Геометријски приступ при решавању алгебарских задатака

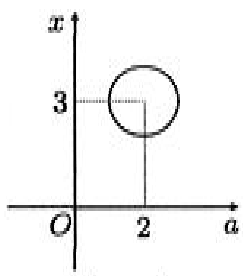
***Злашка Павличић*, Лепосавић**

Наведени задаци су примери како се алгебарски задаци могу решити користећи геометријске законитости и методе.

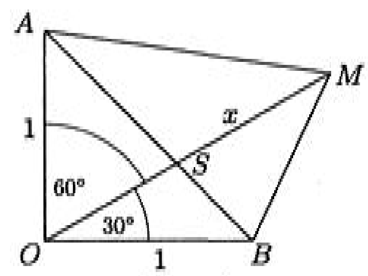
Задатак 1. За које вредности параметра a апсолутна вредност разлике корена једначине $x^2 - 6x + a^2 - 4a + 12 = 0$ има највећу вредност?

Решење. Стандардно, апсолутна вредност разлике корена једначине једнака је квадратном корену дискриминанте, $D = -4(a^2 - 4a + 3)$, а своју максимална вредност постиже за $a = 2$.

Међутим, дату једначину можемо написати у облику $(x-3)^2 + (a-2)^2 = 1$ *и видети да* она представља једначину кружнице у $xOa-$равни. Ако је конструишемо (слика 1) - идеја је очигледна. Апсолутна вредност разлике корена квадратне једначине је највећа, када су пресечне тачке кружнице и праве паралелне са $Ox-$осом, на највећем могућем растојању једна од друге. Јасно је да та права мора да пролази кроз центар кружнице; дакле, $a = 2$.



Слика 1.



Слика 2.

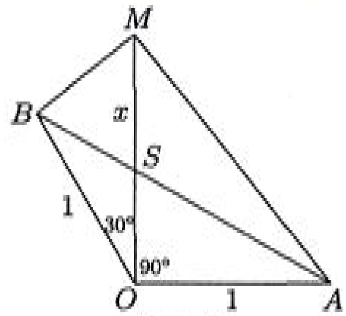
Задатак 2. Наћи најмању вредност израза $\sqrt{1 + x^2 - x} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}}$.

Решење. Нека је $f(x) = \sqrt{1 + x^2 - x} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}}$. Тада је $f(0) = 2$, док је $f(x) > f(0) = 2$, за $x < 0$ (јер је $1 + x^2 - x > 1$ и $1 + x^2 - x\sqrt{3} > 1$). Следи да тачка у којој $f(x)$ достиже најмању вредност није негативна. Претпоставка $x > 0$ даје могућност за следећу геометријску интерпретацију: Конструишимо $\sphericalangle AOM = 60°$ и $\sphericalangle MOB = 30°$, тако да је $AO = BO = 1$, а $OM = x$ (слика 2). Посматрамо $\triangle AOM$ и $\triangle BOM$. По косинусној теореми је $AM = \sqrt{1 + x^2 - x}$ и $BM = \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}}$. За странице троугла AMB важи неједнакост: $AM + BM \geqslant AB = \sqrt{2}$ (јер је AB хипотениза једнакокрако правоуглог троугла AOB). Једнакост се добија када се тачка M налази на страници AB, тј. када се поклопи са тачком S, $\{S\} = AB \cap OM$. Значи, најмања вредност горњег израза постиже се за $x = OS = \sqrt{3} - 1$, што се лако добија преко синусне теореме примењене, на пример, на троугао OBS: $\dfrac{\sin 45°}{OS} = \dfrac{\sin(180° - 30° - 45°)}{1}$. И, заиста, $f(\sqrt{3} - 1) = \sqrt{2} < 2 = f(0)$.

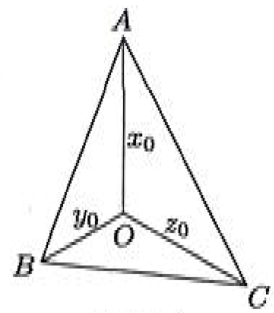
Задатак 3. Решити једначину $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Решење. Нека је $f(x) = \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}}$. Тада је $f(0) = 2$, док је

$f(x) > f(0) = 2$, за $x < 0$, што значи да је решење, ако постоји, позитиван број. Сада, као у предходном задатку, конструишемо дужи $OA = OB = 1$ и $OM = x$, тако да је $\sphericalangle AOM = 90°$, а $\sphericalangle MOB = 30°$ (слика 3) и посматрамо $\triangle AOM$ и $\triangle BOM$. По косинусној теореми је $AM = \sqrt{1+x^2}$ и $BM = \sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$. За странице троугла AMB важи неједнакост $\sqrt{3} = AM + BM \geqslant AB$, при чему једнакост важи када је тачка M на AB, тј. када је $M = S$, где је $\{S\} = AB \cap OM$. Значи, решење једначине је $x = OS = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, што је лако добити из синусне теореме.



Слика 3.



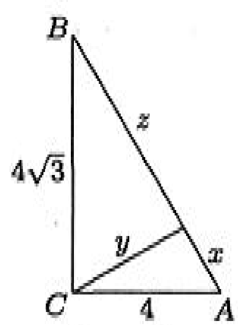
Слика 4.

Задатак 4. Да ли систем $x^2 + xy + y^2 = 4$, $x^2 + xz + z^2 = 9$, $y^2 + yz + z^2 = 36$ има решење, такво да је $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$?

Решење. Претпоставимо да дати систем има решења; означимо их са x_0, y_0, z_0. Конструишимо сада дужи $OA = x_0$, $OB = y_0$ и $OC = z_0$, тако да је $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle AOC = 120°$ (слика 4). И овде користимо неједнакост троугла ABC: $AB + AC > BC$. Али, како је $AB = \sqrt{x_0^2 + x_0y_0 + y_0^2} = 2$, $AC = \sqrt{x_0^2 + x_0z_0 + z_0^2} = 3$ и $BC = \sqrt{y_0^2 + y_0z_0 + z_0^2} = 6$ (по косинусној теореми), онда је $AB + AC = 5 < 6 = BC$. Контрадикција! Значи, овај систем нема решење!

Задатак 5. Израчунати вредност израза $\mathcal{A} = xy + yz$, ако је $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $x^2 + y^2 = 16$, $y^2 + z^2 = 48$ и $y^2 = xz$.

Решење. Из треће једначине видимо да је y геометријска средина бројева x и z. Зато можемо да конструишемо правоугли троугао са катетама 4 и $4\sqrt{3}$, те ће његова хипотенуза бити дужине $x + z$, а хипотенузина висина y. Вредност израза $\mathcal{A}$ биће: $\mathcal{A} = xy + yz = 2P_{ACD} + 2P_{BCD} = 2P_{ABC} = 16$ (слика 5).



Слика 5.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2007/08 година