

Ристо Малчески

Методи Главче

МАТЕМАТИКА ЗА СЕДМО ОДДЕЛЕНИЕ

Скопје 2025 година

416 решени примери

633 задачи за самостојна работа

9 тестови за проверување на знаењата

СОДРЖИНА

1	БРОЕВИ И ОПЕРАЦИИ СО БРОЕВИ	
1.1	Множества	7
1.1.1	Множества (повторување)	8
1.1.2	Пресек на множества	10
1.1.3	Унија на множества	12
1.1.4	Разлика на множества	14
1.1.5	Декартов производ	16
	Провери го своето знаење 1	19
1.2	Цели броеви	20
1.2.1	Позитивни и негативни броеви. Цели броеви	21
1.2.2	Спротивни броеви. Апсолутна вредност на цел број	25
1.2.3	Споредување цели броеви	28
1.2.4	Собирање цели броеви	30
1.2.5	Својства на собирањето цели броеви	34
1.2.6	Одземање цели броеви	36
1.2.7	Употреба на загради	37
1.2.8	Множење цели броеви	39
1.2.9	Својства на множењето цели броеви	43
1.2.10	Делење цели броеви	46
1.2.11	Бројни изрази. Равенки	48
1.2.12	Степен со показател природен број. Квадратен корен од природен број	52
	Провери го своето знаење 2	56
1.3	Позитивни рационални броеви	57
1.3.1	Поим за дробка. Видови дробки	58
1.3.2	Претставување на дробки на бројна полуправа	61
1.3.3	Проширување, скратување и споредување дробки	63
1.3.4	Собирање и одземање дробки	67
1.3.5	Множење дробки	71
1.3.6	Реципрочна дробка. Делење дробки, двојни дробки	75
1.3.7	Равенки со множење и делење дробки	79
1.3.8	Поим за децимален број. Основни својства	81
1.3.9	Претставување децимален број на бројна полуправа.	
	Споредување децимални броеви	85
1.3.10	Собирање и одземање децимални броеви	87
1.3.11	Множење децимални броеви	91
1.3.12	Делење децимални броеви	94
1.3.13	Претворање дробка во децимален број.	
	Заокружување децимални броеви	96
1.3.14	Проценти и примена на проценти	100
1.3.15	Размер и пропорционалност	103
	Провери го своето знаење 3	107
2	ГЕОМЕТРИЈА	
2.1	Точка и права. Заемна положба на две прави	110
2.2	Растојание меѓу две точки	113
2.3	Полуправа, отсечка и должина на отсечка	114

2.4	Операции со отсечки	117
2.5	Кружница и круг	119
2.6	Заемна положба на кружница и права и на две кружници	122
2.7	Полурамнина. Агол	125
2.8	Централен агол. Графичко собирање и одземање на агли	127
2.9	Соседни агли, видови агли	129
2.10	Мерење агли. Аритметички операции со агли	131
2.11	Агли на трансверзала	134
	Провери го своето знаење 4	138
2.12	Многуаголник	139
2.13	Триаголник, елементи на триаголник	141
2.14	Збир на агли во триаголник	143
2.15	Симетрала на отсечка	145
2.17	Симетрала на агол	148
2.17	Средна линија на триаголник	150
2.18	Основни конструкции на триаголник	152
2.19	Однос меѓу страните и аглите на триаголникот	155
2.20	Висини и тежишни линии на триаголник	158
2.21	Четириаголник. Видови четириаголници	160
2.22	Збир на агли во четириаголник	162
2.23	Паралелограм. Својства на паралелограмот	164
2.24	Видови паралелограми	169
2.25	Трапез, видови трапези. Делтоид	171
	Провери го своето знаење 5	174
2.26	Осна симетрија	175
2.27	Транслација	179
2.28	Ротација	183
2.29	Скица на 3Д форма гледана од напред, од горе и од страна	183
	Провери го своето знаење 6	188
	Додаток. Користење на Geogebra во геометрија	189
3	АЛГЕБРА	
3.1	Броен израз. Израз со променлива	195
3.2	Линеарен израз со една и две променливи	197
3.3	Собирање и одземање линеарни изрази. Производ на линеарен израз со број	200
3.4	Составување формули	202
3.5	Поим за равенка. Линеарна равенка со една непозната	204
3.6	Линеарна равенка со една непозната со целобројни коефициенти	206
3.7	Примена на линеарните равенки	209
3.8	Поим за пресликување (функција)	213
3.9	Низи цели броеви	214
3.10	Низи фигури	218
3.11	Линеарна функција	222
3.12	График на линеарна функција	224
	Провери го своето знаење 7	226

4	МЕРЕЊЕ	
4.1	Мерки за должина, маса и зафатнина	228
4.2	Мерки за време	232
4.3	Периметар на триаголник и паралелограм	235
4.4	Периметар на трапез и делтоид	238
4.5	Плоштина на квадрат, правоаголник и правоаголен триаголник	240
4.6	Врски меѓу мерните единици за плоштина	244
4.7	Плоштина на 2Д форми составени од квадрати, правоаголници и правоаголни триаголници	245
4.8	Волумен на квадар и коцка	249
4.9	Врски меѓу мерните единици за волумен	251
4.10	Плоштина на коцка и квадар	252
	Провери го своето знаење 8	255
5	РАБОТА СО ПОДАТОЦИ	
5.1	Собирање податоци	258
5.2	Сликовит и кружен дијаграм	261
5.3	Линиски и столбест дијаграм	265
5.4	Аритметичка средина, мода, медијана и ранг	268
5.5	Експеримет и настан. Експериментална веројатност	272
5.6	Елементарни настани. Веројатност	276
5.7	Споредуваме експериментална и теоретска веројатност	279
	Провери го своето знаење 9	280

В О В Е Д

Пред тебе е учебник по математика за VII одделение. Тој е работен така, што ќе можеш и самостојно да се здобиваш со новите знаења и умеења, кои треба да ги усвоиш оваа учебна година.

Материјалот е поделен во пет одделни целини (теми). На почетокот на секоја тема, покрај содржината што е разработена во неа даден е прегледот на новите знаења и умеења со кои треба да се стекнеш доколку успешно ги совладаш предвидените содржини. Секоја тема е заокружена целина и е разделена на одреден број лекции кои, исто така, претставуваат заокружени целини. Во секоја лекција примерите се нумерирани одделно за лекцијата. Истото се однесува и на задачите за вежбање кои се дадени по секоја лекција. На крајот од секоја тема е даден тест, со чија помош можеш да ги провериш своите знаења и умеења. Притоа, заради обемот на првата и втората тема, во нив се дадени по три теста, секој од кои опфаќа заокружена целина од темата.

Материјалот содржи голем број тврдења, од кои дел пожелно е дел да знаеш да ги докажуваш, а дел да ги усвоиш без доказ. Примерите, кои ги има во доволен број, се целосно решени и се дадени како илустрација на дефинициите и тврдењата кои што се усвојуваат. Затоа, особено е важно добро да ги разработиш, бидејќи само така можеш да се подготвиш за самостојно решавање на задачи, а потоа да преминеш кон решавање на задачите за вежбање.

За полесно користење на учебникот, дефинициите, примерите, тврдењата и деловите кои се предвидени како незадолжителни т.е. за оние што сакаат да знаат повеќе, се обоеени во следниве бои:

- дефиниција,
- пример,
- тврдење,
- за оние што сакаат да знаат повеќе.



За посеопфатно и подлабоко усвојување на предвидениот материјал, пожелно е да користиш и дополнителна литература, која ќе ти ја препорача твојот наставник.

Авторите

1 БРОЕВИ И ОПЕРАЦИИ СО БРОЕВИ

1.1 Множества

1.1.1 Множества (повторување)

1.1.2 Пресек на множества

1.1.3 Унија на множества

1.1.4 Разлика на множества

1.1.5 Декартов производ

Со множествата се запозна во претходните одделенија. Оваа година со изучувањето на содржините од подтемата Множества ќе ги прошириш своите знаења за множествата и операциите со множествата и ќе можеш:

- да наведуваш примери за множества, табеларно, описно и графички (со Венов дијаграм) да ги запишуваш множествата и да објаснуваш кога едно множество е определено,
- да ги користиш симболите $\in$, $\notin$, $\subseteq$, $\subset$ и да го објаснуваш нивното значење,
- да наведуваш примери на конечни и бесконечни множества и да објасниш што се тоа еквивалентни (истобројни) множества,
- да разликуваш истобројни од еднакви множества,
- да определуваш унија, пресек и разлика на множества,
- да ги објаснуваш преку примери својствата на операциите унија, пресек и разлика на множества,
- да наоѓаш Декартов производ на множества и истиот да го претставуваш со Декартова шема, и
- да ги користи усвоените знаења за множествата при решавање на некои логички задачи.

1.1.1 Множества (повторување)

Веќе знаеш дека поимот *множество* е основен поим и дека истиот не се дефинира, туку се објаснува преку примери. Така, на пример, велиме дека множество формираат:

- а) сите ученици од твоето одделение,
- б) буквите од латиничната азбука,
- в) арапските цифри итн.

Значи, множеството го сваќаме како целина на *различни објекти*. Објектите од кои е формирано едно множество ги нарекуваме *елементи* на тоа множество. Јасно, едно множество е определено ако ги знаеме сите елементи кои му припаѓаат.

Понатаму, знаеш дека множествата ги означуваме со големите букви на латиничната азбука: $A, B, C, D, \dots$, а за означување на елементите на множествата најчесто ги користиме малите букви на латиничната азбука $a, b, c, d, \dots$.

За означување дека еден елемент му припаѓа на дадено множество го користиме симболот $\in$, а дека елемент не му припаѓа на дадено множество означуваме со симболот $\notin$.

$x \in A$	$12 \notin A$
x припаѓа на A	12 не припаѓа на A

Како што знаеш множествата можеме да ги запишуваме на *табеларен, описен и графички* (Венов дијаграм) *начин*.

Пример 1. Запиши го табеларно, описно и графички множеството A од сите парни природни броеви помали од 12.

Решение. Парни природни броеви помали од 12 се: 2, 4, 6, 8 и 10. Значи, бараните запишувања се:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, табеларен начин,

$A = \{x \mid x \text{ е парен број природен број помал од } 12\}$, описен начин,



графички начин.

Исто така, знаеш дека множествата може да бидат *конечни* и *бесконечни*, при што на конечните множества може да им се определи бројот на елементите. Бројот на елементите на множеството A го означуваме со δA . Понатаму, за две множества A и B велиме дека се *истобројни* (*еквивалентни*) ако имаат еднаков број на елементи, односно ако A нема повеќе елементи од B и B нема повеќе елементи од A . Притоа пишуваме $A \sim B$ и читаме A е еквивалентно со B .

Пример 2. а) Множеството

$M = \{\text{понеделник, вторник, среда, четврток, петок, сабота, недела}\}$

е конечно и има седум елементи, односно $\delta M = 7$, а множеството природни броеви $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ е бесконечно.

б) За множеството $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ важи $\delta A = 7$, па затоа тоа е еквивалентно со множеството M .

Да го разгледаме множеството луѓе кои се повисоки од 3 метри. Како што знаеме, такви луѓе не постојат, па затоа ова множество нема елементи. Исто така, множествата

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 1\}, \quad B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 2 < x < 3\} \text{ и } C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 4 + x < 4\}$$

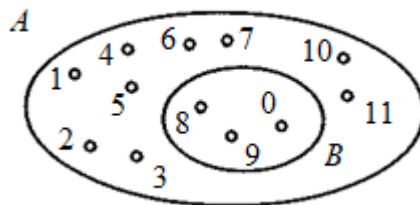
немаат елементи. Значи, имаме множество кое нема ниту еден елемент, кое го нарекуваме *празно множество* и го означуваме со $\emptyset$. Јасно, $\delta \emptyset = 0$.

На цртежот се дадени Веновите дијаграми на множествата

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} \text{ и } B = \{0, 8, 9\}.$$

Забележуваме дека секој елемент на множеството B е елемент на множеството A . Во ваков случај, односно ако од $x \in B$ следува $x \in A$ велиме дека

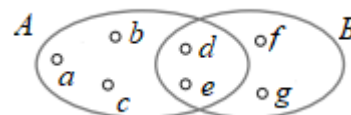
множеството B е *подмножеството* од множеството A и пишуваме $B \subseteq A$. Јасно, ако $B \subseteq A$ и $A \subseteq B$, тогаш множествата A и B имаат исти елементи, што значи дека тие се *еднакви*. Притоа пишуваме $A = B$.



На крајот, од ова наше повторување на претходно наученото за множествата, да се потсетиме дека, ако множеството B не е подмножество од множеството A , тогаш ја користиме ознаката $B \not\subseteq A$. Понатаму, ако за множествата A и B важи $B \subseteq A$, но постои елемент x таков што $x \in A$ и $x \notin B$, тогаш велиме дека B е *вистинско подмножество* од множеството A и пишуваме $B \subset A$.

Задачи за вежби

- а) Табеларно запиши го секое од множествата A и B кои што се дадени со Веновиот дијаграм.



- Одреди го бројот на елементите на секое од множествата A и B .

- а) Табеларно и со Венов дијаграм запиши ги множествата A и B ако се знае дека за нивните елементи важи:

$$1 \in A, 2 \in A, 2 \in B, 3 \in A, 4 \in A, 4 \in B, 5 \in A, 6 \in A, 6 \in B, 7 \in B, 8 \in A, 8 \in B \text{ и } 9 \in B.$$

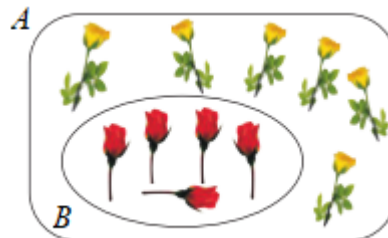
- Одреди го бројот на елементите на секое од множествата A и B .

- а) Разгледај го цртежот! Кое од следниве тврдења е точно:

$$1) A = B, \quad 2) A \subseteq B, \quad 3) B \subset A.$$

- Одреди го бројот на елементите на секое од множествата A и B .

- Кое множество $A = \{1, 1, 1, a, a, a, 2, 2, b, b, 3, c\}$ или $B = \{1, 2, 3, a, b, c\}$ има повеќе елементи?



- Опреди кои од следниве множества се конечни, а кои се бесконечни:

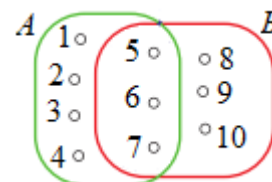
$$A = \{x \mid x \text{ е непарен природен број}\}, \quad B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 9999\},$$

$$C = \{z \mid z \text{ е жител на Индија}\} \text{ и } D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x > 99999999\}.$$

1.1.2 Пресек на множества

Да ги разгледаме множествата $M = \{a, b, c, d, e\}$ и $N = \{a, c, e, 1, 2\}$. Забележуваме дека елементите a, c и e се заеднички за двете множества. Значи, множеството P чии елементи припаѓаат и на множеството M и на множеството N е $P = \{a, c, e\}$.

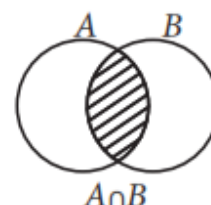
Слично, множествата A и B се претставени со Венов дијаграм. Како што можеме да забележиме броевите 5, 6 и 7, и само тие се заеднички за елементи на множествата A и B . Множеството $\{5, 6, 7\}$ кое што е формирано од заедничките елементи на множествата A и B го нарекуваме пресек на множествата A и B .



Пресек на две множества A и B е множеството C формирано од елементите кои што се заеднички за A и B .

