

Glazba titrajuće žice

Krešimir Burazin * Jelena Jankov †

Sažetak

U radu je opisano kako žičani glazbeni instrumenti proizvode zvuk. Najprije su uvedeni osnovni pojmovi akustike, pojašnjena ideja Fourierove analize i sinteze valova, te pojmovi konsonantnosti i disonantnosti intervala. Zatim je izveden model malih poprečnih oscilacija tanke napete žice, te je dobivena valna jednačina riješena Fourierovom metodom. Posebno su analizirani primjeri titranja žica gitare i klavira.

Ključne riječi: *zvuk, zvučni val, ton, žičani glazbeni instrumenti, poprečne oscilacije žice, Fourierova metoda*

Music of a vibrating string

Abstract

The paper describes how string musical instruments produce sound. First, we introduce some basic notions of acoustics and clarify the idea of Fourier analysis and synthesis of waves, as well as the notion of consonance and dissonance of intervals. Then we introduce a model of transverse oscillations of a thin string, and use the Fourier method to solve the derived wave equation. Finally, we analyze oscillations of strings of a guitar and a piano.

Keywords: *sound, sound wave, tone, string musical instruments, transverse oscillations of a string, Fourier method*

*Sveučilište u Osijeku, Odjel za matematiku, Gajev trg 6, HR-31 000 Osijek, e-mail: kburazin@mathos.hr

†studentica, Sveučilište u Osijeku, Odjel za matematiku, Gajev trg 6, HR-31 000 Osijek, e-mail: jjankov@mathos.hr

1 Zvuk

Pojam zvuk obično koristimo u jednom od sljedeća dva značenja: subjektivno, da bismo opisali podražaje koje detektira naš slušni aparat; i objektivno, zvukom nazivamo vibracijsko gibanje koje čovjek osjeti kao slušne podražaje. Većina ljudi taj pojam koristi u ovome prvom, subjektivnom smislu. U istom smislu se on koristi i u glazbi koju možemo shvatiti kao vrstu umjetnosti koja kao medij koristi zvuk organiziran u vremenu po određenom planu. S druge strane, u akustici, dijelu fizike koji proučava zvuk, taj se pojam koristi u ovome drugom smislu.

Činjenica jeste da je naš subjektivni doživljaj zvuka nerazdvojiv od onog objektivnog: vibracijskog gibanja medija u kojem se nalazimo. I ovaj rad na neki način opisuje kako je povezan taj subjektivni doživljaj zvuka s pripadnim vibracijskim gibanjem medija, kroz primjer žičanih glazbenih instrumenata. Svi žičani instrumenti kao bazu za stvaranje zvuka koriste vibriranje, odnosno titranje svojih žica, pa ćemo stoga u radu opisati jedan model titranja tanke elastične žice te primijeniti dobivene rezultate na primjerima žica gitare i klavira.

Pojasnimo najprije kako nastaje zvuk: zamislimo zatvorenu prostoriju u kojoj se nalazi klasični zvučnik radio uređaja. Ukoliko zvučnik ne radi, tada se molekule zraka nasumično gibaju i u prosjeku su uniformno distribuirane, pa je tlak jednak u svakoj točki. Tada u prostoriji *nema zvuka*. Ukoliko pustimo neku glazbu preko našeg zvučnika, tada membrana zvučnika počne vibrirati te u interakciji sa susjednim molekulama zraka stvara niz *zgušnjavanja* (dijelovi s višim tlakom) i *razrjeđenja* (dijelovi s nižim tlakom) zraka koja se onda dalje prenose zrakom: kada se membrana zvučnika ispupči prema van, onda se s vanjske (ispred membrane) strane zvučnika zrak sabije (tlak se na tom dijelu poveća), a kada se membrana uvuče prema unutra, onda se zrak s prednje strane raširi, odnosno tu se smanji tlak zraka. Taj niz *zgušnjavanja i razrjeđenja* nazivamo *zvučni val* i to je ono što naše uho registrira kao zvuk (odnosno glazbu koju smo pustili). Ovdje smo opisali nastajanje zvučnog vala u zraku, mada to može biti i neki drugi medij (voda, metal), te ćemo i u daljnjem stalno govoriti o zraku kao mediju. Više informacija o zvuku i zvučnim valovima može se naći u većini klasičnih udžbenika fizike, poput [5], [6], [2].

Matematički, zvučni val je možda najjednostavnije opisati pomoću tlaka p kao funkcije prostornih koordinata i vremena. *Zgušnjavanju i razrjeđenju* zraka odgovaraju povećanje, odnosno smanjenje tlaka. Radi jednostavnosti mi ćemo sve promatrati u jednoj točki prostora (zamislimo da se u njoj nalazi uho slušača), pa nam je tada tlak funkcija samo vremena $p: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

U ljudskom rječniku postoji niz termina kojima pokušavamo opisati različite doživljaje zvuka, primjerice urlik, jauk, zvižduk, cika, šušanj, tutanj i mnogi drugi. Većinu tih zvukova bismo klasificirali kao *buku*, za razliku od zvukova koje nazivamo glazbenim *tonovima*. Ta razlika u našem doživljaju zvuka usko je vezana uz svojstva pripadnog zvučnog vala, odnosno svojstva funkcije p . Ta svojstva su *amplituda*, *intenzitet* i *frekvencija* zvučnog vala.

Amplituda A se definira kao apsolutno maksimalno odstupanje funkcije tlaka od tlaka zraka u odsustvu zvučnog vala. Preciznije, ako je p_0 tlak zraka kada nema zvučnog vala, onda je amplituda definirana s

$$A := \max_{t \in [0, +\infty)} |p(t) - p_0|.$$

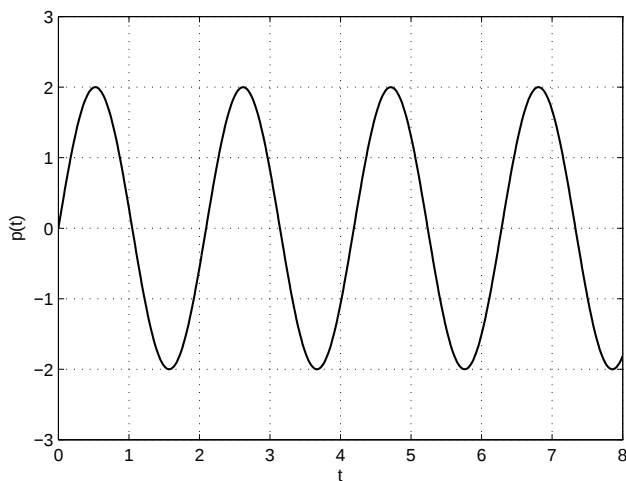
Intenzitet vala je mjera koja mjeri *koliko energije val nosi*. Bez da idemo u detalje, recimo samo da je intenzitet vala proporcionalan kvadratu amplitude, s konstantom proporcionalnosti koja ovisi o mediju kojim se val širi.

