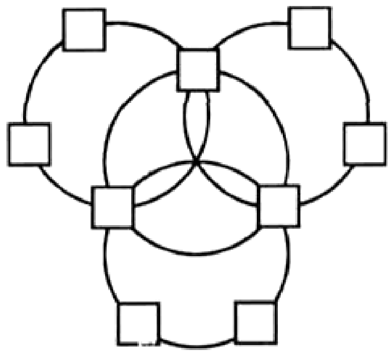
Марија Попоска
Охрид

МАГИЧНИ ФИГУРИ

Често пати може да се слушнат зборовите магичен број, магичен квадрат, магична фигура итн. Но, дали навистина постојат магични математички објекти. Секако дека не постојат, туку „магичност“ на некој математички објект (број, израз, фигура и слично) е својство кои ние по сопствена желба или договор му го доделуваме на тој математички објект. Најпознати магични фигури се магичните квадрати, за кои постои обемна литература. Во [1] се разгледани повеќе задачи во врска со магичните фигури. Во следните разгледувања ќе се осврнеме на неколку задачи во врска со магичните фигури.

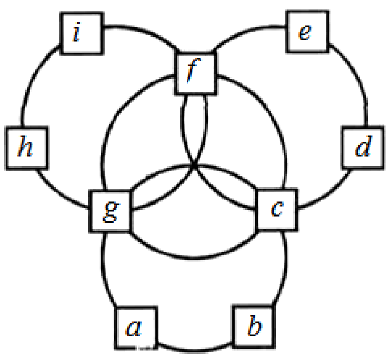
Задача 1. Во секое од деветте квадратчиња на цртежот десно запиши по еден од девет последователни природни броеви така што збирот на броевите запишани во квадратчињата кои се на секоја од четирите кружници е еднаков.



Решение. Нека деветте броеви кои треба да ги распоредиме се $k,k+1,...,$ $k+8$ и нека збирот на броевите запишани во квадратчињата кои се на секоја од кружниците е еднаков на S. Понатаму, нека бараното распоредување е како на цртежот долу лево.

Имаме:

$$\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}=\{k,k+1,k+2,k+3,k+4,k+5,k+6,k+7,k+8\}.$$



Сега, од условот на задачата следува:

$$\begin{aligned} a+b+c+g &= c+d+e+f \\ &= f+g+h+i \\ &= c+f+g=S. \end{aligned}$$

Ако ги собереме овие четири равенства го добиваме равенството

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e+f+g+h+i+& \\ +2(c+f+g)&=4S \end{aligned}$$

Но, $c+f+g=S$, па затоа од посленото равенство следува

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i+2S=4S,$$

односно

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i=2S. \qquad (1)$$

Од друга страна

$$\begin{aligned}a+b+c+d+e+f+g+h+i&=k+(k+1)+(k+2)+(k+3)+(k+4)+\\&+(k+5)+(k+6)+(k+7)+(k+8+\\&=9k+36=9(k+4),\end{aligned}$$

па ако замениме во (1) добиваме

$$2S=9(k+4). \qquad (2)$$

Понатаму, левата страна во (2) е парен број, па затоа мора и десната страна да е парен број, од што следува дека $k=2m$, за некој $m\geq 1$. Сега, од (2) следува $2S=9(2m+4)$, односно

$$S=9m+18. \qquad (3)$$

Ќе покажеме дека m не може да биде поголем од 1, односно дека k не може да биде поголем од 2. Нека претпоставиме дека $m>1$. Сега, од (3) добиваме

$$c+f+g=S=9m+18,$$

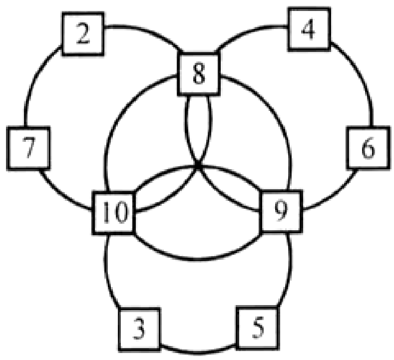
што значи дека збир на некои три броеви од множеството

$$\{2m, 2m+1, 2m+2, 2m+3, 2m+4, 2m+5, 2m+6, 2m+7, 2m+8\}$$

е еднаков на $9m+18$. Но последното не е можно, бидејќи ако $m>1$, тогаш за збирот на трите најголеми броеви од ова множество добиваме

$$6m+21<9m+18.$$

Според тоа, $m=1$, односно $k=2$ е единствената преостаната можност. Значи, броевите се 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10. Едно од можните решенија на задачата е дадено на цртежот десно. Обиди се да ги најдеш и други распоредувања на броевите. ■



Задача 2. Дали постојат четири последователни природни броеви кои може да се распоредат во темињата на правилен тетраедар, така што збирот на броевите во темињата на секој ѕид на тетраедарот е еднаков.

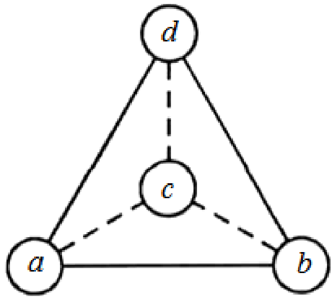
Решение. Нека претпоставиме дека постојат четири броеви a, b, c, d такви што

$$\{a,b,c,d\}=\{k,k+1,k+2,k+3\}$$

и

$$a+b+c=b+c+d=c+d+a=a+b+d=S.$$

Ги собираме последните четири равенства и добиваме



$$3(a+b+c+d)=4S. \qquad (4)$$

Понатаму, бидејќи

$$k+(k+1)+(k+2)+(k+3)=4k+6,$$

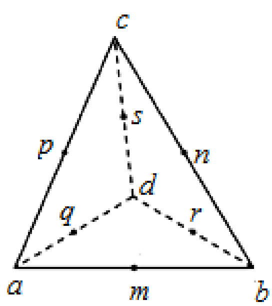
со замена во (4) добиваме $3(4k+6)=4S$, односно

$$3(2k+3)=2S. \qquad (5)$$

Но, во множеството природни броеви последното равенство не е можно, бидејќи левата страна е производ на два непарни броја, па затоа е непарен број, а десната страна е парен број. Оттука следува дека одговорот на поставеното прашање е дека не постојат четири последователни природни броеви со саканото својство. ■

Нека е даден тетраедар и да ги означиме средините на неговите рабови, кои во натамошните разгледувања ќе ги наречеме меѓуточки. За ваквиот тетраедар ќе целиме дека е тетраедар со по една меѓуточка. За тетраедарот со по една меѓуточка ќе велиме дека е *магичен* ако броевите од 1 до 10 може да се придружат на темињата и меѓуточките така што збирот на секои четири броја придружени на секој од четирите рабови е еднаков. Се поставува прашањето дали постои магичен тетраедар со по една меѓуточка. Во натамошните разгледувања ќе покажеме дека не постои магичен тетраедар со по една точка.

Нека го претпоставиме спротивното и нека со a,b,c,d ги означиме броевите запишани во темињата, а со m,n,p,q,r,s броевите запишани во меѓуточките (цртеж десно). Тогаш



$$\begin{aligned}a+m+b&=b+n+c=c+p+a\\&=a+q+d=b+r+d\\&=c+s+d=M,\end{aligned}$$

па акоземеме

$$a+b+c+d=T \text{ и } m+n+p+q+r+s=S,$$

па од претходните равенства добиваме

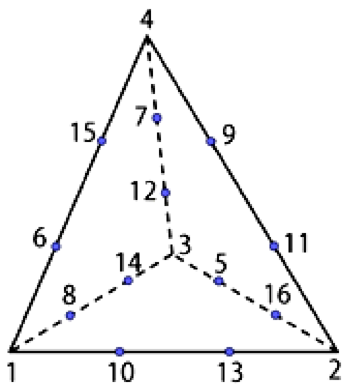
$$6M=3(a+b+c+d)+(m+n+p+q+r+s)=3T+S.$$

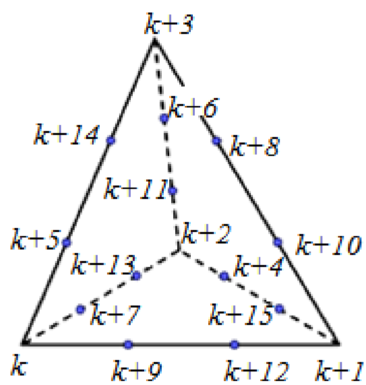
Според тоа, збирот $3T+S$ мора да е делив со 6. Понатаму, меѓу броевите од 1 до 10 има пет парни и пет непарни, па затоа можни се следниве случаи:

1) сите броеви запишани во темињата се непарни. Тогаш T е парен, а S е непарен, па затоа бројот $3T+S$ е непарен и не е делив со 6,
2) во темињата се запишани три три непарни броеви, па затоа T е непарен и S е парен, т.е. $3T+S$ е непарен и не е делив со 6,
3) во темињата се запишани два непарни броја, па затоа T е парен и S е непарен, т.е. $3T+S$ е непарен и не е делив со 6,
4) во темињата е запишан еден непарен број, па затоа па затоа T е непарен и S е парен, т.е. $3T+S$ е непарен и не е делив со 6,
5) сите броеви запишани во темињата се парни, па затоа T е парен и S е непарен, т.е. $3T+S$ е непарен и не е делив со 6.

Според тоа, не постои магичен тетрадер со по една меѓуточка во чии темиња и средините на рабовите се запишани природните броеви од 1 до 10. На потполно идентичлен начин следува дека тврдењето важи за било кои десет последователни природни броеви.

Понатаму, ако на секој раб на тетраедарот означиме по две точки, на пример точките кои работ го делат на три еднакви дела, тогаш добиваме тетраедар со две меѓуточки, при што имаме 16 темиња и мешуотчки. На долниот лев цртеж е покажано дека на овие точки може да се придружат броевите од 1 до 16 така што збирот на броевите запишани на секој раб на тетраедарот е еднаков, т.е. дека постои магичен тетраедар со по две меѓуточки.

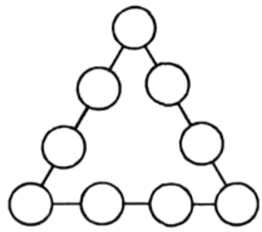




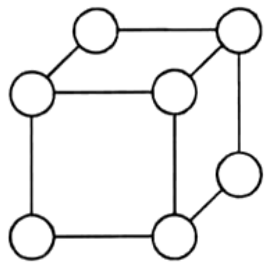
Јасно, ако земеме 16 последователни природни броеви $k, k+1, ..., k+16$, тогаш постои магичен тетраедар со по две меѓуточки при што збирот на броевите придружени на точките на секој раб е еднаков на $4k+22$ и истиот е прикажан на горниот десен цртеж.

Млади пријатели, на крајот од ова наше дружење, еве неколку задачи во кои самостојно треба да конструирате магични фигури.

1. а) Во кругчињата на цртежот десно запиши ги броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, така што збиротвите на сите броеви запишани во кругчињата кои се на една страна на триаголникот се еднакви.
   б) Дали овие збирови може да се еднакви на 18?
   в) Дали овие збиурови може да се еднакви на 22?



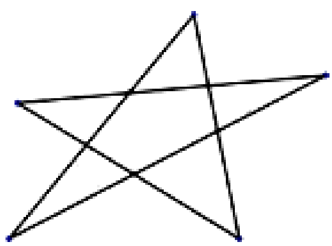
2. Броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 запиши ги во кругчињата на цртежот десно, така што збировите на броевите запишани во кругчињата во темињата се еднакви.



3. Броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 запиши ги во темињата на коцка така што збировите на броевите на секој ѕид на коцката се еднакви.

4. Дали може произволни шест последователни природни броеви да се запишат во темињата на октаедар, така што збировите на броевите на сите ѕидови на октаедарод се еднакви?

5. Во темињата на ѕвездата петокрака (цртеж десно) запиши ги броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 така што збировите на броевите запишани во темињата на секој од петте триаголници ќе бидат
   а) еднакви на $k=14$,
   б) еднакви на $k=16$,
   в) еднакви на $k=17$,
   г) еднакви на $k=19$.



   Упатство. Збирот на броевите зцапишани во темињата на петаголникот означи го со a, а збирот на броевите запишани во другите пет темиња на ѕвездата означи го со b. Тогаш $a+b=55$ и $2a+b=5k$.

Литература

1. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: По патеките на шампионите за математика (избрани задачи за IV, V и VI одделение деветтолетка), Армаганка, Скопје, 2019

2. Мичиќ, В., Ланг, Ф.: Још понешто о магичним фигурама, Математички лист, Београд

3. Милошевиќ. Д.: Бројеви и фигуре, Математички лист, Београд