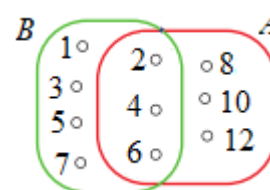
Запишуваме, $C = A \cap B$ и читаме „ C е еднакво на A пресек B “.

Според тоа, $C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.



Пример 1. Дадени се множествата $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ и $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Определи $A \cap B$ и $B \cap A$.

Решение. Множествата A и B ги претставуваме со Венов дијаграм. Сега е јасно дека $A \cap B = \{2, 4, 6\}$ и $B \cap A = \{2, 4, 6\}$.



Во претходниот пример видовме дека за дадените множествата A и B важи $A \cap B = \{2, 4, 6\} = B \cap A$. Меѓутоа, ова равенство важи за секои множества A и B , односно точно е следново тврдење.

За секои множества A и B точно е равенството $A \cap B = B \cap A$. Според тоа, пресекот на две множества има *комутативно* својство.

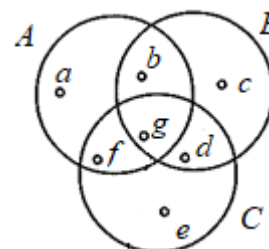
Пример 2. Дадени се множествата

$$A = \{a, b, f, g\}, B = \{b, c, d, g\} \text{ и } C = \{d, e, f, g\}.$$

Ако ги претставиме со Венов дијаграм, тогаш лесно се гледа дека $A \cap B = \{b, g\}$ и $B \cap C = \{d, g\}$. Понатаму, добиваме

$$(A \cap B) \cap C = \{b, g\} \cap \{d, e, f, g\} = \{g\} \text{ и}$$

$$A \cap (B \cap C) = \{a, b, f, g\} \cap \{d, g\} = \{g\}.$$

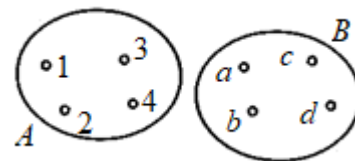


Во претходниот пример видовме дека за дадените множествата A , B и C важи $(A \cap B) \cap C = \{g\} = A \cap (B \cap C)$. Меѓутоа, ова равенство важи за секои множества A , B и C , односно точно е следново тврдење.

За секои множества A , B и C точно е равенството $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. Според тоа, пресекот на три множества има *асоцијативно* својство.

Пример 3. а) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{a, b, c, d\}$. Лесно се гледа дека $A \cap B = \emptyset$.

б) Нека $A = \{n \mid n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{n \mid n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$. Значи, множеството A е множеството парни природни броеви, а множеството B е множеството непарни природни броеви. Бидејќи не постои природен број кој истовремено е парен и непарен (зошто?), заклучуваме дека $A \cap B = \emptyset$.

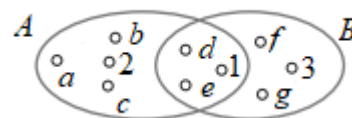


Во претходниот пример видовме дека постојат множества чиј пресек е празното множество. Така ја имаме следнава дефиниција.

За множествата A и B велиме дека се *дисјунктни* ако $A \cap B = \emptyset$.

Задачи за вежби

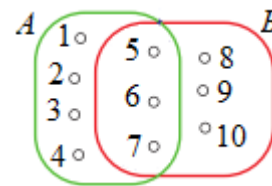
6. Множествата A и B се дадени со Венев дијаграм. Табеларно запиши ги овие множества и определи го нивниот пресек.



7. Дадени се множествата $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Покажи дека важи комутативното својство за пресекот.
8. За множествата $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ и $C = \{1, 3, 5\}$ провери го асоцијативното својство на пресекот.
9. Нека $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{1, 2, 5\}$.
- а) Најди $A \cap A$, а потоа $A \cap \emptyset$. Што заклучуваш? Дали добиените заклучоци важат за секое множество A ?
- б) Колку е $A \cap B$? Што заклучуваш? Дали овој заклучок важи за секои множества A и B такви што $B \subseteq A$?
10. Нека $A = \{2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{3, 4\}$. Дали постои множество X такво, што $A \cap X = B$? Колку множества X постојат такви што е исполнето даденото равенство?
11. Нека $A = \{2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{3, 4\}$. Дали постои множество X такво, што $B \cap X = A$? Зошто?
12. Дадени се множествата $A = \{a, b, f, g\}$ и $B = \{b, c, d, g\}$. Провери дали важи $A \cap B \subseteq A$ и $A \cap B \subseteq B$. Дали добиениот заклучок важи за секои множества A и B .

1.1.3 Унија на множества

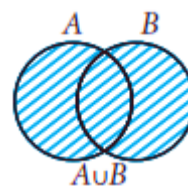
Множествата A и B се претставени со Венов дијаграм. Како што можеме да забележиме броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10, и само тие припаѓаат на некое од множествата A и B . Множеството $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ кое што е формирано од сите елементи кои припаѓаат на некое од множествата A и B го нарекуваме унија на множествата A и B .



Унија на две множества A и B е множеството C формирано од сите елементи на множествата A и B .

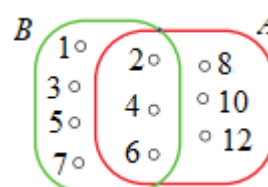
Запишуваме, $C = A \cup B$ и читаме „ C е еднакво на A унија B “.

Според тоа, $C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.



Пример 1. Дадени се множествата $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ и $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Определи $A \cup B$ и $B \cup A$.

Решение. Множествата A и B ги претставуваме со Венов дијаграм. Сега е јасно дека $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12\}$ и $B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12\}$.



Во претходниот пример видовме дека за дадените множествата A и B важи $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12\} = B \cup A$. Меѓутоа, ова равенство важи за секои множества A и B , односно точно е следново тврдење.

За секои множества A и B точно е равенството $A \cup B = B \cup A$. Според тоа, унијата на две множества има *комутативно* својство.

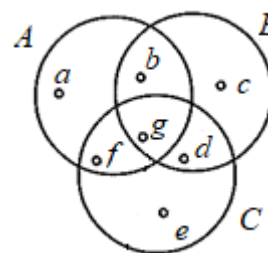
Пример 2. Дадени се множествата

$A = \{a, b, f, g\}$, $B = \{b, c, d, g\}$ и $C = \{d, e, f, g\}$.

Ако ги претставиме со Венов дијаграм, тогаш лесно се гледа дека $A \cup B = \{a, b, c, d, f, g\}$ и $B \cup C = \{b, c, d, e, f, g\}$. Сега,

$(A \cup B) \cup C = \{a, b, c, d, f, g\} \cup \{d, e, f, g\} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ и

$A \cup (B \cup C) = \{a, b, f, g\} \cup \{b, c, d, e, f, g\} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.



Во претходниот пример видовме дека за дадените множествата A , B и C важи $(A \cup B) \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g\} = A \cup (B \cup C)$. Меѓутоа, ова равенство важи за секои множества A , B и C , односно точно е следново тврдење.

За секои множества A , B и C точно е равенството $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Според тоа, унијата на три множества има *асоцијативно* својство.

Пример 3. Да ги разгледаме множествата $A = \{1, 2, 6, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 7\}$ и $C = \{4, 5, 6, 7\}$.

Имаме, $A \cap B = \{2, 7\}$, па затоа

$$(A \cap B) \cup C = \{2, 4, 5, 6, 7\}.$$

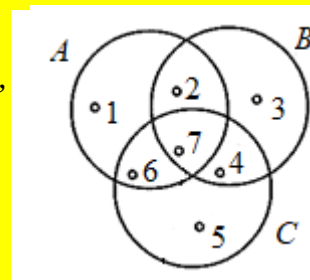
Од друга страна $A \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$ и $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, па затоа

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{2, 4, 5, 6, 7\}.$$

Значи, за дадените множества точно е равенството

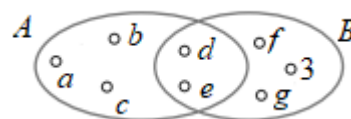
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

На сличен начин се добива дека за множествата A, B и C е точно равенството $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Провери!

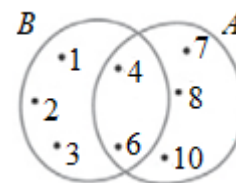


Задачи за вежби

13. Множествата A и B се дадени со Венов дијаграм. Табеларно запиши ги овие множества и определи ја нивната унија.



14. Множествата A и B се дадени со Венов дијаграм. Табеларно запиши ги овие множества и покажи дека важи кому-тативното својство за унијата.



15. Дадени се множествата

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\} \text{ и } C = \{1, 3, 5\}.$$

а) Провери го асоцијативното својство на унијата.

б) Провери ги равенствата

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \text{ и } (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

16. Нека $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{1, 2, 5\}$.

а) Најди $A \cup A$, а потоа $A \cup \emptyset$. Што заклучуваш? Дали добиените заклучоци важат за секое множество A ?

б) Колку е $A \cup B$? Што заклучуваш? Дали овој заклучок важи за секои множества A и B такви што $B \subseteq A$?

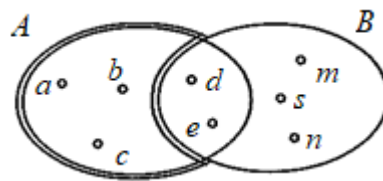
17. Нека $A = \{2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{3, 4\}$. Запиши барем две множества X такви што е исполнето равенство $B \cup X = A$?

18. Нека $A = \{2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{3, 4\}$. Дали постои множество X такво, што $A \cup X = B$? Зошто?

19. Дадени се множествата $A = \{a, b, f, g\}$ и $B = \{b, c, d, g\}$. Провери дали важи $A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$. Дали добиениот заклучок важи за секои множества A и B ?

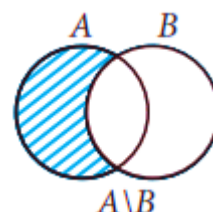
1.1.4 Разлика на множества

Множествата A и B се претставени со Венов дијаграм. Како што можеме да забележиме елементите a, b и c му припаѓаат на множеството A , но не му припаѓаат на множеството B . Множеството формирано од овие елементи го нарекуваме разлика на множествата A и B . Попрецизно ја имаме следнава дефиниција.



Разлика на две множества A и B е множеството C формирано од сите елементи што му припаѓаат на множеството A , а не му припаѓаат на B .

Запишуваме, $C = A \setminus B$ и читаме „ C е еднакво на A разлика B “. Според тоа, $C = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

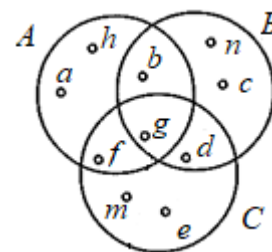


Пример 1. Множествата A, B и C се дадени со Венов дијаграм. Имаме $A \setminus B = \{a, f, h\}$ и $B \setminus A = \{c, d, n\}$, што значи $A \setminus B \neq B \setminus A$, т.е. за операцијата разлика на множества не важи комутативното својство. Понатаму, $B \setminus C = \{b, c, n\}$, па затоа

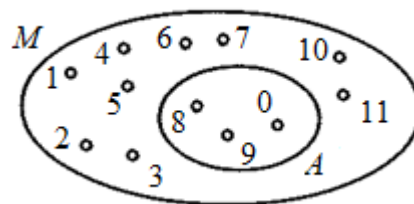
$$A \setminus (B \setminus C) = \{a, b, f, g, h\} \setminus \{b, c, n\} = \{a, f, g, h\},$$

$$(A \setminus B) \setminus C = \{a, f, h\} \setminus \{d, e, f, g, m\} = \{a, h\}.$$

Според тоа, $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$, т.е. за операцијата разлика на множества не важи асоцијативното својство.



За множествата $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ и $A = \{0, 8, 9\}$ важи $A \subseteq M$ и за разликата на двете множества имаме $M \setminus A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11\}$. Разликата од ваков вид има посебна важност и истата ја нарекуваме комплемент на множеството A во однос на множеството M . Така ја имаме следнава дефиниција.



Нека за множествата A и M важи $A \subseteq M$. Множеството $A' = M \setminus A$ го нарекуваме комплемент на множеството A во однос на множеството M .

За означување на комплементот се користи и ознаката A'_M .



Пример 2. Дадени се множествата $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Z = \{c \mid c = a + b, a, b \in S, a \neq b\}$. Определи ги множествата

а) $(Z \setminus S) \cup (S \setminus Z)$, б) $Z \cap (S \setminus Z)$, в) $(Z \setminus S) \cap (S \setminus Z)$.

Решение. Имаме $Z = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Според тоа, $Z \setminus S = \{6, 7, 8, 9\}$ и $S \setminus Z = \{1, 2\}$.

- а) Имаме: $(Z \setminus S) \cup (S \setminus Z) = \{6, 7, 8, 9\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 6, 7, 8, 9\}$.
 б) Имаме: $Z \cap (S \setminus Z) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cap \{1, 2\} = \emptyset$.
 в) Имаме: $(Z \setminus S) \cap (S \setminus Z) = \{6, 7, 8, 9\} \cap \{1, 2\} = \emptyset$.

Пример 3*. Елементите на множествата A, B и C се природни броеви кои се поголеми од 20 и се помали од 30. Притоа важи

$$A \cap B = \{23, 28\}, A \cap C = \{28, 29\}, B \cap C = \{28\}, A \cup B = \{21, 22, 23, 24, 28, 29\},$$

$$A \cup C = \{21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29\}, B \cup C = \{n \in \mathbb{N} \mid 23 \leq n < 30\}.$$

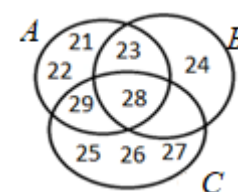
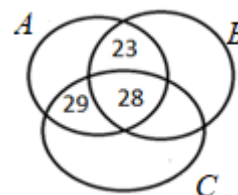
Определи ги множествата A, B и C .

Решение. Имаме, $B \cup C = \{23, 24, 25, 26, 27, 28, 29\}$. Понатаму, од

$$A \cap B = \{23, 28\}, A \cap C = \{28, 29\} \text{ и } B \cap C = \{28\}$$

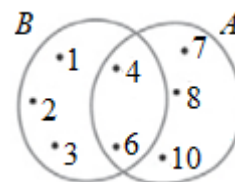
следува $A \cap B \cap C = \{28\}$. Ги внесуваме елементите на пресеците во Веновиот дијаграм. Сега од дадените унии следува дека броевите 21 и 22 не припаѓаат на множествата B и C , бројот 24 не припаѓа на множествата A и C , а броевите 25, 26 и 27 не припаѓаат на множествата A и B . Ги внесуваме броевите во Веновиот дијаграм и добиваме:

$$A = \{21, 22, 23, 28, 29\}, B = \{23, 24, 28\}, C = \{25, 26, 27, 28, 29\}.$$



Задачи за вежби

20. Множествата A и B се дадени со Венов дијаграм. Определи ги множествата $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$. Какви се меѓу себе множествата $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$. Дали добиениот заклучок важи за било кои две множества A и B ?



21. Дадени се множествата $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ и $C = \{1, 3, 5\}$. Пресметај ги разликите $A \setminus B$, $B \setminus C$, $C \setminus A$.

22. Нека $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Најди $A \setminus A$, $\emptyset \setminus A$ и $A \setminus \emptyset$. Што заклучуваш? Дали добиените заклучоци важат за секое множество A ?

23. Дадени се множествата $A = \{a, b, f, g\}$ и $B = \{b, c, d, g\}$. Провери дали важи $A \setminus B \subseteq A$. Дали добиениот заклучок важи за секои множества A и B ?