Pojam frekvencije je pojam koji se veže uz periodične zvučne valove (*tonovi* su upravo takvi). Dakle, ako je p periodična funkcija temeljnog perioda T , onda se $\frac{1}{T}$ naziva frekvencija zvučnog vala. Na slici 1 dan je primjer sinusoidalnog zvučnog vala amplitude 2 i frekvencije $\frac{3}{2\pi}$.

1.1 Slušanje i percepcija zvuka

Prije nego što razjasnimo kako gornja svojstva zvučnog vala utječu na naš doživljaj zvuka, opišimo najprije *kako čujemo*: kada zvučni val dođe do uha, on preko ušnog kanala dolazi do bubnjića. Podražena zvučnim valom membrana bubnjića počne vibrirati, a zatim se te vibracije preko tri ušne kosti prenose do fiziološke tekućine u unutarnjem uhu. Tu dolazi do pomicanja tekućine i do podraživanja osjetnih slušnih stanica, koje su povezane sa živčanim vlaknima, te se tako mehanička energija zvuka pretvara u električni impuls, koji se onda putem slušnog živca i slušnog puta prenosi do moždane kore, gdje nastaje svjesna percepcija zvuka.

Već smo rekli da na percepciju zvuka utječu svojstva zvučnog vala. Tako primjerice, zvučni val koji je periodičan obično interpretiramo kao *ton*, dok neperiodične zvučne valove najčešće interpretiramo kao *buku*. Ljudsko uho tonove razlikuje po *glasnoći*, *visini* i *boji* (u glazbenoj teoriji se ovdje često dodaje i *trajanje*). Svaka od ovih karakteristika je povezana s prije navedenim svojstvima zvučnog vala, odnosno funkcije p . Štoviše, pokazuje se da je svaka od karakteristika naše percepcije zvuka dominantno određena sa samo jednim od gore navedenih parametara funkcije p . Tako na



Slika 1: Sinusoidalni zvučni val $p(t) = 2 \sin(3t)$.

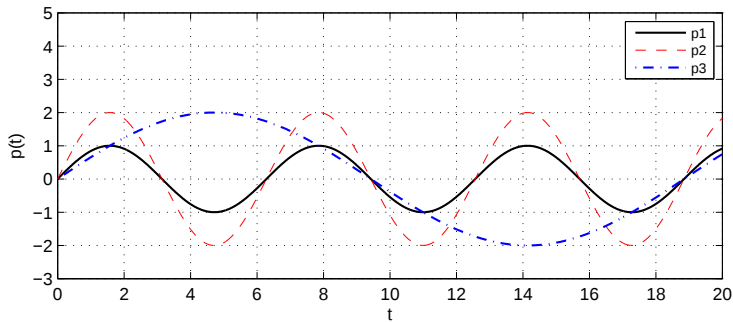
glasnoću tona najviše utječe intenzitet vala (odnosno amplituda), na visinu frekvencija vala, dok na boju utječe *oblik vala*.

Preciznije, glasnoću približno doživljavamo kao logaritamsku funkciju intenziteta: da bi neki zvučni val doživjeli kao dvostruko glasniji nego neki drugi, intenzitet vala se mora kvadratno povećati. Slično i visinu tona približno doživljavamo kao logaritamsku funkciju frekvencije.

Na slici 2 su prikazana tri sinusoidalna zvučna vala. Uočimo da p_1 i p_2 imaju istu frekvenciju (isti period), ali je amplituda (a time i intenzitet) vala p_2 veća od one vala p_1 . Stoga bismo p_2 percipirali kao glasniji od p_1 . Slično, p_2 i p_3 imaju istu amplitudu, dok je frekvencija vala p_2 veća od one vala p_3 . Stoga bismo p_2 percipirali kao viši ton od p_3 .

Čovjek ne može čuti zvukove proizvoljnog intenziteta i frekvencije. Obično se u udžbenicima iz fizike može pronaći informacija da ljudsko uho čuje zvukove u rasponu frekvencija od 20 Hz do 20000 Hz. Međutim, važno je naglasiti da taj raspon značajno ovisi i o intenzitetu, te da gotovo niti jedan pojedinac nije sposoban čuti taj cijeli raspon frekvencija. Napomenimo i da zvukovi frekvencije manje od 20 Hz (infrazvukovi), i frekvencije veće od 20000 Hz (ultrazvukovi) imaju široku primjenu u tehnici i medicini.

Da bismo objasnili kako to *oblik vala* utječe na naš doživljaj *boje tona* po-



Slika 2: Tri sinusoidalna vala $p_1(t) = \sin(t)$, $p_2(t) = 2 \sin(t)$, $p_3(t) = 2 \sin(t/3)$.

trebno nam je osnovno znanje Fourierove analize: poznato je da se svaka (dovoljno dobra) periodična funkcija $p: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ temeljnog perioda T može zapisati u obliku sume trigonometrijskog reda

$$p(t) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T} + \varphi_n\right),$$

pri čemu se koeficijenti Fourierovog reda p_0 , A_n i φ_n računaju iz izraza

$$p_0 = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \sin \varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \cos \varphi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}},$$

gdje su

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt,$$

za proizvoljni $n \in \mathbb{N}$. Ovdje nećemo diskutirati o različitim vrstama konvergencije tog reda i uz koje uvjete su one osigurane (za više o tome vidi

[4]). Slično i u ostatku rada nećemo precizirati uvjete uz koje je račun koji provodimo ostvariv. Naime, želja nam je prikazati glavne ideje koje se tu javljaju, bez previše ulaženja u tehničke detalje. Napomenimo još i da koeficijenti A_n monotonno padaju prema 0 kada $n \rightarrow \infty$.

U slučaju kada funkcija p predstavlja naš zvučni val, prvi član $p_1(t) := A_1 \sin(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_1)$ pripadnog Fourierovog reda nazivamo *osnovni ili fundamentalni ton*, dok se ostali članovi nazivaju *aliquotni tonovi ili (viši) harmonici*. Shodno tome se govori i o frekvenciji, odnosno amplitudi osnovnog tona (*osnovna ili fundamentalna frekvencija/amplituda*), te o frekvenciji i amplitudi viših harmonika. Uočimo da je p_1 periodična funkcija s temeljnim periodom T . Stoga frekvencija fundamentalnog tona iznosi $\frac{1}{T}$, odnosno jednaka je frekvenciji polaznog zvučnog vala. Slično se može vidjeti da frekvencije viših harmonika iznose redom $\frac{2}{T}, \frac{3}{T}, \frac{4}{T}, \dots$. Također napomenimo da se u našem Fourierovom redu ne moraju pojavljivati svi harmonici, jer neki A_n -ovi mogu biti jednaki nuli.

Pokazuje se da na naš doživljaj boje tona najviše utječe *distribucija viših harmonika*, odnosno veličina koeficijenata A_n i φ_n , za $n \geq 2$. To je razlog zašto nam primjerice *srednji C* na oboi zvuči drugačije od *srednjeg C* na trubi, iako im je fundamentalna frekvencija jednaka. Jednostavno rečeno ta dva instrumenta proizvode više harmonike drugačijih amplituda.

Rastav nekog zvučnog vala u Fourierov red često se naziva *harmonijska analiza*. Izgleda da ljudsko uho funkcionira kao mali *harmonijski analizator*. Obrnuti proces stvaranja složenog zvučnog vala od jednostavnih sinusoidalnih valova nazivamo *harmonijska sinteza*. To je osnovni princip rada *električnih glazbenih sintisajzera* koji na taj način mogu oponašati zvukove raznih glazbenih instrumenata.

1.2 Glazbeni intervali

Kako objasniti to da su nam neki zvukovi ugodni za slušati, na primjer glazba, šum mora, glasovi ljudi oko nas, dok neki zvukovi izazivaju izraziti osjećaj neugode? To je zapravo dosta složeno pitanje i postoje brojna istraživanja koja se bave tom problematikom (poput [8]). Mi ćemo se zadržati samo na glazbi: za naše potrebe recimo da je glazba umjetnost koja se izražava pjevanim i/ili sviranim tonovima (mada se mogu koristiti i neki drugi zvukovi) i tišinom (stanke/pauze) između njih. Međutim, jasno je da nam, ako netko nasumično odsvira niz tonova na nekom glazbenom instrumentu, to najvjerojatnije neće biti osobito ugodno za slušati, pa na nekoj intuitivnoj razini to baš i ne bi zvali glazbom. Drugim riječima, da bismo nešto zvali glazbom ne bi nam to smjelo stvarati osjećaj neugode pri-

likom izvođenja. Stoga se prirodno postavlja pitanje što to neki niz tonova čini ugodnim, odnosno neugodnim za slušanje. Pokazuje se da je to pitanje *intervala tonova*.

Interval dvaju tonova je omjer njihovih frekvencija i upravo intervali su ti koji imaju najveću ulogu u percepciji *ugode*, odnosno *neugode* zvukova. Shodno tome, za interval kažemo da je *disonantan*, ukoliko kod slušača izaziva napetost, nemir i općenito neugodne emocije, odnosno *konsonantan* ukoliko izaziva osjećaj harmonije i ugone. Postavlja se prirodno pitanje koji su to intervali konsonantni, a koji disonantni?

Veliki doprinos izučavanju konsonantnih i disonantnih intervala dao je još grčki matematičar i filozof Pitagora (6. st. pr. Kr.), koji je najprije otkrio da su intervali 1 : 2, 2 : 3 i 3 : 4 (oktave, kvinte i kvarte, redom) konsonantni, te kasnije izrekao tvrdnju poznatu kao *Pitagorin zakon malih brojeva* koja kaže da je interval između dva tona konsonantan ukoliko se može prikazati kao omjer malih prirodnih brojeva (manjih ili jednakih 8). U suprotnom, interval se smatra disonantnim, mada i ovdje postoje iznimke, kao što se vidi i iz tablice 1 koja nam daje pregled nekih intervala, njihovih naziva i percepcije (za više o tome vidi [10]).

Omjer frekvencija	Naziv interval	Percepcija
1:1	prima	konsonantan
16:15	mala sekunda	konsonantan
10:9; 9:8	velika sekunda	disonantan
6:5	mala terca	konsonantan
5:4	velika terca	konsonantan
4:3	kvarta	konsonantan
3:2	kvinta	konsonantan
8:5	mala seksta	konsonantan
5:3	velika seksta	konsonantan
9:5; 16:9	mala septima	disonantan
15:8	velika septima	disonantan
2:1	oktava	konsonantan

Tablica 1: Glazbeni intervali

1.3 Žičani glazbeni instrumenti

Glazbena vilica može proizvesti ton koji je gotovo sinusoidalnog oblika. To ne može niti jedan glazbeni instrument – svi proizvode složene tonove. U

ovom radu najviše će nas zanimati kako ton stvaraju žičani glazbeni instrumenti, u prvom redu gitara i klavir. Zajedničko svim žičanim instrumentima je da zvuk proizvode titranjem žica. Zamislimo da imamo tanku napetu žicu, te ju na neki način pobudimo na gibanje: možemo ju primjerice malo povući pa pustiti (kao kad sviramo gitaru) ili ju recimo udariti nekim batićem (kao kod sviranja klavira). Žica počinje titrati što stvara gibanje zraka oko nje: u smjeru u kojem se pomakne žica dolazi do sabijanja zraka, odnosno njegovog *zgušnjavanja*. U nekom trenutku žica se počne vraćati u smjeru početnog položaja, te *ostavlja iza sebe mali vakuum*, odnosno dolazi do *razrjeđenja* zraka na tom mjestu. Tako gibanje titrajuće žice stvara naizmjenično zgušnjavanje i razrjeđenje zraka, odnosno stvara zvučni val.

To je osnovni princip stvaranja zvučnog vala svih žičanih instrumenata. Glasnoća tako dobivenog zvučnog vala se onda pojačava na razne načine. Kod gitare se to radi *rezonancijom* u tijelu gitare, kod klavira za to služi *rezonantna ploča* i slično kod ostalih instrumenata. Postoje i još neki elementi koji mogu utjecati na dobiveni zvučni val, poput prigušivača na klaviru i slično. Mi ćemo se u ostatku rada fokusirati isključivo na samo titranje žice: najprije ćemo ga modelirati, a zatim i *riješiti dobiveni model*.

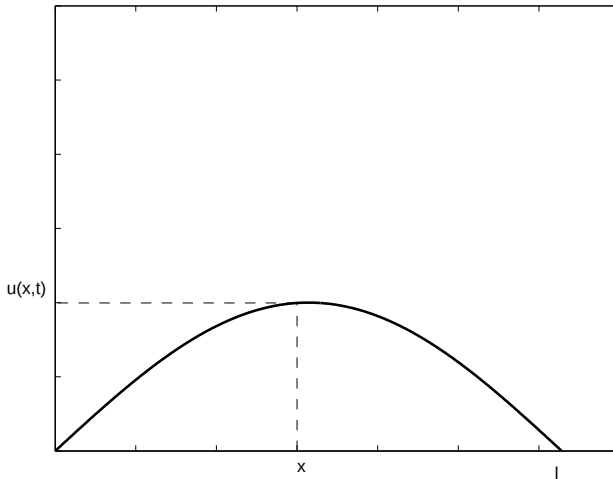
2 Modeliranje oscilirajuće žice

Promatramo *male poprečne oscilacije napete homogene tanke elastične žice* dužine $l > 0$, učvršćene na rubovima kao na slici 3.

Pri tome pretpostavljamo da je žica napeta konstantnom silom $p > 0$, riječ *homogena* znači da je žica konstantne (linearne) gustoće mase $\rho > 0$, a *tanka* znači da joj je masa mala, u smislu da je napetost žice puno veća od gravitacije koja djeluje na žicu, pa stoga gravitaciju zanemarujemo. Isto tako zanemarujemo otpor zraka, te unutrašnje otpore unutar žice (značenje riječi *elastična*). Također, zanimaju nas *male poprečne oscilacije*, što znači da pretpostavljamo da se gibanje vrši samo u smjeru y -osi te zanemarujemo istezanje žice za vrijeme gibanja. Pretpostavljamo i da su *deformacije žice male* (kasnije ćemo precizirati što to znači), te da nema pucanja žice.

U skladu sa slikom 3, pretpostavljamo da u stanju mirovanja (*položaja ravnoteže*) žica zauzima segment $[0, l]$ x -osi. Dva su osnovna načina na koji žicu iz stanja mirovanja možemo pobuditi na gibanje: možemo ju malo izvući iz položaja ravnoteže i pustiti da se giba (kao kod sviranja gitare) ili žicu možemo udariti nekim objektom (malim batom) i time inicirati gibanje (kao kod sviranja klavira). Prvi način odgovara tome da smo gibanje inicirali zadavanjem početnog položaja žice, a drugi zadavanjem početne

brzine gibanja žice. Bez obzira na to na koji ju način pobudili na gibanje, željeli bismo to gibanje nekako opisati, u smislu da u svakom trenutku t točno znamo položaj žice. Drugim riječima, ako otklon (progib) točke $x \in [0, l]$ iz ravnotežnog položaja u trenutku t označimo s $u(x, t)$ (slika 3), tada opisati gibanje zapravo znači poznavati funkciju progiba u .



Slika 3: Progib u u fiksnom trenutku t .

Da bismo izveli jednadžbu koji progib u zadovoljava koristit ćemo zakon *sačuvanja količine gibanja*. To je jedan od fundamentalnih fizikalnih zakon koji za našu žicu glasi: *promjena količine gibanja proizvoljnog komada žice $D = [x_1, x_2] \subseteq [0, l]$ po jedinici vremena jednaka je ukupnom zbroju sila koje djeluju na komad žice D .*

Budući da je brzina gibanja točke x žice u trenutku t jednaka $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\vec{j}$ (uočimo da se gibanje vrši samo u smjeru y -osi), to je ukupna količina gibanja komada D jednaka

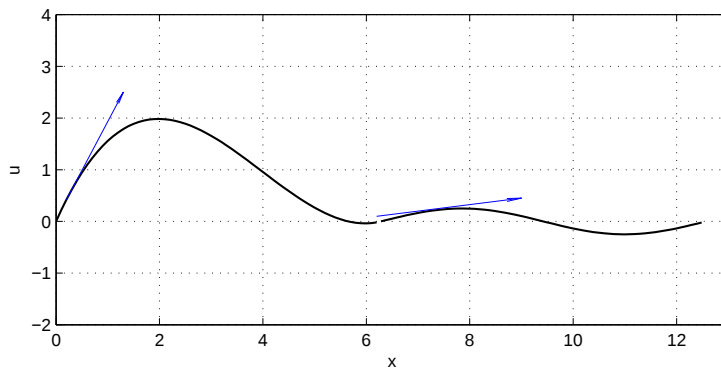
$$\int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \vec{j} dx,$$

pa je njezina promjena po jedinici vremena dana s

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx \vec{j}. \quad (1)$$

S druge strane, sila koja djeluje na komad D je posljedica napetosti žice i obično se naziva *kontaktna sila*. U točki x_2 kontaktnu silu koja djeluje na D možemo interpretirati kao silu kojom komad žice $[x_2, l]$ djeluje na D i slično u točki x_1 , kao silu kojom komad žice $[0, x_1]$ djeluje na D . Da bismo izračunali te kontaktne sile koristit ćemo pretpostavku *malih deformacija*, pa stoga pojasnimo najprije na što se misli kada se kaže *deformacije žice su male*.

Budući da u fiksnom trenutku t žica zauzima oblik grafa funkcije $x \mapsto u(x, t)$, pretpostavka malih deformacija zapravo znači da je tangenta na graf te funkcije u bilo kojoj točki x *skoro paralelna* osi x . Drugim riječima, koeficijent smjera te tangente je *malen* po apsolutnoj vrijednosti (blizu nuli). Kako je koeficijent smjera jednak derivaciji u promatranoj točki, to zapravo znači da pretpostavljamo da je $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ malo po apsolutnoj vrijednosti. Primjer malih i velikih deformacija je prikazan na slici 4.



Slika 4: Primjer velikih i malih deformacija

Zbog malih deformacija razumno je pretpostaviti da kontaktna sila dje-

luje tangencijalno na žicu. Budući da je u fiksnom trenutku t jednadžba tangente na graf funkcije $x \mapsto u(x, t)$ u točki x_0 dana s

$$y - u(x_0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t)(x - x_0),$$

odnosno, drugačije zapisano

$$\frac{y - u(x_0, t)}{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t)} = \frac{x - x_0}{1},$$

to se lako vidi da je jedinični tangencijalni vektor na žicu u točki x_0 u trenutku t dan s

$$\vec{T}(x_0, t) = \frac{\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t)\vec{j}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t)\right)^2}}.$$

Kako je $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t)$ malo po apsolutnoj vrijednosti, to slijedi da je član $\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t)\right)^2$ približno jednak nuli, pa ga možemo zanemariti u gornjem izrazu. Slijedi da su kontaktne sile na komad D u točkama x_2 i x_1 dane redom s

$$p \left(\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t)\vec{j} \right) \quad \text{ i } \quad -p \left(\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t)\vec{j} \right),$$

gdje je p konstantna sila napetosti žice. Uočimo da su predznaci koji se pojavljuju u gornjim izrazima usklađeni sa smjerom djelovanja sila. Koristeći izraze za kontaktnu silu i (1) iz zakona sačuvanja količine gibanja dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx \vec{j} = p \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) \right) \vec{j},$$

odnosno

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx = \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) \right).$$

Derivacija ispred integrala na lijevoj strani znaka jednakosti je po t varijabli, dok je integral po x varijabli, pa možemo s derivacijom *ući pod integral* (podsjetimo da je za to potrebna određena glatkoća podintegralne funkcije). Na desnu stranu jednakosti primijenimo Newton-Leibnizovu formulu (i za to je potrebna određena glatkoća podintegralne funkcije) pa dobivamo

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) dx = \frac{p}{\rho} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx.$$

Ako označimo $a^2 = \frac{p}{\rho} > 0$, sve prebacimo na lijevu stranu i stavimo pod isti integral, dobivamo

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right) dx = 0. \quad (2)$$

Budući da gornja jednakost vrijedi za bilo koji komad žice $D = [x_1, x_2] \subseteq [0, l]$, željeli bismo zaključiti kako je onda podintegralna funkcija u (2) jednaka nuli.

Zaista, ako neprekidna funkcija $h : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ ima svojstvo da za svaki podsegment $[x_1, x_2] \subseteq [0, l]$ vrijedi

$$\int_{x_1}^{x_2} h(x) dx = 0,$$

onda je h identički jednaka nuli na $[0, l]$. Naime, ukoliko h u nekoj točki $a \in [0, l]$ poprima vrijednost koja nije jednaka nuli; primjerice neka je $h(a) > 0$, onda zbog neprekidnosti funkcije h slijedi da postoji neki segment $[x_1, x_2] \subseteq [0, l]$ koji sadrži točku a i na kojem h poprima vrijednosti veće od $\frac{1}{2}h(a)$. Tada je i

$$\int_{x_1}^{x_2} h(x) dx \geq \frac{1}{2}h(a)(x_2 - x_1) > 0,$$

što je kontradikcija s gornjim svojstvom funkcije h .

Stoga možemo zaključiti da je podintegralna funkcija u (2) jednaka nuli, odnosno dobivamo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu za progib u :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad (3)$$

poznatu pod nazivom *valna jednadžba*. Može se pokazati da ta jednadžba ima puno (beskonačno) rješenja, pri čemu pod rješenjem podrazumijevamo svaku *dovoljno glatku* funkciju u koja zadovoljava (3) za svaki $(x, t) \in [0, l] \times \langle 0, \infty \rangle$. Stoga, da bismo odredili progib moramo koristiti još neke informacije koje o njemu znamo, poput početnog položaja i početne brzine: neka je u početnom trenutku položaj žice dan funkcijom $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$, a početna brzina funkcijom $\beta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$. Drugim riječima, pretpostavljamo da su dani *početni uvjeti*

$$u(x, 0) = \alpha(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \beta(x), \quad x \in [0, l]. \quad (4)$$

Isto tako, do sada nigdje nismo iskoristili informaciju o tome da je žica učvršćena na rubovima, odnosno *rubne uvjete*:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \in \langle 0, \infty \rangle. \quad (5)$$

Valna jednadžba (3) zajedno s početnim uvjetima (4) i rubnim uvjetima (5) čini *početno-rubnu zadaću za valnu jednadžbu*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, & (x, t) \in \langle 0, l \rangle \times \langle 0, \infty \rangle, \\ u(x, 0) = \alpha(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \beta(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, & t \in \langle 0, \infty \rangle. \end{cases} \quad (6)$$

Time smo dobili matematički model koji opisuje male poprečne oscilacije napete homogene tanke elastične žice (za nešto više detalja o modeliranju žice vidi [9]). Postavlja se pitanje kako pronaći funkciju u koja zadovoljava (6), ukoliko takva uopće i postoji.

3 Rješenje početno rubne zadaće

Početno rubnu zadaću (6) ćemo riješiti takozvanom *metodom separacije varijabli*. Ona se zasniva na pretpostavci da postoji rješenje kojemu su prostorna i vremenska varijabla separirane, u smislu da je rješenje oblika

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (7)$$

gdje su $X : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ i $T : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ neke funkcije.

Pokušajmo onda pronaći rješenje zadaće (6) koje je takvog oblika: uvrštavajući (7) u valnu jednadžbu dobivamo

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t),$$

odnosno

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, \quad (8)$$

u onim točkama (x, t) u kojima je $T(t) \neq 0$ i $X(x) \neq 0$. Napomenimo odmah da nam slučaj kada je jedna od funkcija T ili X identički jednaka nuli baš i nije zanimljiv. Naime, tada je i u identički jednaka nuli i nul-funkcija čak zadovoljava valnu jednadžbu i rubne uvjete, ali početne uvjete zadovoljava samo ako su α i β nul-funkcije, što je trivijalan slučaj kada žica

cijelo vrijeme miruje.

Budući da je lijeva strana u gornjem izrazu funkcija varijable t , a desna varijable x , to slijedi da je izraz (8) jednak konstanti:

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = d. \quad (9)$$

gdje je $d \in \mathbb{R}$, odnosno funkcija X zadovoljava običnu diferencijalnu jednadžbu

$$X''(x) - dX(x) = 0.$$

Ukoliko (7) uvrstimo u rubne uvjete (5) dobivamo

$$X(0)T(t) = 0, \quad X(l)T(t) = 0,$$

za svaki $t > 0$, pa slijedi da X zadovoljava *rubnu zadaću*

$$\begin{cases} X''(x) - dX(x) = 0, & x \in \langle 0, l \rangle, \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

To je rubna zadaća za linearnu običnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda s konstantnim koeficijentima i dobro je poznato kako se ona rješava (vidi [1], [3]). Međutim, da bismo napisali formulu za rješenje potrebno je poznavati predznak koeficijenta d : množeći jednadžbu u (10) s $X(x)$ i integrirajući po segmentu $[0, l]$ slijedi

$$\int_0^l X''(x)X(x) dx = d \int_0^l (X(x))^2 dx.$$

Napravimo parcijalnu integraciju integrala na lijevoj strani, te iskoristimo rubne uvjete u (10) i dobivamo

$$-\int_0^l (X'(x))^2 dx = d \int_0^l (X(x))^2 dx,$$

odakle lako slijedi da je $d < 0$. Uz oznaku $d = -\lambda^2$ rubna zadaća (10) postaje

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, & x \in \langle 0, l \rangle, \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

i lako se pokazuje [1] da ona ima netrivialno rješenje

$$X_n(x) = C_n \sin(\lambda x) \quad (12)$$

jedino ako je λ oblika $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, za $n \in \mathbb{N}$, pri čemu je C_n proizvoljna konstanta.

Sada iz (9) slijedi da pripadni T zadovoljava jednadžbu

$$T''(t) + \left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 T(t) = 0,$$

čije je rješenje dano s

$$T_n(t) = D_n \cos \frac{cn\pi t}{l} + E_n \sin \frac{cn\pi t}{l},$$

gdje su D_n i E_n proizvoljne konstante i $n \in \mathbb{N}$.

Koristeći (12) i (7) slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$, funkcija $u_n : [0, l] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{cn\pi t}{l} + B_n \sin \frac{cn\pi t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

gdje su A_n i B_n proizvoljne konstante, je rješenje valne jednadžbe (3) i zadovoljava rubne uvjete (5). To se zapravo i može provjeriti direktnim uvrštavanjem u valnu jednadžbu i pripadne rubne uvjete.

Uočimo da do sada još nigdje nismo koristili početne uvjete (4). Zapravo, direktnom provjerom se može utvrditi da niti jedna od funkcija u_n neće zadovoljavati početne uvjete za općeniti α i β . Stoga ćemo rješenje u koje, uz jednadžbu i rubne uvjete, zadovoljava i početne uvjete, pokušati pronaći kao *superpoziciju* funkcija u_n , odnosno u obliku *beskonačne sume* funkcija u_n :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{cn\pi t}{l} + B_n \sin \frac{cn\pi t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (13)$$

Jasno, pod pojmom *beskonačne sume* zapravo mislimo na sumu reda. Ovu metodu za pronalazak rješenja početno rubne zadaće prvi je uspješno koristio Joseph Fourier i to za jednadžbu provođenja topline, te se ona stoga naziva i *Fourierova metoda*. Ovaj pristup rješavanju diferencijalnih jednadžbi je doveo Fouriera do tvrdnje da se *svaku (periodičnu) funkciju može zapisati kao beskonačnu sumu sinus i kosinus funkcija*, danas poznatu kao Fourierov red. Zapravo, ako u prvi početni uvjet (početni položaj) uvrstimo ovakav u , dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \alpha(x)$$

i vidimo da izraz na lijevoj strani zapravo predstavlja Fourierov red neparne funkcije, odnosno brojevi A_n su zapravo koeficijenti u razvoju funkcije α po sinus funkcijama. Iz formula za koeficijente Fourierovog reda [7] onda lako slijedi

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \alpha(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (14)$$

Na sličan način dobivamo formulu za koeficijente B_n : prvo formalno deriviramo izraz (13) po t varijabli, derivirajući pripadni red član po član

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \frac{cn\pi}{l} \sin \frac{cn\pi t}{l} + B_n \frac{cn\pi}{l} \cos \frac{cn\pi t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

pa uvrštavanjem u drugi početni uvjet (početnu brzinu) slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{cn\pi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = \beta(x).$$

Sada slično kao i za A_n dobivamo

$$B_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l \beta(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (15)$$

Naravno, da bi gore opisani formalni račun bio provediv, potrebno je zahtijevati određene pretpostavke na funkcije α i β , ali u to ovdje nećemo ulaziti.

Dakle, zaključili smo da je rješenje početno rubne zadaće (6) dano izrazom (13), pri čemu koeficijente A_n i B_n računamo po formulama (14), odnosno (15).

3.1 Interpretacija rješenja

Koristeći adicioni teorem za sinus, lako se može vidjeti da svaki u_n od kojih je sastavljeno rješenje u možemo zapisati u obliku

$$u_n(x, t) = E_n \sin \left(\frac{cn\pi t}{l} + \varphi_n \right) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

gdje se E_n i φ_n računaju iz izraza

$$E_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \sin \varphi_n = \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}}, \quad \cos \varphi_n = \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}}.$$

Pogledajmo malo bolje kakvo gibanje opisuje svaki pojedini u_n , za fiksiran n . Ako fiksiramo proizvoljnu točku žice $x \in [0, l]$ vidimo da se ona *giba sinusoidalno*, s amplitudom $E_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ i frekvencijom $\nu_n := \frac{cn}{2l}$. Uočimo da frekvencija ne ovisi o samoj točki x , odnosno jednaka je za sve x . Budući da je gibanje okolnog zraka direktno u vezi s gibanjem žice, za očekivati je i da se okolni zrak giba sinusoidalno, s istom frekvencijom ν_n . Dakle, ako bi gibanje žice bilo opisano samo s jednim u_n , ta žica bi proizvodila ton frekvencije ν_n .

