кои не се паралелни ниту меѓу себе ниту со претходните прави. Секако при разместувањето може да се постигне да кои било три прави немаат заедничка точка.

5. Ако a, b и c се позитивни реални броеви такви што $a^2+b^2+c^2=1$, тогаш

$$a+b+c+\frac{1}{abc} \geq 4\sqrt{3}.$$

Докажи!

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина, следува

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

т. е.

$$a+b+c \leq \sqrt{3}. \qquad (1)$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриска средина, следува:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \leq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

$$\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \leq \frac{1}{3} \qquad (2)$$

$$a^2b^2c^2 \leq \frac{1}{27}$$

$$abc \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{abc} \geq 3\sqrt{3} \qquad (3)$$

$$(a+b+c)\cdot\frac{1}{abc} \geq 3\sqrt[3]{abc}\cdot\frac{1}{abc} = \frac{3}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} \geq 9. \qquad (4)$$

Од (1) и (2) следува:

$$(a+b+c-\sqrt{3})\cdot\left(\frac{1}{abc}-\sqrt{3}\right) \leq 0$$

$$(a+b+c)\cdot\frac{1}{abc} - \sqrt{3}\cdot\frac{1}{abc} - \sqrt{3}(a+b+c) + 3 \leq 0.$$

Од претходното неравенство и од (4) следува:

$$\sqrt{3}\left(a+b+c+\frac{1}{abc}\right) \geq (a+b+c)\cdot\frac{1}{abc} + 3 \geq 12$$

$$a+b+c+\frac{1}{abc} \geq \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$