24. Определи ги множествата A и B ако $A \cup B = \{1, 3, 4, 5\}$, $A \setminus B = \{1, 5\}$ и $B \setminus A = \emptyset$.

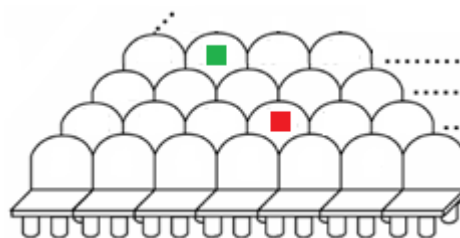
25. Определи ги множествата A и B ако $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{2\}$ и $A \setminus B = \{1\}$.

26. Определи го множеството C , ако

$$A \cap B \cap C = \{1, 4\}, A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B \setminus C = \{2, 5\} \text{ и } A \setminus C = \emptyset.$$

1.1.5 Декартов производ

На цртежот е прикажан дел од кино сала, при што четвртиот стол во вториот ред и вториот стол во четвртиот ред се означени. Редот и столот претставуваат еден пар. Ако земеме првиот број да го означува редот, а вториот број да го означува столот, тогаш за столот кој е означен црвено можеме да запишеме $(2, 4)$, а за столот означен со зелено можеме да запишеме $(4, 2)$. Притоа велиме дека столовите се означени со подредени парови, а како двата подредени пара означуваат различни столови заклучуваме дека подредените парови $(2, 4)$ и $(4, 2)$ не се еднакви. Попрецизно ја имаме следнава дефиниција.



Парот (a, b) во кој точно се знае кој елемент е прв, а кој елемент е втор го нарекуваме подреден пар. Во подредениот пар (a, b) , a е прва, а b е втора компонента.

Пример 1. Нека $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{1, 2\}$. Подредените парови чија прва компонента е елемент од множеството A , а втора компонента е од множеството B се:

$$(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2).$$

Претходно видовме зошто подредените парови $(2, 4)$ и $(4, 2)$ не се еднакви. Што се однесува до еднаквоста на два подредени пара, ја имаме следнава дефиниција.

Подредениот пар (a, b) е еднаков на подредениот пар (c, d) ако $a = c$ и $b = d$. Притоа пишуваме $(a, b) = (c, d)$.

Во пример 1 ги запишавме сите подредени парови чија прва компонента е елемент на множеството $A = \{a, b, c\}$, а втора компонента е елемент на множеството $B = \{1, 2\}$. Во врска со ова ја имаме следнава дефиниција.

Нека A и B се непразни множества. Множеството на кое елементи му се сите подредени парови чија прва компонента е елемент на множеството A , а втората компонента е елемент на множеството B го нарекуваме Декартов производ на множествата A и B . Ова множество го означуваме со $A \times B$ и се чита „ A по B “. Според тоа,

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ и } y \in B\}.$$

Декартовиот производ на непразното множество A со самото себе го нарекуваме Декартов квадрат на множеството A и го означуваме A^2 .

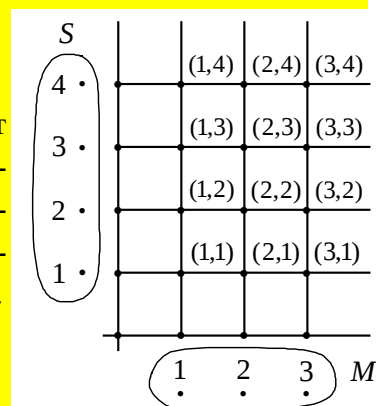
Пример 2. а) Според пример 1 Декартовиот производ на множествата $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{1, 2\}$ е

$$A \times B = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\}.$$

б) За множествата $M = \{1, 2, 3\}$ и $S = \{1, 2, 3, 4\}$ имаме

$$M \times S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}.$$

На цртежот десно е даден графички приказ на Декартовиот производ на множествата M и S . Како што можеме да видиме овој приказ е квадратна решетка, која ја нарекуваме *Декартова шема*, и во чии темиња се наоѓаат елементите на Декартовиот производ. Објасни како е нацртана Декартовата шема.



в) За множеството $A = \{x, y, z\}$ Декартовиот квадрат е

$$A^2 = \{(x, x), (x, y), (x, z), (y, x), (y, y), (y, z), (z, x), (z, y), (z, z)\}.$$

Задачи за вежби

27. Што треба да се стави на местото на знакот $*$ за да имаме точно равенство:

а) $(2, *) = (2, 4)$, б) $(*, a) = (a, a)$.

28. Што треба да се стави на местата на знаците $*$ и $\bullet$ за да имаме точно равенство:

$(*, 5) = (4, \bullet)$.

29. За множествата $A = \{1, 2, a\}$ и $B = \{3, b, c\}$ определи ги Декартовите производи

$A \times B$ и $B \times A$. Дали за Декартовиот производ важи комутативното својство?

30. Ако $A \times B = B \times A$, што може да заклучиш за множествата A и B ?

31. Ако $A \times B = \{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (d, b), (d, c)\}$ определи ги множествата A и B .

За оние што сакаат да знаат повеќе

а) Нека A и B се конечни дисјунктни множества. Тогаш унијата $A \cup B$ е конечно множество и притоа важи $\delta(A \cup B) = \delta A + \delta B$. Навистина, ако $\delta A = m$ и $\delta B = n$, тогаш бидејќи множествата A и B се дисјунктни можеме да сметаме дека елементите на множеството A се $1, 2, \dots, m$, а елементите на множеството B се $m+1, m+2, \dots, m+n$. Според тоа, $A \cup B = \{1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n\}$, па затоа $\delta(A \cup B) = m+n = \delta A + \delta B$.

б) Ако A и B се произволни конечни множества, тогаш множествата $A \cap B$, $A \setminus (A \cap B)$ и $B \setminus (A \cap B)$ се конечни дисјунктни множества (види го Веновиот дијаграм) и важи

$$A = (A \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B),$$

$$B = (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B),$$

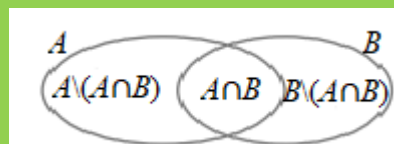
$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus (A \cap B)).$$

Сега, од а) следува

$$\delta A = \delta(A \setminus (A \cap B)) + \delta(A \cap B),$$

$$\delta B = \delta(B \setminus (A \cap B)) + \delta(A \cap B),$$

$$\delta(A \cup B) = \delta(A \setminus (A \cap B)) + \delta(A \cap B) + \delta(B \setminus (A \cap B)).$$



Во следните два примери ќе покажеме како добиените равенства може да се искористат при решавање на логички задачи.

Пример 3. Во едно училиште работат 60 наставници. Од нив 39 пијат кафе, 28 пијат чај и 16 пијат и кафе и чај. Дали во училиштето има наставници кои не пијат ниту чај ниту кафе?

Решение. Со A да го означиме множеството наставници кои пијат кафе, а со B множеството наставници кои пијат чај. Тогаш

$$\delta(A \cap B) = 16,$$

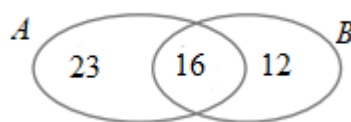
$$\delta(A \setminus (A \cap B)) = \delta A - \delta(A \cap B) = 39 - 16 = 23,$$

$$\delta(B \setminus (A \cap B)) = \delta B - \delta(A \cap B) = 28 - 16 = 12,$$

па затоа

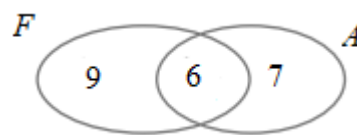
$$\delta(A \cup B) = 23 + 16 + 12 = 51.$$

Значи, 51 наставник пијат кафе или чај, па затоа $60 - 51 = 9$ наставници не пијат ниту кафе ниту чај.



Пример 4. Во една група од 40 луѓе 15 знаат француски јазик, 13 знаат англиски јазик и 6 ги знаат и двата јазика. Дали во групата има луѓе кои не знаат ниту еден од двата јазика?

Решение. Аналогно како во претходната задача добиваме дека $15 - 6 = 9$ луѓе знаат само француски јазик, $13 - 6 = 7$ знаат само англиски јазик и $40 - (9 + 6 + 7) = 18$ луѓе не знаат ниту еден од двата јазика.

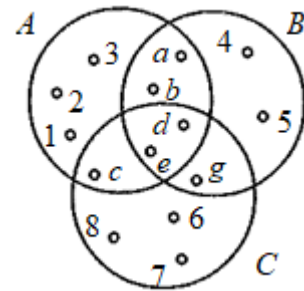


Задачи за вежби

32. Во едно училиште има 500 ученици. Баскет играат 325 ученици, фудбал играат 250 ученици, а 35 ученици не се занимаваат ниту со баскет, ниту со фудбал. Колку ученици играат само баскет, а колку само фудбал? Колку се занимаваат и со двата спорта?
33. Сите ученици на едно одделение се членови на една од секциите: кошаркарска, рецитаторска и математичка. Само 6 ученици се членови на сите три секции, а 12 ученици се членови на повеќе од една секција. Понатаму, 8 ученици се членови на математичката и кошаркарската секција, а 9 ученици се членови на математичката и рецитаторската секција. Колку ученици учествуваат во работата на рецитаторската и кошаркарската секција, а не се членови на математичката секција?
34. Од 70 ученици во шесто одделение точно 27 се членови на драмската секција, 32 пеат во хор, а 22 се спортисти. Во драмската секција има 16 членови на хорот, а во хорот има 6 спортисти, додека во драмската секција има 8 спортисти. Тројца спортисти се членови и на хорот и на драмската секција.
Колку ученици не членуваат во ниту една од споменатите секции?
Колку ученици се занимаваат само со спорт?

Провери го своето знаење 1

- Запиши ги табеларно и со Венов дијаграм множествата чии елементи се:
 - месеците во една година,
 - природните броеви од седмата десетка.
- Множеството $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ запиши го на описен начин, а потоа претстави го со Венов дијаграм.



- Множествата A, B, C се дадени со Венов дијаграм. Запиши ги овие множества табеларно.
- Определи го бројот на множеството
 - $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$,
 - $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 4 < x < 44\}$.
- Кои од следниве множества се истобројни:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 10 < x < 15\},$$

$$B = \{a \mid a \text{ е годишно време}\},$$

$$C = \{x \mid x \text{ е самогласка во македонската азбука}\}.$$
- Кои од следниве множества се конечни:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots\},$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 999\},$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x \leq 555\},$$

$$D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x \leq 0\}.$$
- Дадени се множествата: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$. Определи ги множествата
 - $A \cap B$,
 - $A \cup B$,
 - $A \setminus B$ и
 - $B \setminus A$.
- Дадени се множествата: $A = \{1, 2, 4, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ и $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Определи ги множествата
 - $A \cap (B \cup C)$,
 - $(A \cup B) \cap C$,
 - $C \setminus (A \cup B)$,
 - $(A \cup B) \setminus C$.
- Дадени се множествата $A = \{1, 2\}$ и $B = \{a, b, c\}$. Определи ги множествата
 - $A \times B$,
 - $B \times A$.

1.2 Цели броеви

- 1.2.1 Позитивни и негативни броеви. Цели броеви
- 1.2.2 Спротивни броеви. Апсолутна вредност на цел број
- 1.2.3 Споредување цели броеви
- 1.2.4 Собирање цели броеви
- 1.2.5 Својства на собирањето цели броеви
- 1.2.6 Одземање цели броеви
- 1.2.7 Употреба на загради
- 1.2.8 Множење цели броеви
- 1.2.9 Својства на множењето цели броеви
- 1.2.10 Делење цели броеви
- 1.2.11 Бројни изрази. Равенки
- 1.2.12 Степен со показател природен број. Квадратен корен од природен број

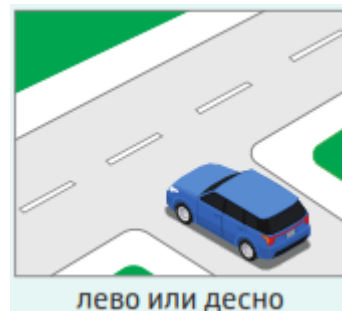
Со усвојување на содржините од оваа поттема ќе ја осознаеш потребата за проширување на множеството природни броеви и ќе научиш:

- што се цели броеви,
- што е бројна оска и како да ги претставуваш целите броеви на бројната оска,
- да ги споредуваш и подредуваш целите броеви,
- да определуваш спротивен број на даден број и апсолутна вредност на цел број,
- да собираш и одземаш цели броеви и да ги применуваш својствата на собирањето на целите броеви,
- да множиш и делиш цели броеви и да ги користиш својствата на множењето на целите броеви,
- да пресметуваш вредност на броен израз од цели броеви,
- да решаваш равенки со користење на операциите во множеството цели броеви и нивните својства,
- да објаснуваш што е степен со показател природен број,
- да пресметуваш вредност на степен со показател природен број, и
- да препознаваш квадрат на природен број до 400 и соодветниот квадратен корен.

1.2.1 Позитивни и негативни броеви. Цели броеви

Пример 1. Иван тргнал да го посети својот другар Ардијан, кој му објаснил дека на последната раскрсница треба да сврти и по 200 m ќе дојде до неговата кука.

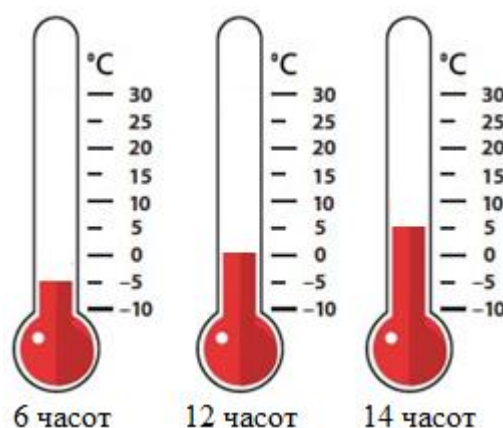
Иван пристигнал до раскрсницата, застанал и се запрашал „Каде сега да одам?“. Значи, Иван не добил информација дали треба да оди *лево* или *десно*, односно во која *насока* треба да се движи. Имено, во случајот имаме две насоки.



Пример 2. Дедо Марко го зел својот дневник и прочитал што запишал на 1.1.2014 година. Меѓу другото, во дневникот на дедо Марко пишувало: „Утрово во 6 часот температурата беше 5°C под нулата, во 12 часот беше 0°C , а во 14 часот беше 5°C над нулата.“

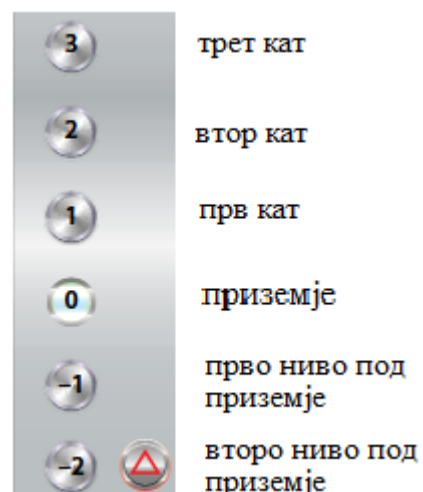
Логично е да се запрашаме дали под нулата и над нулата се две спротивни насоки? Одговорот на поставеното прашање е потврден. Притоа за температурите под 0°C велíme дека се негативни, а за температурите над 0°C дека се позитивни.

Уште повеќе, за означување на негативните температури е прифатено напред да стои знакот $-$ (*минус*), а за означување на позитивните температури да стои знакот $+$ (*плус*) или да не се пишува ништо. Значи, температурите запишани во дневникот на дедо Марко се: -5°C , 0°C и $+5^{\circ}\text{C}$.



Пример 3. Слободан го посетил новиот трговски центар, кој имал гаражи на две нивоа под приземјето. Кога влегол во лифтот, тој забележал дека нивоата под приземјето се означени со предзнакот $-$ (минус), па така првото ниво под приземјето било означено со -1 , а второто ниво било означено со -2 . Исто така забележал дека приземјето било означено со 0, а катовите над приземјето биле означени редоследно со броевите 1, 2 и 3.

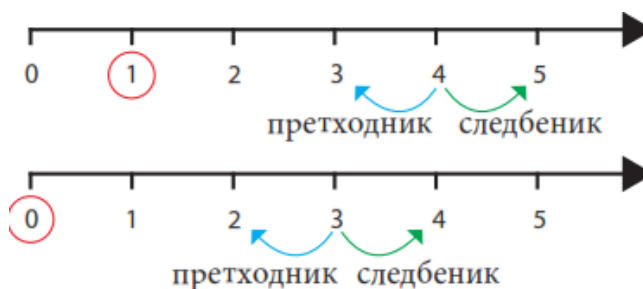
Сигурно забележа, дека постои голема сличност во означувањето на температурите на термометарот и означувањето на нивоата во лифтот на трговскиот центар.



Како што веќе знаеш, броевите 1, 2, 3, 4, ... се природни броеви и множеството природни броеви е $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. Понатаму, секој природен број има следбеник, а секој природен број, освен бројот 1, има претходник. Но, кога множеството природни броеви

$\mathbb{N}$ го проширивме со бројот 0, го добивме множеството $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. Сега, секој број во множеството $\mathbb{N}_0$ има следбеник и секој број, освен бројот 0, има претходник.

Исто така, знаеш дека збир на било кои два природни броја е природен број, но дека ако намалителот е помал од намаленикот, тогаш разликата на вакви два броја не можеме да ја пресметаме во множеството природни броеви. Имено:



$$12 - 9 = 3, \quad 22 - 11 = 11, \quad 143 - 140 = 3, \quad 57 - 22 = 35,$$

но разликата $13 - 17$ не можеме да ја пресметаме, бидејќи $13 < 17$.

Значи, имаме две причини да се обидеме да го прошириме множеството $\mathbb{N}_0$. Тоа ќе го направиме така што секој број на новото множество ќе има претходник, а потоа ќе покажеме дека во новото множество можеме да ја најдеме разликата на било кои два броја.

Множеството $\mathbb{N}$ го проширивме во множеството $\mathbb{N}_0$ така што на најмалиот број, т.е. на бројот 1 му доделивме претходник, а тоа е бројот 0. Ако сега, за бројот 0 воведеме претходник -1 , па на бројот -1 му воведеме претходник -2 , на бројот -2 му воведеме претходник -3 итн. ние всушност ги воведуваме таканаречените *негативни броеви* $-1, -2, -3, -4, -5, -6, \dots$.

Пример 4. Запиши ги претходникот и следбеникот на броевите $-8, -5, 0$ и 12 .

Решение. Претходник на бројот -8 е бројот -9 , а негов следбеник е бројот -7 .

Претходник на бројот -5 е бројот -6 , а негов следбеник е бројот -4 .

Претходник на бројот 0 е бројот -1 , а негов следбеник е бројот 1 .

Претходник на бројот 12 е бројот 11 , а негов следбеник е бројот 13 .

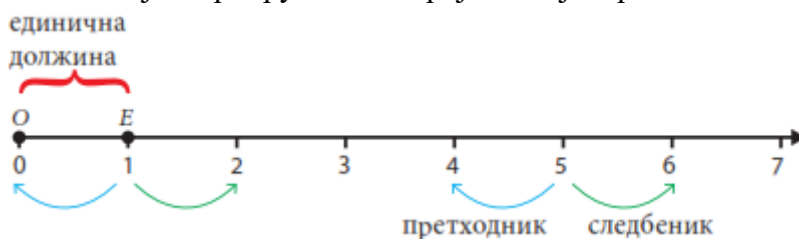
Ако сега го прошириме множеството $\mathbb{N}_0$ со воведените негативни броеви, го добиваме множеството цели броеви $\mathbb{Z}$, кое е составено од сите природни броеви, нулата и воведените негативни броеви. Според тоа,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Познато ти е дека $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$, а како што можеме да забележиме од начинот на воведувањето на целите броеви следува дека $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$. Понатаму, броевите $1, 2, 3, 4, \dots$ се природни броеви, но тие се и цели броеви и истите ќе ги нарекуваме *позитивни цели броеви* и множеството позитивни цели броеви ќе го означуваме со $\mathbb{Z}^+$. Значи, $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Како што рековме, броевите $-1, -2, -3, -4, -5, -6, \dots$ го формираат множеството *негативни цели броеви*, кое ќе го означуваме со $\mathbb{Z}^-$. Значи, $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, \dots\}$.

Од претходните разгледувања следува: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$.

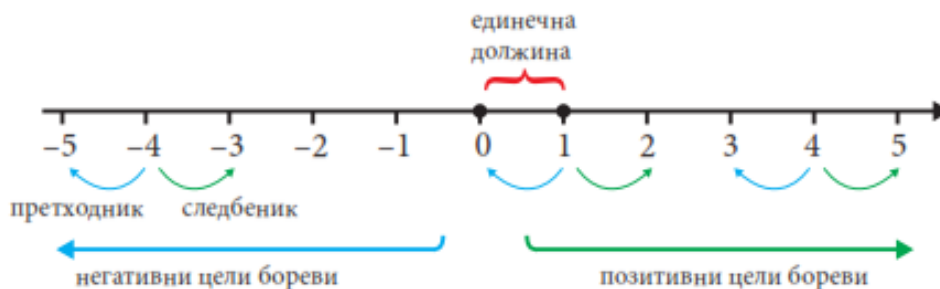
Како што знаеме, бројната полуправа е полуправа на која го претставивме множеството $\mathbb{N}_0$. Почетната точка на бројната полуправа ја означивме со O и ја нарековме *координатен почеток*. На координатниот почеток O го придруживме бројот 0, а потоа нанесовме отсечка OE која ја нарекуваме *единична отсечка*, а нејзината должина ја нарекуваме *единична должина*. Сега, на секој број од множеството $\mathbb{N}_0$ му придружуваме точка која е за единична должина во десно од точката придружена на претходникот на тој број. На пример, точката која е придружена на бројот 6 е за единична должина оддалечена од точката која е придружена на бројот 5 кој е претходник на бројот 6.



На сличен начин ја воведуваме бројната права на која ќе ги претставиме целите броеви. Оваа права ја добиваме така што:

- 1) преку координатниот почеток ја продолжуваме бројната полуправа во спротивната насока, и
- 2) на целите броеви им придружуваме точки од бројната права така што секој следбеник или претходник на било кој број мора да е оддалечен за единична должина од тој број.

Од начинот на придружувањето на точките на целите броеви добиваме дека десно од координатниот почеток O се точките кои им се придружени на позитивните цели (природните) броеви, а лево од координатниот почеток се точките кои им се придружени на негативните цели броеви.

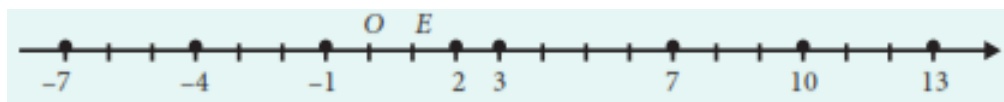


Бројот што е придружен на дадена точка на бројната права го нарекуваме *координата на таа точка*. Бројната права ја нарекуваме *координатна оска*, насоката на координатната оска десно од нулата ја нарекуваме *позитивна насока*, а спротивната насока ја нарекуваме *негативна насока* на координатната оска.

Ако координатата на точката A е бројот k , тогаш пишуваме $A(k)$.

Пример 5. На бројната правазначи ги точките кои им се придружени на броевите: $-7, 13, 2, 3, -4, 10, -1, 7$.

Решение. Точките кои се придружени на дадените осум броеви се прикажани на црежот.



Пример 6. Еден јануарски ден во главните градови на Балканските земје биле измерени температурите: Истанбул 11°C , Атина 9°C , Скопје -7°C , Тирана 4°C , Софија -8°C , Подгорица -5°C , Сараево -12°C , Белград -9°C , Кишињев -11°C и Букурешт -8°C . Во кои градови тепературата е искажана со негативни, а во кои со позитивни мерни броеви?

Решение. Со негативни мерни броеви температурата е искажана во градовите: Скопје, Софија, Подгорица, Сараево, Белград, Кишињев и Букурешт, а со позитивни во градовите Истанбул, Тирана и Атина.

Пример 7. Дадено е множеството $A = \{-7, -11, 2, 5, 12, -4, -21, 8, 21, -17\}$. Запиши ги табеларно множествата

$B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \text{ позитивен број}\}$ и $C = \{x \mid x \in A \text{ и } x \text{ негативен број}\}$.

Решение. Позитивни броеви во множеството A се: 2, 5, 12, 8, 21, што значи дека $B = \{2, 5, 12, 8, 21\}$. Негативни броеви во множеството A се: $-7, -11, -4, -21, -17$, што значи дека $C = \{-7, -11, -4, -21, -17\}$. ■

Задачи за вежби

35. Определи ги множествата: $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 \setminus \mathbb{Z}$.

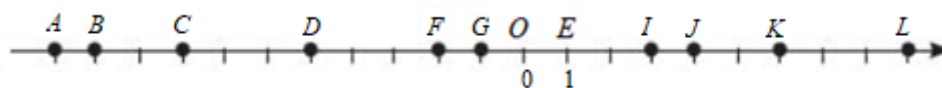
36. Определи ги множествата: $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}$.

37. Определи ги множествата: $\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z}^+ \setminus \mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z}^- \setminus \mathbb{Z}^+$.

38. Дадено е множеството $A = \{-17, 11, -2, -5, 22, -41, -27, 18, 121, -117\}$. Запиши ги табеларно множествата

$B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \text{ е позитивен број}\}$ и $C = \{x \mid x \in A \text{ и } x \text{ е негативен број}\}$.

39. Определи ги координатите на точките: $A, B, C, D, F, G, I, J, K, L$, прикажани на цртежот.



40. Претстави ги на бројната права точките: $A(-4)$, $B(3)$, $C(-8)$, $D(6)$, $E(-6)$.

41. Определи ја должината на отсечката AB ако:

а) $A(0)$, $B(7)$, б) $A(-5)$, $B(0)$, в) $A(-4)$, $B(3)$, г) $A(2)$, $B(9)$, д) $A(-12)$, $B(-3)$.

42. Дадени се точките $A(-5)$ и $B(3)$. Определи ја координатата на точката C која е средина на отсечката AB .

43. На координатната оска претстави ги точките A' и B' кои соодветно се симетрични на точките $A(-4)$ и $B(5)$ во однос на координатниот почеток. Определи ги координатите на точките A' и B' .

1.2.2 Спротивни броеви. Апсолутна вредност на цел број

Калина и Аида застанале грб со грб и почнале да чекорат истовремено, правејќи чекори со еднакви должини. Калина чекорела лево, а Аида десно, при што двете чекорите ги правеле истовремено и броеле. Ако замислиме дека девојчињата се движат по бројна оска, при што на почетокот се наоѓале во координатниот почеток, добиваме дека за секој кажан број кој е во позитивната насока на оската, постои број кој е во негативната насока и кој се разликува само по знакот. Тоа значи, дека кога Калина е во точката B , тогаш Аида е во точката C , а кога Калина е во точката A , тогаш Аида е во точката D .



Како што можеме да забележиме, важи $\overline{OB} = 3 = \overline{OC}$, што значи дека точките B и C се симетрични во однос на координатниот почеток, а исто и точките A и D се симетрични во однос на координатниот почеток. Координатите на точките B и C се -3 и 3 , и истите се разликуваат само по знакот, а истото важи и за координатите -7 и 7 на точките A и D . Така ја имаме следнава дефиниција.

За два цели броја, кои се разликуваат само по знакот, велиме дека се спротивни броеви. Притоа по дефиниција земаме дека бројот 0 е спротивен на самиот себе, т.е. $-0 = 0$.

Пример 1. За секој цел број a неговиот спротивен број е $-a$. Бидејќи 5 и -5 се спротивни броеви, ако земеме $a = +5$, добиваме дека $-a = -(+5) = -5$. Понатаму, ако земеме $a = -5$, добиваме $-a = -(-5) = 5$.

Заклучокот од пример 1 важи за секој цел број a , што значи дека точно е следново тврдење.

За секој цел број a , точно е равенството $-(-a) = a$.

Пример 2. Запиши ги без загради изразите:

а) $-(-(-6))$, б) $-(-(-(-6)))$.

Решение. Имаме,

а) $-(-(-6)) = -(+6) = -6$ и

б) $-(-(-(-6))) = -(-(+6)) = -(-6) = 6$.

Пример 3. Пополни ја табелата:

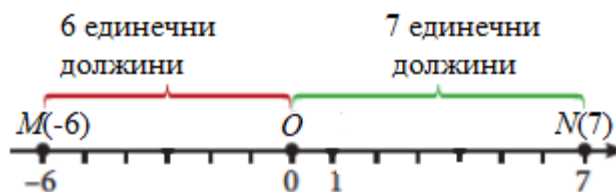
a	4	-5					412	111	
$-a$			9	-123	132	-33			-39

Решение. Ако искористиме дека за секој цел број a важи $-(-a) = a$ добиваме

a	4	-5	-9	123	-132	33	412	111	39
$-a$	-4	5	9	-123	132	-33	-412	-111	-39

Нека на координатната оска се дадени точките $M(-6)$ и $N(7)$, и нека нивните растојанија од координатниот почеток се изразени со единични отсечки.

Растојанието од точката O до точката $M(-6)$ е 6 единични отсечки, т.е. $\overline{OM} = 6$, а растојанието од точката O до точката $N(7)$ е 7 единични должини. Растојанието меѓу било која точка на координатната оска и координатниот почеток е од посебно значење. Така ја имаме следнава дефиниција.



Растојанието меѓу координатниот почеток и точката придружена на некој цел број a го нарекуваме **апсолутна вредност** на бројот a , која ја означуваме со $|a|$.

Од дефиницијата на апсолутната вредност и од тоа што точките кои се придружени на броевите a и $-a$ се симетрични во однос на координатниот почеток O , заклучуваме дека за секој цел број a важи $|a| = |-a|$. Понатаму, ако a е позитивен цел број, тогаш $|a| = a$, а ако a е негативен цел број, тогаш $|a| = -a$. Според тоа,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ако } a \text{ е позитивен број,} \\ 0, & \text{ако } a = 0, \\ -a, & \text{ако } a \text{ е негативен број.} \end{cases}$$

Пример 4. Спореди ги броевите:

- а) $|-3|$ и $|-4|$, б) $|3|$ и $|-4|$, в) $|-3|$ и $|4|$.

Решение. а) Имаме, $|-3| = 3 < 4 = |-4|$.

б) Имаме, $|3| = 3 < 4 = |-4|$.

в) Имаме, $|-3| = 3 < 4 = |4|$.

Пример 5. Пресметај ја вредноста на изразот:

- а) $|-5| + |-3|$, б) $|-5| - |-3|$, в) $|-5| + |3|$.

Решение. Имаме:

а) $|-5| + |-3| = 5 + 3 = 8$,

б) $|-5| - |-3| = 5 - 3 = 2$,

в) $|-5| + |3| = 5 + 3 = 8$.

Пример 6. Пресметај ја вредноста на изразот:

- а) $|-5| \cdot |-3| + |-12|$, б) $|5| \cdot |-3| + |-2| \cdot |-7|$, в) $|-9| \cdot |-8| - 7 \cdot |-10|$.

Решение. Имаме:

- а) $|-5| \cdot |-3| + |-12| = 5 \cdot 3 + 12 = 15 + 12 = 27$,
б) $|5| \cdot |-3| + |-2| \cdot |-7| = 5 \cdot 3 + 2 \cdot 7 = 15 + 14 = 29$,
в) $|-9| \cdot |-8| - 7 \cdot |-10| = 9 \cdot 8 - 7 \cdot 10 = 72 - 70 = 2$.

Пример 7. Реша ја равенката:

- а) $|x| = 3$, б) $|x| = |-3|$, в) $|x| + 1 = 4$, г) $|x| + 3 = |-4|$.

Решение. а) Бидејќи $|3| = |-3| = 3$, следува дека равенката $|x| = 3$ има две решенија и тоа $x = 3$ и $x = -3$.

б) Од $|x| = |-3|$ следува $|x| = 3$. Сега, како во решението под а) добиваме $x = 3$ и $x = -3$.

в) Од $|x| + 1 = 4$, следува $|x| = 3$, што значи $x = 3$ и $x = -3$.

г) Од $|x| + 3 = |-4|$ следува $|x| + 3 = 4$, односно $|x| = 1$. Сега, како во решението под а) добиваме $x = 1$ и $x = -1$.

Пример 8. Определи цел број чија апсолутна вредност е:

- а) за 3 поголема од $|-5|$, б) два пати поголема од $|-7|$.

Решение. а) Нека бараниот број е x . Од условот следува $|x| = 3 + |-5|$, од каде добиваме $|x| = 8$. Значи, задачата има две решенија и тоа $x = 8$ и $x = -8$.

б) Нека бараниот број е x . Од условот следува $|x| = 2 \cdot |-7|$, од каде добиваме $|x| = 14$. Значи, задачата има две решенија и тоа $x = 14$ и $x = -14$.

Задачи за вежби

44. Определи ги броевите кои се спротивни на броевите: $3, -12, -37, 13, 0$.

45. Запиши ги без загради изразите: а) $-(-(-(-12)))$, б) $-(-(-(-(-7))))$.

46. Определи ги апсолутните вредности на броевите: $-3, 12, -7, -13, 0$.

47. На бројната оска претстави ги броевите чија апсолутна вредност е:

- а) 4, б) 7, в) 0.

48. Дополни ја табелата:

a	21	-15			-24	-11			19
$-a$			7	-31			-44		
$ a $								0	

49. Спореди ги броевите: а) $|-12|$ и 12 , б) $|-21|$ и $|-23|$.

50. Пресметај ја вредноста на изразот:

- а) $|-15| + |-31|$, б) $|-31| - |-15|$,
в) $|-51| + |-13| - |-25|$, г) $|-15| \cdot |-3| - 2 \cdot |-13|$.

51. Реша ја равенката:

- а) $|x| = 13$, б) $|x| = |-13|$, в) $|x| + 11 = 41$, г) $|x| + 13 = |-41|$.

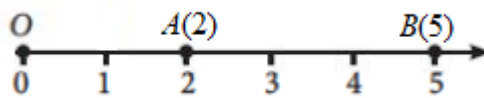
52. Определи цел број чија апсолутна вредност е:

- а) за 2 помала од $|-5|$, б) три пати поголема од $|-5|$.

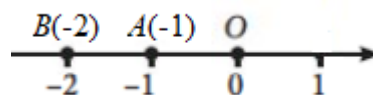
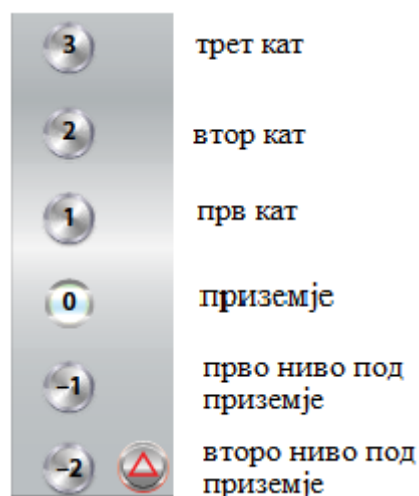
1.2.3 Споредување цели броеви

Во претходните одделенија научи да ги споредуваш броевите во множеството $\mathbb{N}_0$. Знаеш дека за секои $a, b \in \mathbb{N}_0$ е исполнета само една од трите можности: или $a < b$ или $a = b$ или $a > b$.

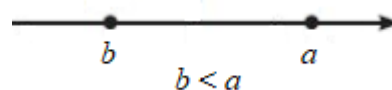
Познато ти е дека $5 > 2$, што значи дека на бројната оска точката $B(5)$ е десно од точката $A(2)$. Понатаму, ако $m \neq 0$, тогаш точката $M(m)$ е десно од координатниот почеток $O(0)$, што значи дека $m > 0$. Според тоа, бројот 0 е најмал број во множеството $\mathbb{N}_0$.



Логично е да се запрашаме дали правилото според кое заклучуваме кога еден елемент на множеството $\mathbb{N}_0$ е поголем од друг негов елемент, може да се прошири и на множеството цели броеви. За да одговориме на ова прашање да се вратиме на примерот на движењето на лифтот. Кога со лифтот од 3. кат ќе отидеме на 1. кат, велиме дека сме се симнале надолу. Но, $3 > 1$, што значи дека зборот симнување означува возење со лифтот од кат означен со поголем број, до кат означен со помал број. Од друга страна, ако од нивото -1 отидеме на нивото -2 , тоа значи дека ние сме се симнале надолу, т.е. нивото -2 е пониско од нивото -1 . Графички на бројната оска тоа можеме да го прикажеме како на цртежот. Како што можеме да видиме точката $A(-1)$ е десно од точката $B(-2)$, а нивото -1 е повисоко од нивото -2 , па затоа $-2 < -1$. Според тоа:

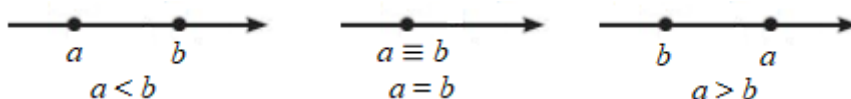


Нека се дадени целите броеви a и b . Ако на координатната оска бројот a е претставен десно од бројот b , тогаш велиме дека a е поголем од b и пишуваме $a > b$.



Притоа велиме и дека b е помал од a и пишуваме $b < a$.

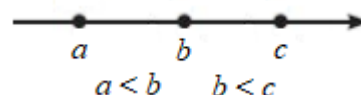
Бидејќи за две точки $A(a)$ и $B(b)$ на бројната права имаме три можности: или $A(a)$ да е лево од $B(b)$ или $A(a) \equiv B(b)$ или $A(a)$ да е десно од $B(b)$, заклучуваме дека: за секои $a, b \in \mathbb{Z}$ е исполнета само една од трите можности: или $a < b$ или $a = b$ или $a > b$.



Од претходните разгледувања следува точноста на следниве тврдења.

Секој позитивен број е поголем од нула.
 Секој негативен број е помал од нула и од кој било позитивен број.
 Од два негативни цели броја помал е бројот кој има поголема апсолутна вредност.

Нека $a < b$ и $b < c$. Тогаш b е десно од a и c е десно од b . Според тоа, c е десно од a , од каде следува дека $a < c$. Значи, точно е следново тврдење.



Ако за целите броеви a, b, c важи $a < b$ и $b < c$, тогаш $a < c$.

Пример 1. Без да ја користиш бројната права, подреди ги броевите $-100, 57, 19, 0, -19, 90, -55$ во растечки редослед, почнувајќи од најмалиот.

Решение. За негативните броеви $-100, -19, -55$ имаме

$$|-100| = 100, \quad |-19| = 19, \quad |-55| = 55,$$

па затоа $-100 < -55 < -19$. Понатаму, бидејќи сите негативни броеви се помали од нулата, добиваме $-100 < -55 < -19 < 0$. Сега, ако ги подредиме позитивните броеви добиваме $19 < 57 < 90$. Но, секој позитивен број е поголем од бројот 0, па затоа имаме

$$-100 < -55 < -19 < 0 < 19 < 57 < 90.$$

Пример 2. Определи ги сите цели броеви a такви што

а) $-5 < a < 4$, б) $-3 \leq a \leq 2$, в) $-8 < a \leq -1$.

Решение. а) Тоа се броевите кои на бројната права се десно од бројот -5 и лево од бројот 4 . Значи, $a \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

б) Аналогно како во решението под а), при што ги вклучуваме и броевите -3 и 2 (Зошто?), добиваме дека $a \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$.

в) Аналогно на претходните разгледувања добиваме $a \in \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$.

Задачи за вежби

53. Моменталната температура во пет градови е: Скопје -2°C , Прилеп -7°C , Охрид 0°C , Битола -8°C и Берово -10°C . Во кој град моментално е:

а) најстудено, б) најтопло.

54. На цртата стави знак $<$ или $>$ така што ќе добиеш точно неравенство:

а) $-11 \underline{\hspace{1cm}} -22$, б) $6 \underline{\hspace{1cm}} -6$, в) $-6 \underline{\hspace{1cm}} 12$, г) $14 \underline{\hspace{1cm}} 27$.

55. Без да ја користиш бројната права, подреди ги броевите $-121, 77, -29, 33, -9, 97, -62$ во растечки редослед, почнувајќи од најмалиот.

56. Што е поголемо:

а) $|-2|$ или -4 , б) $-|-2|$ или 2 , в) $|-6|$ или $-(-4)$.

57. Определи ги сите цели броеви a такви што

а) $-6 < a < 1$, б) $-4 \leq a < 2$, в) $-5 < a \leq 1$, г) $-7 \leq a \leq 1$.

58. Наместо * запиши цифра така што ќе добиеш точно неравенство:

- а) $-51 < -5*$, б) $-1*6 > -115$, в) $-29* < -298$.

59. Определи ги сите цели броеви чија апсолутна вредност е помала од 6.

60. Определи го множеството цели броеви чија апсолутна вредност е поголема од 2, а е помала од 7.

61. Подреди ги во растечки редослед броевите a, b, c , ако важи

$$-1 < a < 1, \quad -2 < b < 0, \quad 0 < c < 3.$$

62. Што можеш да кажеш за бројот a , ако:

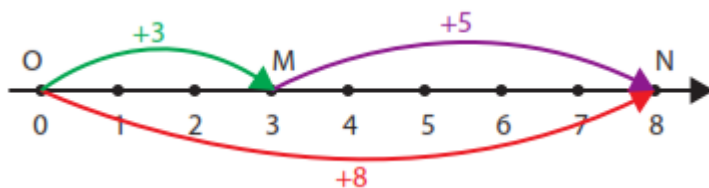
- а) $b = 0$ и $a < b$,
 б) $b > 0$ и $a > b$,
 в) $b < 0$ и $a < b$.

63. Зошто за секој цел број a важи неравенството $-|a| \leq |a|$. Образложи! Кога важи знак за равенство?

1.2.4 Собирање цели броеви

Веќе знаеш да ги собираш и множиш броевите од множеството $\mathbb{N}_0$. Притоа резултатот од овие операции секогаш е број од $\mathbb{N}_0$. Ова треба да важи и за собирањето на броеви од множеството $\mathbb{Z}$. Ќе разгледаме два случаи, и тоа кога собираците се со исти знаци и кога се со различни знаци.

Прво ќе го разгледаме случајот кога собираците се со исти знаци. Ако двата собираци се позитивни, т.е. природни броеви, тогаш собираме како во множеството $\mathbb{N}_0$. На пример, $(+3) + (+5) = +8$. Бидејќи позитивен број означува поместување во десно, ова графички можеме да го прикажеме на следниот начин. Ако тргнеме од координатниот почеток, тогаш првиот собиорак означува дека во десно имаме поместување од три единици, а потоа вториот собиорак означува дека во десно имаме поместување уште пет единици. Значи вкупното поместување е $3 + 5 = 8$ единици во десно.



Сега да го разгледаме збирот $(-4) + (-3)$. Бидејќи негативен број означува поместување во лево, ако тргнеме од координатниот почеток, тогаш првиот собиорак означува дека во лево имаме поместување од четири единици, а потоа вториот собиорак означува дека во лево имаме поме-



стување уште за три единици. Според тоа, вкупното поместување е $4+3=7$ единици во лево. Тоа значи дека бројот -7 е збир на броевите -4 и -3 , односно $(-4)+(-3)=-7$.

Претходните разгледувања ни даваат за право да ја прифатиме следнава дефиниција за собирање на негативни цели броеви.

Збир на два цели негативни броеви е цел негативен број, чија апсолутна вредност е еднаква на збирот на апсолутните вредности на собираните.

Значи, ако $a < 0, b < 0$, тогаш $a+b=-(|a|+|b|)$.

Оттука, ако се земе предвид собирањето на броевите во множеството $\mathbb{N}_0$, добиваме дека за собирањето на целите броеви со ист знак можеме да го користиме следново правило.

Цели броеви со ист знак собираме така што ќе ги собереме нивните апсолутни вредности и пред добиениот збир ќе го запишеме знакот на собираните.

Пример 1. Имаме,

$$(+24)+(+16)=+(|+24|+|+16|)=+(24+16)=+40,$$

$$(-17)+(-21)=-(|-17|+|-21|)=-(17+21)=-38,$$

$$-12+(-88)=-(|-12|+|-88|)=-(12+88)=-100,$$

$$-143+(-257)=-(|-143|+|-257|)=-(143+257)=-400.$$

Пример 2. Ерблина и должи на Софија 50 денари, а на Гроздан му должи 40 денари. Колку денари вкупно е должна Ерблина?

Решение. Вкупниот долг на Ерблина е еднаков на збирот на парите кои таа ги должи на Софија и на Гроздан. Значи, Ерблина вкупно должи $50+40=90$ денари.

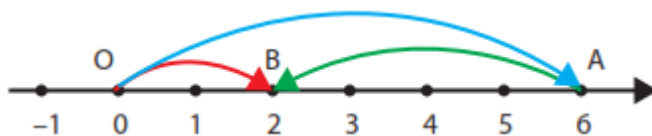
Пример 3. На 1. јули водостојот на Охридското езеро бил 15 cm под нормалниот, а во текот на месеците јули и август тој се спуштил уште за 12 cm . Колкав бил водостојот на Охридското езеро на 1. септември?

Решение. На 1. јули водостојот е -15 cm , а како тој се намалил за уште 12 cm , добиваме дека на 1. септември водостојот бил

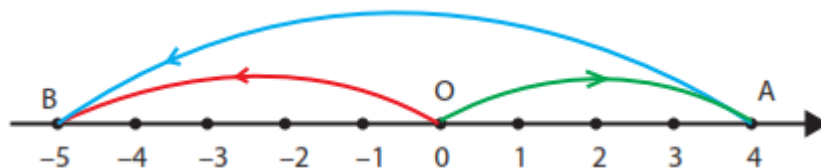
$$(-15)+(-12)=-(|-15|+|-12|)=-(15+12)=-27\text{ cm}.$$

Во збирот $(+6)+(-4)$ првиот собирик покажува поместување од координатниот почеток во десно за 6 единици, а вториот собирик покажува дека од точката $A(+6)$ треба во лево да се поместиме за 4 единици. Резултатот од овие две поместувања е поместување во десно за 2 единици, што значи дека децениот збир е еднаков на $+2$. Затоа пресметуваме на следниов начин:

$$(+6)+(-4)=+(|+6|-|-4|)=+(6-4)=+2.$$



Во збирот $(+4) + (-9)$ првиот соби́рок покажува поместување од координатниот почеток во десно за 4 единици, а вториот соби́рок покажува дека од точката $A(+4)$ треба во лево да се поместиме за 9 единици.



Резултатот од овие две поместувања е поместување од координатниот почеток во лево за 5 единици, што значи дека дедениот збир е еднаков на -5 . Затоа пресметуваме на следниов начин: $(+4) + (-9) = -(|-9| - |+4|) = -(9 - 4) = -5$.

Претходните разгледувања ни даваат за право да ја прифатиме следнава постапка за собирање на цели броеви со различни знаци и со различни апсолутни вредности.

1. Ги определуваме апсолутните вредности на собироците.
2. Од поголемата апсолутна вредност ја одземаме помалата апсолутна вредност.
3. На добиениот резултат го запишуваме знакот на соби́рокот кој има поголема апсолутна вредност.

Пример 4. Имаме:

$$(+24) + (-16) = +(|+24| - |-16|) = +(24 - 16) = +8,$$

$$(+17) + (-21) = -(|-21| - |+17|) = -(21 - 17) = -4,$$

$$+12 + (-88) = -(|-88| - |+12|) = -(88 - 12) = -76,$$

$$-143 + (+257) = +(|+257| - |-143|) = +(257 - 143) = +114.$$

Пример 5. На 1. септември водостојот на Дојранското езеро бил 15 cm под нормалниот, а во текот на месеците септември и октомври тој се покачил за 32 cm . Колкав бил водостојот на Дојранското езеро на 1. ноември?

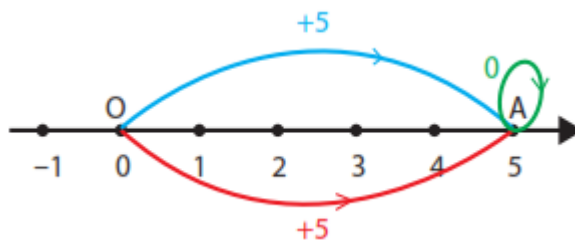
Решение. На 1. септември водостојот е -15 cm , а како тој во следните два месеци се покачил за 32 cm , добиваме дека на 1. ноември водостојот бил

$$(-15) + (+32) = +(|+32| - |-15|) = +(32 - 15) = +17\text{ cm}.$$

Забелешка. Ако во збирот на два цели броја вториот соби́рок е негативен број, тогаш истиот мора да го ставиме во заграда.

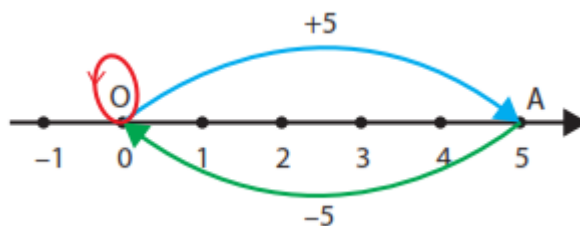
прв соби́рок	втор соби́рок	неправилно	правилно
12	-11	$12 + -11$	$12 + (-11)$
-121	-21	$-121 + -21$	$-121 + (-21)$

Во збирот $(+5) + 0$ првиот соби́рок покажува дека имаме поместување од координатниот почеток во десно за 5 единици, а вториот соби́рок покажува дека од точката $A(+5)$ не треба да се поместуваме. Според тоа, $(+5) + 0 = +5$. На сличен начин се покажува дека е точно тврдењето.



За секој цел број a важи $a+0=a$.

Во збирот $(+5)+(-5)$ првиот собирок покажува дека имаме поместување од координатниот почеток во десно за 5 единици, а вториот собирок покажува дека од точката $A(+5)$ треба да се помести во лево за 5 единици, со што се враќа во координатниот почеток. Значи, $(+5)+(-5)=0$. На сличен начин се покажува дека е точно тврдењето.



За секој цел број a важи $a+(-a)=0$.

Пример 6. а) Имаме, $(-27)+0=-27$ и $(+33)+0=+33$.

б) Имаме, $(+134)+(-134)=0$ и $(-67)+(+67)=0$.

Задачи за вежби

64. Пресметај ги збирите

а) $(+48)+(+123)$,

б) $(-54)+(-24)$,

в) $(-123)+(-142)$.

65. Едно јануарско утро температурата во 5 часот била -8°C , а до 8 часот се спуштила уште 3°C . Колку изнесувала температурата во 8 часот?

66. Пополни ја табелата

a	+25	-127	-11	+394
b	+143	-31	-99	+332
$a+b$				

67. Подреди ги по големина, почнувајќи од најмалиот, следниве зборови:

$-2+(-9)$, $-13+(-6)$, $-4+(-8)$, $-17+(-4)$.

68. Пресметај ги збирите

а) $(+48)+(-123)$,

б) $(+54)+(-24)$,

в) $(+123)+(-142)$.

69. Едно декемвриско утро температурата во 5 часот била -4°C , а до 12 часот таа се зголемила за 13°C . Колку изнесувала температурата во 12 часот?

70. Пополни ја табелата

a	+25	+127	-11	+394
b	-153	-96	+99	-332
$a+b$				

71. Подреди ги по големина, почнувајќи од најмалиот, следниве зборови:

$12+(-9)$, $(-13)+(+6)$, $-14+(+8)$, $19+(-14)$.

72. Пресметај ги збирите:

а) $(-111)+0$,

б) $(-27)+0$.

73. Пресметај ги зборовите:

а) $(+97) + (-97)$, б) $(-76) + (+76)$.

74. Пресметај го збирот на бројот -113 со збирот на броевите $+221$ и -221 .

75. Кој од знаците $<$, $=$ или $>$ треба да се стави на линијата за да се добие точно равенство или неравенство

а) $(-18) + (+28)$ ____ $(-23) + (+33)$,

б) $(-34) + (+12)$ ____ $(+55) + (-21)$,

в) $(-143) + (+143)$ ____ $(-11) + 0$,

г) $(-29) + (+29)$ ____ $(+12) + (-12)$,

д) $(-61) + (-31)$ ____ $(-127) + (+33)$.

1.2.5 Својства на собирањето цели броеви

Знаеш дека собирањето броеви во множеството $\mathbb{N}_0$ има комутативно и асоцијативно својство. Во продолжение ќе видиме дека овие две својства ги има и собирањето во множеството $\mathbb{Z}$.

Пример 1. Имаме,

а) $(+31) + (+23) = +(31 + 23) = +54$ и $(+23) + (+31) = +(23 + 31) = +54$,

б) $(-21) + (-22) = -(21 + 22) = -43$ и $(-22) + (-21) = -(22 + 21) = -43$,

в) $(+12) + (-23) = -(23 - 12) = -11$ и $(-23) + (+12) = -(23 - 12) = -11$,

г) $(-32) + (+43) = +(43 - 32) = +11$ и $(+43) + (-32) = +(43 - 32) = +11$.

Како што можеме да видиме, во сите случаи од пример 1 за собирањето цели броеви важи *комутативното својство*, т.е. точно е тврдењето:

За секои цели броеви a и b важи

$$a + b = b + a.$$

Знаеме дека за секој цел број a важи $a + 0 = a$, Сега, од комутативното својство следува:

За секој цел број a важи $0 + a = a + 0 = a$.

Пример 2. а) Имаме

$$(17 + (-14)) + (-11) = +(17 - 14) + (-11) = 3 + (-11) = -(11 - 3) = -8,$$

$$17 + ((-14)) + (-11) = 17 + (-(14 + 11)) = 17 + (-25) = -(25 - 17) = -8.$$

б) Имаме

$$((-17) + (+14)) + (-21) = -(17 - 14) + (-21) = -3 + (-21) = -(3 + 21) = -24,$$

$$(-17) + ((+14) + (-21)) = (-17) + (-(21-14)) = (-17) + (-7) = -(17+7) = -24.$$

Како што можеме да видиме, во двата случаи од пример 2 за собирањето цели броеви важи *асоцијативното својство*, т.е. точно е тврдењето.

За секои цели броеви a, b и c важи

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Од комутативното и асоцијативното својство непосредно следува точноста на следново тврдење.

За секои цели броеви a, b и c важи

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b = (c + a) + b = c + (a + b).$$

Според тоа, целите броеви може да ги собираш така што произволно ќе ги групираш собираците. Понатаму, запишувањето на собирањето цели броеви можеме да го поедноставиме. Имено, се договараме збирот на повеќе цели броеви да го запишуваме без загради, така што собираците се запишуваат само со своите знаци. Притоа, ако првиот член е позитивен, тогаш знакот „+“ не се пишува, тој се подразбира. На пример,

$$(+21) + (-13) + (-12) + (+11) = 21 - 13 - 12 + 11,$$

$$(-23) + (-21) + (+34) + (+7) + (-31) = -23 - 21 + 34 + 7 - 31.$$

Пример 3. Пресметај:

а) $14 - 33 + 82 - 59$,

б) $-20 - 18 + 19 - 14$.

Решение. а) Ги групираме посебно позитивните, посебно негативните броеви и добиваме

$$14 - 33 + 82 - 59 = (14 + 82) + (-33 - 59) = 96 - 92 = 6.$$

б) Слично како под а) добиваме

$$-20 - 18 + 19 - 14 = 19 + (-20 - 18 - 14) = 19 - 52 = -33.$$

Задачи за вежби

76. За која вредност на целиот број a е точно равенството:

а) $(+19) + (-35) = (-35) + a$,

б) $a + (-121) = (-121) + (-43)$,

в) $(+11) + a = (-23) + (+11)$,

г) $(-22) + (+31) = a + (-22)$.

77. Без да пресметуваш на цртката стави еден од знаците $<$, $=$ или $>$ за да добиеш точно равенство или неравенство:

а) $(-123) + (+231) \underline{\hspace{1cm}} (+231) + (-123)$, б) $(-13) + (+31) \underline{\hspace{1cm}} (+31) + (-13)$.

78. За која вредност на целиот број a е точно равенството:

а) $((+19) + (-35)) + (-17) = (+19) + ((-35) + a)$,

б) $(a + (-121)) + (+11) = (-43) + ((-121) + (+11))$,

в) $((+11) + a) + (-55) = (+11) + ((-23) + (-55))$.

79. Дополни ја следнава табела:

a	+18	-22	+44	-123
b	-14	+35	-11	+45
c	-25	-11	+7	+76
$a+b$				
$(a+b)+c$				
$a+(b+c)$				

80. а) Собери го збирот на броевите -17 и -51 со бројот 66 .

б) Собери го збирот на броевите -24 и 13 со збирот на броевите -51 и 66 .

81. а) Пресметај го збирот на сите цели броеви поголеми од -13 и помали од 12 .

б) Пресметај го збирот на сите цели броеви поголеми од -111 и помали од 113 .

1.2.6 Одземање цели броеви

Како што знаеш, за да го одземеш природниот број b од природниот број a , треба да најдеш природен број c кој собран со b го дава бројот a , т.е. $c+b=a$. Притоа пишуваме $a-b=c$ и бројот c го нарекуваме разлика на броевите a и b .

Пример 1. а) Од равенството $12+7=19$ следуваат равенствата $19-7=12$ и $19-12=7$.

б) Од равенството $42+23=65$ следуваат равенствата $42=65-23$ и $23=65-42$.

Исто како и кај природните броеви, да го одземеш целиот број b од целиот број a , треба да најдеш цел број c таков што $c+b=a$. Притоа пишуваме $a-b=c$ и бројот c го нарекуваме разлика на броевите a и b .

Пример 2. Ако го искористиме запишувањето на збирот на целите броеви без загради, добиваме:

$$56-65=56+(-65),$$

$$75-(-22)=75+(-(-22))=75+22,$$

$$-42-(-12)=-42+(-(-12))=-42+12.$$

Забележуваме дека во пример 2 наместо од бројот 56 да го одземеме бројот 65 , ние можеме на бројот 56 да му го додадеме бројот -65 , кој е спотивен на бројот 65 . Истото важи и во другите два случаја, при што наместо одземање на броевите -22 и -12 , ние соодветно ги додаваме нивните спротивни броеви 22 и 12 .

Понатаму, за секои цели броеви a и b важи $a-b=a+(-b)$, што значи:

Бројот b го одземаме од бројот a , така што на бројот a му го додаваме спротивниот број на бројот b .

Пример 3. Имаме:

$$26 - 34 = 26 + (-34) = -(34 - 26) = -8,$$

$$57 - (-22) = 57 + (-(-22)) = 57 + 22 = 79,$$

$$-82 - (-32) = -82 + (-(-32)) = -82 + 32 = -(82 - 32) = -50.$$

Пример 4. Дополни ја низата броеви, во која според истото правило како вториот третиот член се добиени следните четири члена: 10, 3, -4, __, __, __, -32.

Решение. Имаме $10 - 3 = 7$ и $3 - (-4) = 3 + 4 = 7$. Според тоа, почнувајќи од вториот член секој член на низата се добива кога од претходниот член е се одземе бројот 7. Значи,
- третиот член на низата е:

$$-4 - 7 = -4 + (-7) = -(4 + 7) = -11,$$

- четвртиот член на низата е:

$$-11 - 7 = -11 + (-7) = -(11 + 7) = -18,$$

- петтиот член на низата е

$$-18 - 7 = -18 + (-7) = -(18 + 7) = -25.$$

Според тоа, низата е: 10, 3, -4, -11, -18, -25, -32.

Задачи за вежби

82. Пресметај ги разликите

а) $45 - 78$,

б) $-12 - 57$,

в) $-43 - (-33)$.

83. Спореди ги разликите:

а) $-24 - 45$ и $17 - 87$,

б) $21 - 42$ и $13 - 33$,

в) $-47 - (-13)$ и $-53 - (-29)$,

г) $-9 - 8$ и $-4 - 15$.

84. Пресметај:

а) $-15 - 17 + 22$,

б) $24 - 48 + 12$,

в) $77 - 48 - 54$,

г) $18 - 29 - 65$,

д) $-5 - 55 + 90 - 77$,

д) $15 - 16 + 17 - 18 + 10 - 20$,

е) $25 - 30 + 35 - 40$,

ж) $4 - 8 + 12 - 16 + 20 - 24 + 30$.

85. Дополни ја низата броеви, во која според истото правило како вториот третиот член се добиени следните четири члена: 11, 7, 3, __, __, __, __, -21.

1.2.7 Употреба на загради

Кога учеше за својствата на собирањето цели броеви научи дека

$$a + (b + c) = a + b + c$$

и дека збирот на повеќе цели броеви го запишуваме без загради, така што собираците се запишуваат само со своите знаци. Во следниот пример ќе покажеме како, користејќи го претходно кажаното и операциите собирање и одземање цели броеви, можеме да се ослободиме од заграда, пред која има знак „+“.

Пример 1. Запиши го без загради изразот:

$$a + (b - c), \quad a + (-b - c), \quad a + (b - c + d).$$

Решение. Имаме:

$$a + (b - c) = a + (b + (-c)) = a + b + (-c) = a + b - c,$$

$$a + (-b - c) = a + ((-b) + (-c)) = a + (-b) + (-c) = a - b - c.,$$

$$a + (b - c + d) = a + (b + (-c) + d) = a + b + (-c) + d = a + b - c + d.$$

Како што можеме да видиме правилото за ослободување од заграда, пред која има знак „+“ гласи:

Ако во некој израз пред заградата има знак „+“, тогаш заградата и знакот „+“ ги испуштаме, а собираците во заградата ги запишуваме со нивните знаци.

Пример 2. Ќе покажеме дека за целите броеви x и y важи $x + y = 0$, тогаш $y = -x$.

Навистина, ако искористиме дека за секои x и y важи $y = y + 0$ и $x + (-x) = 0$, тогаш со примена на асоцијативното и комутативното својство на собирањето, добиваме

$$y = y + 0 = y + (x + (-x)) = (y + x) + (-x) = 0 + (-x) = -x.$$

Да ги собереме зборовите $a + b$ и $-a - b$. Ако ги искористиме правилото за ослободување од заграда кога пред заградата има знак „+“, и својствата на собирањето цели броеви, добиваме

$$a + b + (-a - b) = a + b - a - b = (a - a) + (b - b) = 0.$$

Од последното равенство и од пример 2 следува дека $a + b$ и $-a - b$ се заемно спротивни броеви. Значи, $-(a + b) = -a - b$ и $-(-a - b) = a + b$. На сличен начин можеме да покажеме $a - b$ и $-a + b$ се заемно спротивни броеви, од каде следува дека $-(a - b) = -a + b$.

Од претходните разгледувања следува дека правилото за ослободување од заграда, пред која има знак „-“ гласи:

Ако во некој израз пред заградата има знак „-“, тогаш заградата и знакот „-“ ги испуштаме, а на собираците во заградата им ги менуваме знаците.

Пример 3. Пресметај ја бројната вредност на изразот:

а) $-46 + (24 - 19 - 16 + 11),$

б) $112 - (-56 + 23 - 44).$

Решение. а) Ако го примениме правилото за ослободување од заграда пред која има знак „+“, добиваме

$$\begin{aligned} -46 + (24 - 19 - 16 + 11) &= -46 + 24 - 19 - 16 + 11 = (-46 - 19 - 16) + (24 + 11) \\ &= -81 + 35 = -46. \end{aligned}$$

б) Ако го примениме правилото за ослободување од заграда пред која има знак „-“, добиваме

$$112 - (-56 + 23 - 44) = 112 + 56 - 23 + 44 = (112 + 56 + 44) - 23 = 212 - 23 = 189.$$

Пример 4. Определи ја вредноста на изразот $a - (b - c)$, ако $a = -5 + 1$, $b = -6 - 1$ и $c = |-7|$.

Решение. Имаме: $a = -4$, $b = -7$ и $c = 7$. Според тоа:

$$a - (b - c) = a - b + c = -4 - (-7) + 7 = 10. \blacksquare$$

Пример 5. Пресметај ја бројната вредност на изразот:

а) $-46 - (-24 - 19) - |-16 + 11|$,

б) $112 - |-56 + 23| + (-44 + 21)$.

Решение. а) Имаме,

$$\begin{aligned} -46 - (-24 - 19) - |-16 + 11| &= -46 + 24 + 19 - |-5| = -46 + 24 + 19 - 5 \\ &= (-46 - 5) + (24 + 19) = -51 + 43 = -8. \end{aligned}$$

б) Имаме,

$$\begin{aligned} 112 - |-56 + 23| + (-44 + 21) &= 112 - |-33| - 44 + 21 = 112 - 33 - 44 + 21 \\ &= (112 + 21) - (33 + 44) = 133 - 77 = 56. \blacksquare \end{aligned}$$

Понекогаш за да пресметувањата се поедноставни, можеме да извадиме знак „-“ пред заградата, при што на броевите кои влегуваат во заградата им го менуваме знакот. Ова го направивме во задачата под б) на пример 5.

Задачи за вежби

86. Запиши го без загради изразот:

а) $(-15) + (-24) - (-16) + (-12)$, б) $-2 + (-7 + 8) - (12 - 4)$, в) $19 - (-5 + 13)$.

87. Ослободи се од заградите, а потоа пресметај ја вредноста на изразот:

а) $4 + (-5 + 2 - 12 + 3)$,

б) $12 + (13 - 7 - (4 - 5 + 11))$,

в) $2 - (3 - 6) + (4 - (6 - 3))$,

г) $81 - (-24 + 50) + (-33 + 33)$.

88. Од збирот $-4 + 12 - 7 - 20 + 21$ оземи го бројот -50 .

89. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 + 11 - 12$,

б) $13 - 15 + 17 - 19 + 21 - 23$.

90. Од збирот на броевите -54 и 73 , одземи ја разликата на броевите 7 и -12 .

91. За колку разликата на броевите -55 и 27 е помала од нивниот збир?

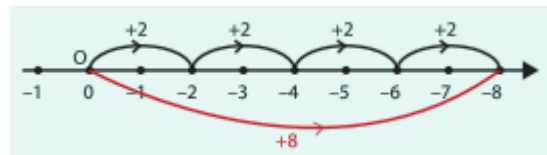
1.2.8 Множење цели броеви

Досега научи да ги собираш и одземаш целите броеви. Понатаму, овие две операции ги дефиниравме така што во множеството $\mathbb{Z}$ ги проширивме дефинициите на соодветните операции определени во множеството $\mathbb{N}_0$. Ќе покажеме дека тоа може да се направи и со операцијата множење природни броеви.

Како и во случај на собирањето цели броеви, така и при множењето, ако двата множителители се позитивни цели броеви, т.е. природни броеви, тогаш ги множиш на вообичаен начин.

Пример 1. Во 6 часот температурата во воздухот била 0°C . Во секој од следните 4 часа таа се зголемувала по 2°C . Колкава била температурата во 10 часот?

Решение. Јасно е дека во 10 часот температурата се покачила на $+8^{\circ}\text{C}$, бидејќи $4 \cdot 2 = 8$.



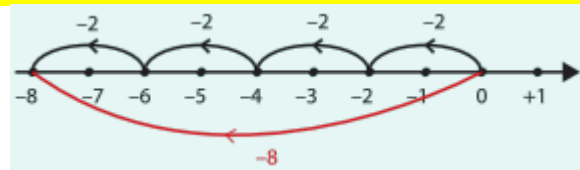
Но, колку е $4 \cdot (-2)$, т.е. како се множи позитивен со негативен цел број. Да разгледаме уште еден пример.

Пример 2. Во 16 часот температурата во воздухот била 0°C . Во секој од следните 4 часа таа се намалувала по 2°C . Колкава била температурата во 20 часот?

Решение. Јасно е дека во 20 часот температурата се спуштила на -8°C , бидејќи

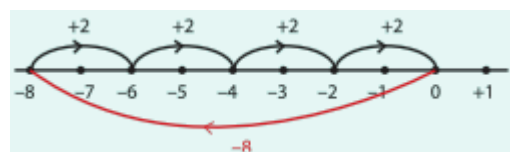
$$-2 + (-2) + (-2) + (-2) = -8.$$

Но, како и кај природните броеви, збирот на еднакви собирци можеме да го запишеме како производ, односно $4 \cdot (-2) = -8$.



Пример 3. Во 9 часот температурата на воздухот била 0°C . Таа во секој од изминатите 4 часа се зголемувала по 2°C . Колкава била температурата во 5 часот?

Решение. Во случајов треба да ја определиме температурата пред 4 часа. Во примерите 1 и 2 времето по 4 часа го означивме со $+4$, па затоа логично е времето пред 4 часа да го означиме со -4 . Јасно, температурата пред 4 часа била -8°C , па како таа секој час се зголемувала за 2°C , можеме да запишеме $(-4) \cdot 2 = -8$.



На потполно ист начин како во примерите 2 и 3 можеме да го пресметаме производот на било кои два цели броја со различни знаци. Затоа, логично е да ја прифатиме следнава дефиниција за множење на цели броеви со различни знаци.

Производ на два цели броја со различни знаци е негативен цел број, чија апсолутна вредност е еднаква на производот на апсолутните вредности на множителите.

Пример 4. Имаме:

$$7 \cdot (-3) = -(|7| \cdot |-3|) = -(7 \cdot 3) = -21,$$

$$(-9) \cdot 7 = -(|-9| \cdot |7|) = -(9 \cdot 7) = -63,$$

$$11 \cdot (-12) = -(|11| \cdot |-12|) = -(11 \cdot 12) = -132.$$

Наместо горните запишувања, натаму ќе пишуваме кратко:

$$7 \cdot (-3) = -21, \quad (-9) \cdot 7 = -63, \quad 11 \cdot (-12) = -132.$$

Досега знаеме како се множат два позитивни цели броја, и два цели броја со различни знаци. Останува да определиме како се множат два негативни цели броја. За таа цел да го разгледаме следниов пример.

Пример 5. Во 19 часот температурата на воздухот била 0°C . Таа во секој од изминатите 4 часа се намалувала по 2°C . Колкава била температурата во 15 часот?

Решение. Во случајов треба да ја определиме температурата пред 4 часа. Како во пример 3 времето пред 4 часа го означуваме со -4 . Јасно, температурата пред 4 часа била 8°C , па како таа секој час се намалувала за 2°C , можеме да запишеме $(-4) \cdot (-2) = 8$.



На ист начин како во примерите 1 и 5 можеме да го пресметаме производот на било кои два цели броја со исти знаци. Затоа, логично е да ја прифатиме следнава дефиниција за множење на цели броеви со исти знаци.

Производот на два цели броја со исти знаци е еднаков на производот на нивните апсолутни вредности.

Пример 6. Имаме:

$$(-8) \cdot (-3) = |8| \cdot |-3| = 8 \cdot 3 = 24,$$

$$(-9) \cdot (-8) = |-9| \cdot |8| = 9 \cdot 8 = 72,$$

$$(-9) \cdot (-12) = |-9| \cdot |-12| = 9 \cdot 12 = 108.$$

Наместо горните запишувања, натаму ќе пишуваме кратко:

$$(-8) \cdot (-3) = 24, \quad (-9) \cdot (-8) = 72, \quad (-9) \cdot (-12) = 108.$$

Од претходните разгледувања воочуваме дека: ако a и b се позитивни цели броеви, тогаш:

$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b,$ $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b),$	$++ = +$
	$-- = +$
	$+ - = -$
	$- + = -$

Да се потсетиме, ако x е цел број различен од 0, тогаш $x = a$ или $x = -a$, каде $a \in \mathbb{N}$. Ако $x = a$, тогаш

$$x \cdot 1 = a \cdot 1 = a = x \text{ и } 1 \cdot x = 1 \cdot a = a = x$$

а ако $x = -a$, тогаш

$$x \cdot 1 = (-a) \cdot 1 = -(a \cdot 1) = -a = x \text{ и } 1 \cdot x = 1 \cdot (-a) = -(1 \cdot a) = -a = x.$$

Понатаму, ако $x = a$, тогаш

$$x \cdot (-1) = a \cdot (-1) = -(a \cdot 1) = -a = -x \text{ и } (-1) \cdot x = (-1) \cdot a = -(1 \cdot a) = -a = -x$$

а ако $x = -a$, тогаш

$$x \cdot (-1) = (-a) \cdot (-1) = a \cdot 1 = a = -x \text{ и } (-1) \cdot x = (-1) \cdot (-a) = 1 \cdot a = a = -x.$$

Според тоа, тично е следново тврдење.

За секој цел број x важи

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \text{ и } x \cdot (-1) = (-1) \cdot x = -x.$$

На крајот, да забележиме дека исто како и кај природните броеви точно е следново тврдење:

Ако барем еден од множителите е еднаков на 0, тогаш и нивниот производ е еднаков на нула, т.е. за секој цел број a важи $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

Пример 7. Спореди ги производите:

- а) $0 \cdot (-12)$ и $(-5) \cdot 7$, б) $(-7) \cdot 0$ и $2025 \cdot 0$,
 в) $(-4) \cdot (-1)$ и $2222 \cdot 0$, г) $123 \cdot (-1)$ и $-321 \cdot 0$.

Решение. а) $0 \cdot (-12) = 0$ и $(-5) \cdot 7 = -35$ следува $0 \cdot (-12) > (-5) \cdot 7$.

б) $(-7) \cdot 0 = 0$ и $2025 \cdot 0 = 0$ следува $(-7) \cdot 0 = 2025 \cdot 0$.

в) $(-4) \cdot (-1) = 4$ и $2222 \cdot 0 = 0$ следува $(-4) \cdot (-1) > 2222 \cdot 0$.

г) $123 \cdot (-1) = -123$ и $-321 \cdot 0 = 0$ следува $123 \cdot (-1) < -321 \cdot 0$.

Задачи за вежби

92. Запиши ги како производ збирите:

- а) $-5-5-5-5-5$, б) $-3-3-3-3$,
 в) $a+a+a+a+a$, г) $-a-a-a-a$.

93. Определи го знакот на секој од производите:

- а) $(-7) \cdot (+12)$, б) $(-12) \cdot (-21)$,
 в) $(13) \cdot (-4)$, г) $(+2) \cdot (+122)$.

94. Без да пресметуваш на цртичката стави еден од знаците $<$ или $>$ така што ќе добиеш точно неравенство:

- а) $(-22) \cdot (+12) \text{ ____ } (-23) \cdot (-1)$, б) $(+17) \cdot (+21) \text{ ____ } (-235) \cdot (+124)$,
 в) $(+11) \cdot (-112) \text{ ____ } (-5) \cdot (-7)$, г) $(+22) \cdot (+12) \text{ ____ } (-43) \cdot (+111)$.

95. Пресметај ги производите

- а) $(-22) \cdot (+12)$, б) $(+17) \cdot (+21)$,

в) $(-5) \cdot (-7)$, г) $(+4) \cdot (-11)$.

96. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $(-4) \cdot (+12) + (-23) \cdot (-2)$,

б) $(+7) \cdot (+11) - (-5) \cdot (+12)$,

в) $(+11) \cdot (-12) + (-5) \cdot (-17)$,

г) $(+22) \cdot (+2) + (-4) \cdot (+13)$.

97. Спореди ги производите:

а) $-22 \cdot (-31)$ и $21 \cdot 32$,

б) $17 \cdot (-25)$ и $15 \cdot (-29)$,

в) $19 \cdot (-27)$ и $-9 \cdot 73$,

г) $-22 \cdot (-12)$ и $23 \cdot 11$.

98. Дополни ја табелата

a	-12	11	-24	-23	25	101
b	-5	-7	4	-12	14	-11
$a \cdot b$						

99. Пресметај ја вредноста на изразите:

а) $5 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) - (-6) \cdot 7$,

б) $8 \cdot (-7) - (-6) \cdot (-5) + (-4) \cdot 9$,

в) $17 \cdot (-18) + 16 \cdot (-15) + (-24) \cdot (-23)$.

1.2.9 Својства на множењето цели броеви

Знаеш дека множењето броеви во множеството $\mathbb{N}_0$ има комутативно и асоцијативно својство. Во продолжение ќе видиме дека овие две својства ги има и множењето во множеството $\mathbb{Z}$.

Пример 1. Имаме,

а) $3 \cdot 23 = 69$ и $23 \cdot 3 = 69$,

б) $(-4) \cdot (-12) = 4 \cdot 12 = 48$ и $(-12) \cdot (-4) = 12 \cdot 4 = 48$,

в) $12 \cdot (-6) = -(12 \cdot 6) = -72$ и $(-6) \cdot 12 = -(6 \cdot 12) = -72$,

г) $(-3) \cdot 14 = -(3 \cdot 14) = -42$ и $14 \cdot (-3) = -(14 \cdot 3) = -42$.