Sličnim razmišljanjem možemo zaključiti da je onda zvučni val kojeg proizvodi žica čiji je progib superpozicija u_n -ova, kao u (13), zapravo superpozicija zvučnih valova koje proizvode u_n -ovi. Dakle, zvučni val kojeg proizvodi titrajuća žica je ton fundamentalne frekvencije

$$\nu_1 = \frac{c}{2l} = \frac{\sqrt{p}}{2l\sqrt{\rho}}.$$

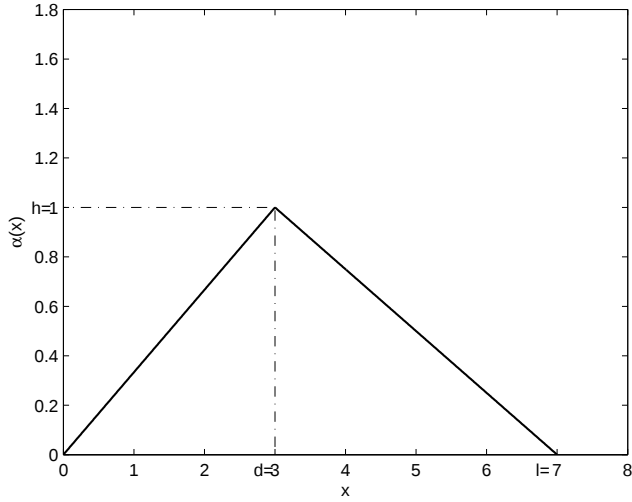
Uočimo da na fundamentalnu frekvenciju utječu samo duljina, napetost i gustoća žice. Uopće nije važno na koji način smo žicu pobudili na gibanje. Pogledajmo sada kako točno titraju žice gitare i klavira.

Gitara

Vjerojatno većina ljudi zna da gitara ima (najčešće) 6 žica, te da se svira tako što se jednom rukom *trzaju žice*, a drugom se pritišću žice na vrat gitare. Ovim pritiskanjem se zapravo mijenja duljina titrajuće žice pa se, prema formuli za fundamentalnu frekvenciju, time mijena i visina tona. Pojam *trzanja žice* mogli bismo ovako opisati: žicu koja se nalazi u ravnotežnom položaju povučemo na nekoj poziciji d (ako je dužina žice l , jasno je da se d nalazi između nula i l) do visine h . Stoga se položaj žice u tom (početnom) trenutku može opisati funkcijom α , danom na slici 5.

Nakon toga pustimo žicu i ona počne titrati. Progib te žice mora zadovoljavati početno rubnu zadaću (6) pri čemu je početni položaj dan slikom 5, a početna brzina jednaka nuli. Da bismo pronašli taj progib moramo izračunati koeficijente A_n i B_n . Budući da je $\beta \equiv 0$, to iz (15) slijedi da je svaki $B_n = 0$. Iz slike 5 se lako nađe formula za početni položaj:

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{hx}{d}, & 0 \leq x \leq d \\ \frac{h(l-x)}{l-d}, & d < x \leq l, \end{cases}$$



Slika 5: Položaj žice u početnom trenutku t .

pa iz (14) slijedi

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \alpha(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2}{l} \left[\int_0^d \frac{hx}{d} \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \int_d^l \frac{h(l-x)}{l-d} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right]. \end{aligned}$$

Parcijalnom integracijom dobivamo:

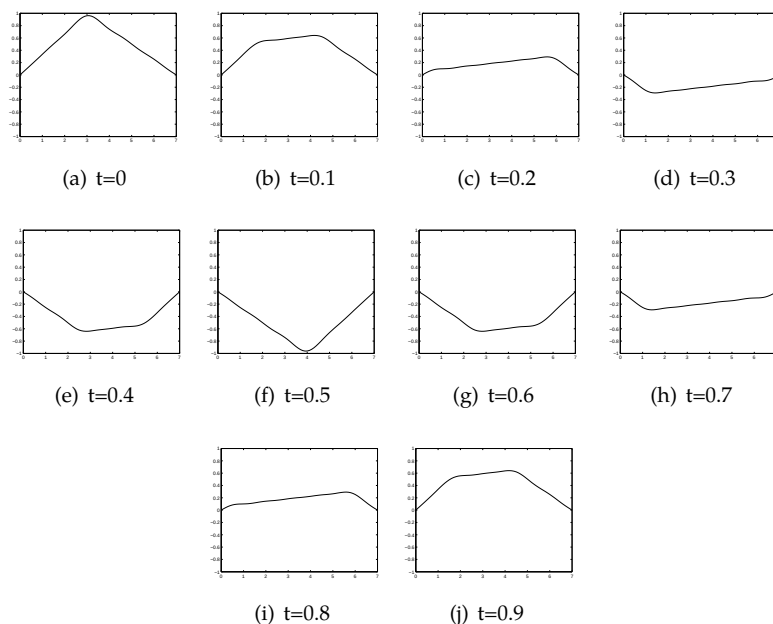
$$A_n = \sin \frac{n\pi d}{l} \frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)},$$

pa je stoga progib dan s

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi d}{l} \frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)} \cos \frac{cn\pi t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Pogledajmo sada kako izgleda tipično gibanje žice gitare na primjeru: uzimimo $l = 7$, $c = 14$, te početni položaj kao na slici 5. Uočimo da je vrijednost $h = 1$ visine do koje smo povukli žicu u početnom trenutku prevelika u odnosu na duljinu žice. Izabrali smo takvu vrijednost da bi se bolje

