Šefket Arslanagić (Mostar)

TORIČELIJEVA TAČKA U TROUGLU

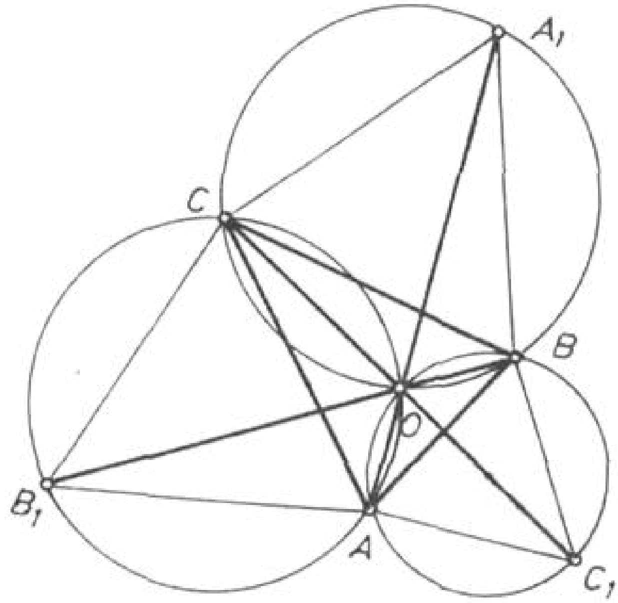
Za italijanskog matematičara Evangelista Toričelija (E. Torricelli, 1608—1647) znamo uglavnom iz fizike. Pominjali smo ga kao pronalazača živinog barometra (Toričelijeva cijev) i zakona o djelovanju atmosferskog pritiska na živu, brzine isticanja vode iz suda, itd. Bio je saradnik i sekretar slavnog Galilea Galileja (1564—1642). No, on se bavio uveliko i matematikom. Evo jednog vrlo interesantnog zadatka koji je izučavao Toričeli:

Nad svakom stranicom jednog trougla ABC konstruisani su jednakostranični trouglovi ABC_1, BCA_1 i ACB_1 i vrhovi A_1, B_1 i C_1 spojeni su redom sa vrhovima A, B i C (sl. 1) *Dokazati:*

1) *da su duži AA_1, BB_1 i CC_1 međusobno jednake;*

2) *da kružnice opisane oko konstruisanih jednakostraničnih trouglova (Toričelijeve kružnice) imaju zajednički presjek u tački O (Toričelijevoj tački);*

3) *da se i duži AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u tački O.*



Sl. 1.

Dokaz.

1. Trouglovi BB_1C i AA_1C su podudarni, jer su im po dvije stranice i zahvaćeni uglovi jednaki, tj.: $B_1C=AC$, $BC=A_1C$ i $\sphericalangle BCB_1=\sphericalangle ACA_1=\sphericalangle C+60°$.

Iz podudarnosti ovih trouglova slijedi da je $BB_1=AA_1$.

Na isti način se dokazuje da je: $BB_1=CC_1$, pa je najzad $AA_1==BB_1=CC_1$.

2. Neka se kružnice opisane oko jednakostraničnih trouglova ACB_1 i BCA_1 sijeku u tački O.

Uočavamo da je ugao $\sphericalangle AOC=\sphericalangle BOC=120°$, kao suplementni uglovima kod vrhova B_1 i A_1 čija je veličina 60°. (Četvorougli $AOCB_1$ i $BOCA_1$ su tetivni, a za njih važi teorema da su im suprotni uglovi suplementni.). Prema tome je i $\sphericalangle AOB=120°$, tj. i četvorougao $AOBC_1$ je tetivan i kružnica opisana oko jednakostraničnog trougla ABC_1 prolazi kroz tačku O, presjek prve dvije kružnice.

Uočava se da se svaka stranica $\triangle AOB$ vidi iz tačke O pod uglom koji iznosi 120°.

3. Spojimo tačku O sa svih šest vrhova. Da bismo dokazali ovaj dio teoreme, dovoljno je dokazati da duži OB_1 i OB leže na jednoj pravoj.

Svaki ugao čiji je vrh u tački O iznosi 60°, jer leži nad lukom koji je trećina kružnice. (Npr., $\sphericalangle A_1OB=\sphericalangle A_1CB=60°$, te $\sphericalangle B_1OC=\sphericalangle B_1AC=60°$ i $\sphericalangle A_1OC=\sphericalangle A_1BC=60°$.) Zbir uglova $\sphericalangle B_1OC$, $\sphericalangle COA_1$ i $\sphericalangle A_1OB$ je, dakle, 180°; prema tome duži OB_1 i OB leže na jednoj pravoj.

Zadaci

1. Izvesti dokaz ove teoreme i kada su jednakostranični trouglovi konstruisani ne sa spoljašnje, nego sa unutrašnje strane trougla ABC.

2. Dokazati da teorema važi i u slučaju ako se nad svakom stranicom trougla ABC sa spoljašnje strane konstruišu slični trouglovi tako da obližnji uglovi uglu C budu jednaki uglu B, obližnji uglovi uglu A budu jednaki uglu C i obližnji uglovi uglu B budu jednaki uglu A.

3. Dokazati da Toričelijeva tačka O u odnosu na $\triangle ABC$ ima tu osobinu da je suma njenih rastojanja od vrhova trougla najmanja, tj. da je $OA+OB+OC=$min. u poređenju sa ma kojom drugom tačkom koja leži unutar toga trougla.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија