# Magični pravokutnici

*Sara Ban Martinović*[1], *Irja Meštrović*[2]

*Magični pravokutnik* reda $m \times n$ je matrica reda $m \times n$ u kojoj se svaki element skupa $\{1, 2, \ldots, mn\}$ nalazi na točno jednoj poziciji tako da je zbroj brojeva u svakom retku jednak konstanti $M$, a zbroj brojeva u svakom stupcu jednak konstanti $N$. Brojeve $M$ i $N$ zovemo *magičnim konstantama*.

Aritmetička sredina svih elemenata magičnog pravokutnika reda $m \times n$ je $A = \dfrac{mn+1}{2}$ te vrijedi $M = An$ i $N = Am$, gdje su $M$ i $N$ magične konstante. Zbroj svih elemenata magičnog pravokutnika jednak je $mnA = mM = nN$.

Ako je $mn$ paran broj, onda je $mn + 1$ neparan, pa da bi $M = An = \dfrac{n(mn+1)}{2}$ i $N = Am = \dfrac{m(mn+1)}{2}$ bili prirodni brojevi, i $m$ i $n$ moraju biti parni brojevi.

Ako je $mn$ neparan broj, onda i $m$ i $n$ moraju biti neparni. U tom slučaju konstante $M$ i $N$ su prirodni brojevi jer je $mn + 1$ paran.

Dakle, ne postoji magični pravokutnik reda $m \times n$, gdje su $m$ i $n$ različite parnosti.

Magični pravokutnik reda $m \times n$, gdje su $m$ i $n$ parni prirodni brojevi, zovemo *magičnim pravokutnikom parnog reda*. Magični pravokutnik reda $m \times n$, gdje su $m$ i $n$ neparni prirodni brojevi zovemo *magičnim pravokutnikom neparnog reda*.

Trivijalni magični pravokutnik reda $1 \times 1$ je matrica $[1]$.

Magični pravokutnik reda $2 \times 2$ ne postoji budući da elemente skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ nije moguće zapisati u matricu reda $2 \times 2$ na način da je zbroj elemenata u svakom retku, odnosno stupcu jednak $5$.

U nastavku se bavimo konstrukcijom magičnog pravokutnika parnog reda $m \times n$, gdje je $m$ djeljiv s četiri. Metode konstrukcije magičnog pravokutnika za ostale slučajeve mogu se pronaći u [1] i [2].

**Korak A1.** (*Zmijoliki zapis po stupcima*) Neka su $m, n \in \mathbb{N}$, $m$ je djeljiv s četiri i $n$ je paran broj. Matricu reda $m \times n$ popunjavamo prirodnim brojevima od $1$ do $mn$ po stupcima na sljedeći način:
u prvi stupac upisujemo redom brojeve $1, 2, 3, \ldots, m$,
drugi stupac popunjavamo brojevima $2m, 2m-1, 2m-2, \ldots, m+1$,
treći stupac sadrži brojeve $2m+1, 2m+2, 2m+3, \ldots, 3m$,
četvrti stupac sadrži brojeve $4m, 4m-1, 4m-2, \ldots, 3m+1$,
$\vdots$
$(n-1)$-ti stupac popunjavamo brojevima $(n-2)m+1, (n-2)m+2, (n-2)m+3, \ldots, (n-1)m$,
posljednji, $n$-ti stupac, popunjavamo brojevima $nm, nm-1, nm-2, \ldots, (n-1)m+1$.

Dobivenu matricu reda $m \times n$ označimo s $P$.

[1] Mentorica je na Fakultetu za matematiku Sveučilišta u Rijeci; e-pošta: `sban@math.uniri.hr`
[2] Studentica je na istom fakultetu; e-pošta: `imestrovic@student.uniri.hr`

**Primjer 1.** Provedimo korak A1 u slučaju $m = 4$, $n = 2$, odnosno zapišimo zmijoliko po stupcima brojeve $1, 2, \ldots, 8$ :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 7 \\ 3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da je zbroj brojeva u svakom retku matrice $P$ jednak $9$, dok zbroj brojeva po stupcima nije konstantan. Dakle, matrica $P$ nije magični pravokutnik.

Sada navodimo drugi korak u konstrukciji magičnog pravokutnika parnog reda $m \times n$, gdje je $m$ djeljiv s četiri.

**Korak A2.** (*Zrcaljenje središnjih redaka*) Neka je $i = \frac{m}{4}+1, \frac{m}{4}+2, \ldots, \frac{3m}{4}$. Napravimo obrat elemenata $i$-tog retka matrice $P$ iz koraka A1 na sljedeći način: zamijenimo par elemenata na pozicijama $(i, j)$ i $(i, n-(j-1))$, gdje je $j = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$.

Matricu dobivenu u koraku A2 označimo s $Q$.

**Nastavak primjera 1.** Primijenimo korak A2 na matricu $P$ iz primjera 1 – zrcalimo središnje retke matrice $P$. Dobivamo sljedeću matricu:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 7 & 2 \\ 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Zbroj brojeva u svakom retku matrice $Q$ jednak je $9$, a zbroj brojeva po njenim stupcima je $18$, pa je matrica $Q$ magični pravokutnik reda $4 \times 2$.

**Teorem.** Neka su $m, n \in \mathbb{N}$. Neka je $m$ djeljiv s četiri i $n$ je paran broj. Matrica $Q$ dobivena koracima A1 i A2 je magični pravokutnik reda $m \times n$.

***Dokaz.*** Elementi $i$-tog retka matrice $P$ konstruirane u koraku A1 su redom: $i, (2m+1)-i, 2m+i, (4m+1)-i, 4m+i, (6m+1)-i, \ldots, (mn-2m)+i, (mn+1)-i$, za $i = 1, 2, \ldots, m$.

Koristeći jednakost

$$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

dobivamo da je zbroj elementa $i$-tog retka matrice $P$, gdje je $i = 1, 2, \ldots, m$, jednak

$$\begin{aligned} &(2m+1)+(6m+1)+(10m+1)+\ldots+(2mn-2m+1) \\ &= \frac{n}{2} + 2m\,(1+3+5+\ldots+(n-1)) = \frac{n}{2} + 2m \cdot \frac{n^2}{4} = \frac{n(mn+1)}{2}. \end{aligned}$$

Budući da zrcaljenje središnjih redaka u koraku A2 ne mijenja zbroj elemenata u retcima, zbroj elemenata $i$-tog retka matrice $Q$ je također jednak $\frac{n(mn+1)}{2}$, za $i = 1, 2, \ldots, m$.

Nakon primjene koraka A1, zbroj svih elemenata $j$-tog stupca matrice $P$ iznosi

$$\frac{mj(mj+1)}{2} - \frac{m(j-1)\left(m(j-1)+1\right)}{2} = m^2 j - \frac{m(m-1)}{2},$$

za $j = 1, 2, \ldots, n$, a zbroj elemenata na pozicijama $(i, j)$, za $i = \frac{m}{4}+1, \frac{m}{4}+2, \ldots, \frac{3m}{4}$, iznosi $\frac{m^2 j}{2} - \frac{m(m-1)}{4}$.

Za $j = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$, zbroj elemenata $j$-tog stupca manji je od broja $\frac{m(mn+1)}{2}$ za $\frac{(n+1-2j)m^2}{2}$.

Za $j = \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \ldots, n$, zbroj elemenata $j$-tog stupca veći je od broja $\frac{m(mn+1)}{2}$ za $\frac{(2j-n-1)m^2}{2}$.

Prema tome, zrcaljenjem središnjih redaka matrice $P$, dobivamo da je zbroj elemenata u $j$-tom stupcu matrice $Q$ jednak

$$\left(\frac{m^2 j}{2} - \frac{m(m-1)}{4}\right) + \left(\frac{m^2\left(n-(j-1)\right)}{2} - \frac{m(m-1)}{4}\right) = \frac{m(mn+1)}{2},$$

za sve $j = 1, 2, \ldots, n$.

Dakle, matrica $Q$ dobivena primjenom koraka A1 i A2, je magični pravokutnik reda $m \times n$. $\square$

**Primjer 2.** Konstruirajmo magični pravokutnik reda $4 \times 6$. Primjenom koraka A1 dobivamo:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 & 16 & 17 & 24 \\ 2 & 7 & 10 & 15 & 18 & 23 \\ 3 & 6 & 11 & 14 & 19 & 22 \\ 4 & 5 & 12 & 13 & 20 & 21 \end{bmatrix}.$$

Zrcaljenjem središnjih redaka matrice $P$ dolazimo do matrice

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 & 16 & 17 & 24 \\ 23 & 18 & 15 & 10 & 7 & 2 \\ 22 & 19 & 14 & 11 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 12 & 13 & 20 & 21 \end{bmatrix}.$$

Zbroj elemenata svakog retka u matrici $Q$ jednak je $75$, dok je zbroj elemenata svakog stupca $50$.

## Literatura


[1] F. S. Chai, A. Das, C. K. Midha, *Constuction of magic rectangles of odd order*, Australas. J. Combin., **80** (2013), 277–284.

[2] A. Das, J. P. De Los Reyes, C. K. Midha, P. Vellaisamy, *On a method to construct magic rectangles of even order*, Util. Math., **55** (2009), 131–144.