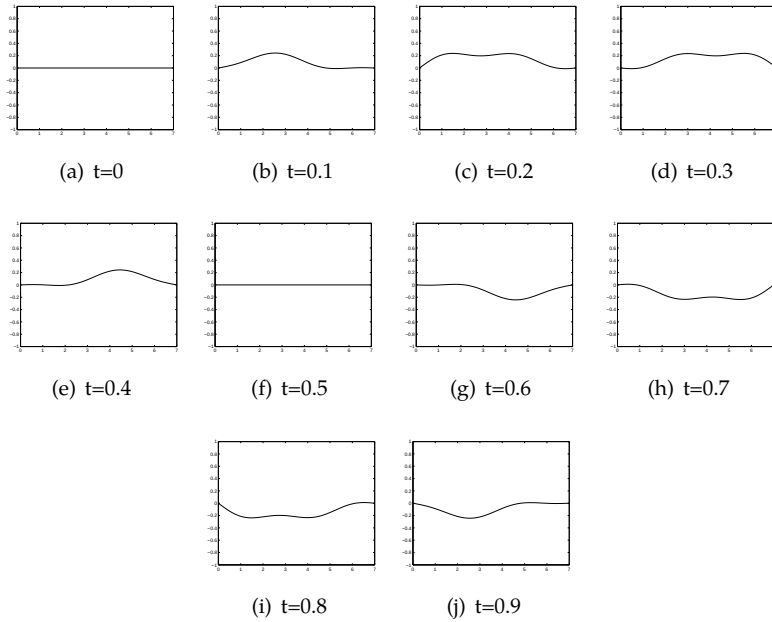
vidjele oscilacije, mada u stvarnosti žica gitare titra puno manjom amplitudom nego u našem primjeru. Uočimo i da je fundamentalna frekvencija $\nu = 1$, odnosno period gibanja je jednak 1. Na slici 6 su prikazani približni položaji žice u svakoj desetinki prve sekunde gibanja. Kažemo *približni* zbog toga što smo prikazali samo sumu prvih deset članova u gornjem redu kojim je zadani progib u , što je sasvim dovoljno da bi se dobila predodžba o gibanju. Gibanje žice u vremenu se može bolje vidjeti na animaciji na linku: http://www.mathos.unios.hr/~kburazin/animacija_gitara.avi



Slika 6: Gibanje žice gitare kroz vrijeme

Klavir

Klavir ima klavijaturu s 88 tipki. Tonovi nastaju pritiskom na tipku koja pokreće batić i on udara po jednoj od 88 žica različitih duljina i debljina, te na taj način potiče titranje žice i stvara se zvuk. Kad pustimo tipku, na žicu se naslanja prigušivač i titranje se zaustavlja. Svaka žica klavira ima svoju osnovnu frekvenciju, koja, kao što smo već vidjeli, ovisi o gustoći, napetosti i duljini žice.



Slika 7: Gibanje žice klavira kroz vrijeme

Udarcem batića po žici brzina gibanja batića se prenosi na dio žice po kojem on udari, te se na taj način žici daje neka početna brzina gibanja. Ona ovisi i o obliku dodirne površine batića sa žicom, a mi ćemo ovdje proučiti slučaj kada je ta dodirna površina ravna (kao kod nekih starijih klavira). Ukoliko batić udari komad žice $[d_1, d_2] \subseteq [0, l]$, onda je početna brzina žice jednaka

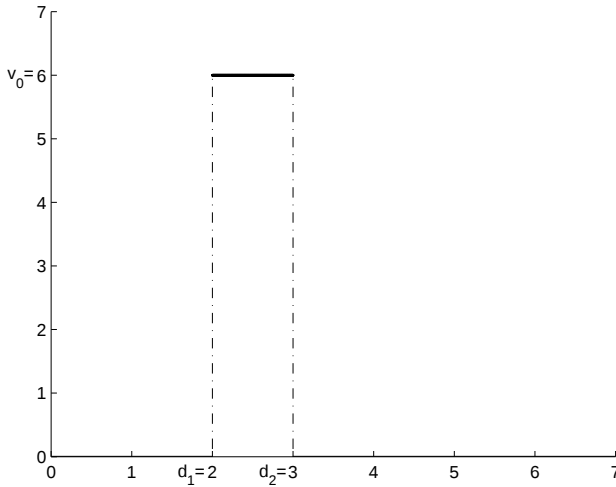
$$\beta(x) = \begin{cases} v_0, & d_1 \leq x \leq d_2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

pri čemu je v_0 brzina gibanja batića u trenutku udarca u taj komad žice. Graf funkcije β dan je na slici 8. U ovom slučaju je početni položaj $\alpha \equiv 0$, pa je zbog toga i $A_n = 0$, dok se iz (15) integriranjem lako dobiva:

$$B_n = \frac{2v_0 \cdot l}{c \cdot (n\pi)^2} \left(\cos \frac{n\pi d_1}{l} - \cos \frac{n\pi d_2}{l} \right).$$

Nakon uvrštavanja, slijedi da je progib dan s

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin \frac{cn\pi t}{l} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}$$



Slika 8: Početna brzina žice.

Slika 7, slično kao i slika 6, prikazuje položaj žice klavira u prvoj sekundi gibanja. I ovdje smo uzeli $l = 7$ i $c = 14$, pa je fundamentalna frekvencija opet jednaka 1, kao i period. Početna brzina je uzeta kao na slici 8. Gibanje se može bolje vidjeti na animaciji na linku: http://www.mathos.unios.hr/~kburazin/animacija_klavir.avi

Literatura

- [1] M. Alić, *Obične diferencijalne jednačbe*, Matematički odjel Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1994.
- [2] W. Benenson, J. W. Harris, H. Stocker, H. Lutz, *Handbook of physics*, Springer - Verlag, New York, 2002.
- [3] M. Braun, *Differential equations and their applications*, Springer, New York, 1992.
- [4] G. Bachman, L. Narici, E. Beckenstein, *Fourier and wavelet analysis*, Springer - Verlag, New York, 2000.

- [5] A. Giambattista, B. McCarthy Richardson, R. C. Richardson, *College physics*, McGraw - Hill, New York, 2007.
- [6] E. Hausmann, E. P. Slack, *Physics*, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1948.
- [7] I. Ivanšić, *Furierovi redovi. Diferencijalne jednadžbe*, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2000.
- [8] S. Kumar, K. von Kriegstein, K. Friston, T. D. Griffiths, *Features versus Feelings: Dissociable Representations of the Acoustic Features and Valence of Aversive Sounds*, *The Journal of Neuroscience*, 2012, 32(41), 14184–14192.
- [9] S. Suljagić, *Matematika III*, Zagreb, 2000.
- [10] Z. Šikić, *Matematika i muzika*, HMD, Zagreb, 1999.