Како што можеме да видиме, во сите случаи од пример 1 за множењето на целите броеви важи *комутативното својство*, т.е. точно е тврдењето:

За секои цели броеви a и b важи

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Пример 2. а) Имаме

$$(7 \cdot (-4)) \cdot (-6) = (-28) \cdot (-6) = 28 \cdot 6 = 168,$$

$$7 \cdot ((-4) \cdot (-6)) = 7 \cdot (4 \cdot 6) = 7 \cdot 24 = 168.$$

б) Имаме

в) Имаме:

$$\begin{aligned}((-18) + 23) \cdot (-5) &= 5 \cdot (-5) = -25 \text{ и} \\ (-18) \cdot (-5) + 23 \cdot (-5) &= 90 + (-115) = -25.\end{aligned}$$

Како што можеме да видиме, во трите случаи од пример 5 за собирањето и множењето цели броеви важи *дистрибутивното својство на множењето во однос на собирањето цели броеви*, т.е. точно е тврдењето.

За секои цели броеви a, b и c важи

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Забелешка. а) Нека a, b и c се цели броеви. Тогаш од претходните тврдења следува

$$c \cdot (a + b) = (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c = c \cdot a + c \cdot b.$$

б) Претходно рековме дека за секој цел број a важи $a \cdot 0 = 0$. Во точноста на ова равенство можеме да се увериме и користејќи го дистрибутивното својство и равенствата $a \cdot 1 = a$ и $a \cdot (-1) = -a$. Навистина

$$a \cdot 0 = a \cdot (1 + (-1)) = a \cdot 1 + a \cdot (-1) = a + (-a) = 0.$$

Пример 6. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\text{а) } 8 \cdot (-33) + 8 \cdot (-17), \quad \text{б) } (-123) \cdot (-17) + 23 \cdot (-17).$$

Решение. Ќе користиме дистрибутивното својство, при што ќе извлекуваме множител пред заграда. Имаме:

$$\begin{aligned}8 \cdot (-33) + 8 \cdot (-17) &= 8 \cdot ((-33) + (-17)) = 8 \cdot (-50) = -400, \\ (-123) \cdot (-17) + 23 \cdot (-17) &= ((-123) + 23) \cdot (-17) = (-100) \cdot (-17) = 1700.\end{aligned}$$

Задачи за вежби

100. За која вредност на целиот број a е точно равенството:

$$\begin{aligned}\text{а) } (+19) \cdot (-35) &= (-35) \cdot a, & \text{б) } a \cdot (-121) &= (-121) \cdot (-43), \\ \text{в) } (+11) \cdot a &= (-23) \cdot (+11), & \text{г) } (-22) \cdot (+31) &= a \cdot (-22).\end{aligned}$$

101. Без да пресметуваш на цртата стави еден од знаците $<$, $=$ или $>$ за да добиеш точно равенство или неравенство:

$$\text{а) } (-123) \cdot (+231) _ (+231) \cdot (-123), \quad \text{б) } (-13) \cdot (+31) _ (+31) \cdot (-13).$$

102. Дополни ја следнава табела:

a	+8	-2	+4	-12
b	-4	+5	-11	+5
c	-5	-11	+7	+6
$a \cdot b$				
$(a \cdot b) \cdot c$				
$a \cdot (b \cdot c)$				

103. За која вредност на целиот број a е точно равенството:

- а) $((+19) \cdot (-35)) \cdot (-17) = (+19) \cdot ((-35) \cdot a)$,
 б) $(a \cdot (-121)) \cdot (+11) = (-43) \cdot ((-121) \cdot (+11))$,
 в) $((+11) \cdot a) \cdot (-55) = (+11) \cdot ((-23) \cdot (-55))$.
104. а) Помножи го производот на броевите -7 и -5 со бројот 6 .
 б) Помножи го производот на броевите -4 и 8 со производот на броевите -5 и 25 .
105. а) Пресметај го производот на сите цели броеви поголеми од -10 и помали од 12 .
 б) Пресметај го збирот на сите цели броеви поголеми од -110 и помали од 112 .
106. Запиши го како производ изразот: $12a + 5a - 7a + 24a$.
107. Пресметај ја вредноста на изразот $17a - 57a$, за $a = 25$.
108. Пресметај ја вредноста на изразот:
 а) $37 \cdot (-25) + 37 \cdot 15$, б) $12 \cdot (-67) + (-33) \cdot 12 + (-35) \cdot 24 + 16 \cdot (-35)$.

1.2.10 Делење цели броеви

Делењето на целите броеви има исто значење како и делењето во множеството $\mathbb{N}_0$. Значи треба за дадени производ a и еден множител b да се определи другиот множител c . Како и кај природните броеви ја имаме следнава дефиниција.

Ако за целите броеви a, b, c важи $a = b \cdot c$, тогаш пишуваме $a : b = c$, при што бројот a го нарекуваме *деленик*, бројот b *делител* и бројот c *количник*.

Пример 1. Важи

$27 : 3 = 9$,	бидејќи	$3 \cdot 9 = 27$,
$34 : (-2) = -17$,	бидејќи	$(-2) \cdot (-17) = 34$,
$(-45) : 5 = -9$,	бидејќи	$5 \cdot (-9) = -45$,
$(-54) : (-6) = 9$,	бидејќи	$(-6) \cdot 9 = -54$.

Бидејќи деленикот и делителот може да бидат со исти или со различни знаци, како и кај множењето и кај делењето количникот е двапати позитивен и двапати негативен. Така ја имаме следнава дефиниција.

Количникот на два цели броја со исти знаци е позитивен број, чија апсолутна вредност е еднаква на количникот на апсолутните вредности на деленикот и делителот.

Количникот на два цели броја со различни знаци е негативен број, чија апсолутна вредност е еднаква на количникот на апсолутните вредности на деленикот и делителот.

Пример 2. Имаме:

$$-72 : (-8) = |-72| : |-8| = 72 : 8 = 9,$$

$$81 : (-9) = -(|81| : |-9|) = -(81 : 9) = -9,$$

$$(-56) : 7 = -(|-56| : |7|) = -(56 : 7) = -8.$$

Наместо горните запишувања, натаму ќе пишуваме кратко:

$$-72 : (-8) = 9, \quad 81 : (-9) = -9, \quad (-56) : 7 = -8. \blacksquare$$

Од претходните разгледувања воочуваме дека: ако a и b се позитивни цели броеви, тогаш:

$$\begin{aligned} (-a) : (-b) &= a : b, \\ (-a) : b &= a : (-b) = -(a : b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + : + &= + \\ - : - &= + \\ + : - &= -, \\ - : + &= -. \end{aligned}$$

Како што знаеме, за секој цел број $a \neq 0$ е точно равенството $a \cdot 0 = 0$. Оттука следува дека за секој цел број $a \neq 0$ важи $0 : a = 0$.

Бидејќи за секој цел број a важи $a \cdot 1 = a$, заклучуваме дека за секој цел број a важи $a : 1 = a$. Ако x е цел број различен од 0, тогаш $x = a$ или $x = -a$, каде $a \in \mathbb{N}$. Ако $x = a$, тогаш $x : (-1) = a : (-1) = -a = -x$, а ако $x = -a$, тогаш $x : (-1) = (-a) : (-1) = a = -x$. Според тоа, тично е следново тврдење.

За секој цел број x важи $x : 1 = x$ и $x : (-1) = -x$.

Задачи за вежби

109. Дополни ја табелата:

x	12	14	-16	-18	-20	-22	-24	-26
y	-4	-7	-8	2	5	11	12	13
$x : y$								

110. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $85 - 45 : 5$,

б) $-39 : (-3) + 9$,

в) $-56 : (-7) - 72 : 8$,

г) $125 : (-5) - 25 : (-5)$.

111. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $(-14) : (-7) + (-36) : (-9)$,

б) $(-51) : 3 + (-35) : (-7)$.

112. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $(-56) : (-7) + (-48) : 8$,

б) $(-28) : 4 + (-35) : (-5)$.

113. Што е поголемо $(-25) : 5$ или $(-100) : 50$?

114. Кој број ќе се добие ако збирот на броевите -15 и 63 се подели со разликата на броевите -14 и -8 ?

115. Кој број ќе се добие ако збирот на броевите -26 и -24 се подели со бројот 5 ?

116. Пресметај ја вредноста на изразот: $((-7) \cdot (-8) \cdot (-9)) : ((-2) \cdot (-3) \cdot (-4))$.

117. Количникот на броевите -1530 и -34 намали го пет пати.

118. Количникот на два цели броја е еднаков на -6 . Дали може нивниот производ да биде -345 ?

1.2.11 Бројни изрази. Равенки

Во претходните одделенија го научи правилото за редоследот на извршување на операциите во броен израз со природни броеви. Ова правило важи и за редоследот на извршување на операциите во броен израз со цели броеви. Значи, правилото е:

Ако во еден броен израз со цели броеви има операции од прв ред (собирање и одземање) и од втор ред (множење и делење), тогаш прво ги извршуваме операциите од втор ред, а потоа операциите од прв ред.

Забележувај дека ова правило веќе го користевме при решавањето на задачи со множење и делење на цели броеви, а посебно кај дистрибутивното својство на множењето во однос на собирањето цели броеви. Во продолжение ќе разгледаме уште неколку примери.

Пример 1. Пресметај ја вредноста на бројниот израз:

а) $12 - 5 \cdot (-3)$, б) $-4 - 27 : (-9)$.

Решение. Имаме:

а) $12 - 5 \cdot (-3) = 12 - (-15) = 12 + 15 = 27$,

б) $-4 - 27 : (-9) = -4 - (-3) = -4 + 3 = -1$.

Пример 2. Пресметај ја вредноста на бројниот израз:

а) $3 \cdot (-12) - (-21) \cdot (-2)$, б) $-93 : 3 - 125 : (-5)$,
в) $-4 \cdot 5 - 24 : (-3) - 36 : (-6)$, г) $-444 : 4 - 12 \cdot (-8) - 25 : (-5)$.

Решение. Имаме:

а) $3 \cdot (-12) - (-21) \cdot (-2) = -36 - 42 = -78$,

б) $-93 : 3 - 125 : (-5) = -31 - (-25) = -31 + 25 = -6$,

в) $-4 \cdot 5 - 24 : (-3) - 36 : (-6) = -20 - (-8) - (-6) = -20 + 8 + 6 = -4$,

г) $-444 : 4 - 12 \cdot (-8) - 25 : (-5) = -111 - (-96) - (-5) = -111 + 96 + 5 = 0$.

Пример 3. Пресметај ја вредноста на бројниот израз:

а) $(6 - 11) \cdot (-5) - (-32 - 8) : (-5)$, б) $(45 - 10) : (-5) + (4 - 11) \cdot (-2)$.

Решение. Имаме:

а) $(6 - 11) \cdot (-5) - (-32 - 8) : (-5) = (-5) \cdot (-5) - (-40) : (-5) = 25 - 8 = 17$,

б) $(45 - 10) : (-5) + (4 - 11) \cdot (-2) = 35 : (-5) + (-7) \cdot (-2) = -7 + 14 = 7$.

Пример 4. Пресметај ја вредноста на бројниот израз:

а) $24 : (-4) - |-6 \cdot ((12 - 3 \cdot 8) : (-3))|$, б) $((6 - 3) \cdot (3 - 6) + 12) \cdot (24 - (4 - 25) : (-3))$.

Решение. а) Имаме:

$$\begin{aligned} 24 : (-4) - |-6 \cdot ((12 - 3 \cdot 8) : (-3))| &= -6 - |-6 \cdot ((12 - 24) : (-3))| = -6 - |-6 \cdot (-12 : (-3))| \\ &= -6 - |-6 \cdot 4| = -6 - 24 = -30. \end{aligned}$$

б) Имаме:

$$\begin{aligned} ((6-3) \cdot (3-6) + 12) \cdot (24 - (4-25) : (-3)) &= (3 \cdot (-3) + 12) \cdot (24 - (-21) : (-3)) \\ &= (-9 + 12) \cdot (24 - 7) = 3 \cdot 17 = 51. \end{aligned}$$

Пример 5. Пресметај ја вредноста на бројниот израз:

а) $-444 : 2 - 12 \cdot (-8) | + 225 : (-5)$, б) $-4 \cdot 5 - 24 : (-3) | - 36 : (-6)$.

Решение. а) Имаме:

$$\begin{aligned} |-444 : 2 - 12 \cdot (-8) | + 225 : (-5) &= |-222 - (-96) | - 45 = |-222 + 96 | - 45 \\ &= |-126 | - 45 = 126 - 45 = 81. \end{aligned}$$

б) Имаме:

$$|-4 \cdot 5 - 24 : (-3) | - 36 : (-6) = |-20 - (-8) | - (-6) = |-20 + 8 | + 6 = |-12 | + 6 = 12 + 6 = 18.$$

Во множеството $\mathbb{N}_0$ решаваше равенки од видовите

$$x + a = b, \quad a \cdot x = b, \quad x : a = b \quad \text{и} \quad a : x = b.$$

Сега научи да собираш, одземаш, множиш и делиш цели броеви, и да определуваш спротивен број. Сето ова ќе го користиме за горните равенки да ги решаваме во множеството $\mathbb{Z}$.

Пример 6. Реши ја равенката $-x = 11$.

Решение. Ако два броја се еднакви, тогаш се еднакви и нивните спротивни броеви.

Затоа од $-x = 11$ следува $x = -11$.

Проверка, $-(-11) = 11$.

Значи, решение на дадената равенка е бројот -11 .

Пример 7. Реши ја равенката $-x + 12 = 0$.

Решение. Ако збирот на два броја е еднаков на нула, тогаш тие се спротивни броеви.

Значи, $-x$ и 12 се спротивни броеви, од каде добиваме $-(-x) = 12$, па затоа $x = 12$.

Проверка, $-12 + 12 = 0$.

Конечно, решение на дадената равенка е бројот 12 .

Пример 8. Реши ја равенката $x + 21 = 12$.

Решение. За решавање на равенки од ваков вид ќе користиме дека ако $a = b$ и c е произволен цел број, тогаш $a + c = b + c$.

Сега, ако искористиме дека збирот на два спротивни броја е еднаков на 0 и дека $a + 0 = a$ за секој цел број a , последователно добиваме

$$\begin{aligned} x + 21 &= 12, \\ x + 21 + (-21) &= 12 + (-21) \\ x + 0 &= -9, \\ x &= -9 \end{aligned}$$

Проверка, $-9 + 21 = 12$.

Значи, решение на дадената равенка е бројот -9 .

Пример 9. Реши ја равенката $12 \cdot (-x) = -84$.

Решение. Ако искористиме дека $x \cdot a = b$ е исто што и $x = b : a$, последователно добиваме

$$12 \cdot (-x) = -84,$$

$$-x = -84 : 12$$

$$-x = -7,$$

$$x = 7.$$

Проверка, $12 \cdot (-7) = -84$.

Значи, решение на дадената равенка е бројот 7.

Пример 10. Реши ја равенката: $x : (-11) = 12$.

Решение. Ако искористиме дека $x : a = b$ е исто што и $x = a \cdot b$, последователно добиваме

$$x : (-11) = 12$$

$$x = 12 \cdot (-11)$$

$$x = -132.$$

Проверка, $-132 : (-11) = 12$.

Значи, решение на дадената равенка е бројот -132 .

Пример 11. Реши ја равенката: $91 : (-x) = 13$.

Решение. Последователно добиваме

$$91 : (-x) = 13,$$

$$13 \cdot (-x) = 91,$$

$$-x = 91 : 13,$$

$$-x = 7,$$

$$x = -7.$$

Проверка,

$$91 : (-(-7)) = 91 : 7 = 13.$$

Значи, решение на дадената равенка е бројот -7 .

Многу проблеми од секојдневниот живот се сведуваат на примена на целите броеви или на равенки од разгледаните видови. Еве неколку примери.

Пример 12. Мелинда замислила број. Кога спротивниот број на бројот кој го замислила го помножила со -3 , го добила бројот 24. Кој број го замислила Мелинда?

Решение. Со x да го означиме бројот кој го замислила Мелинда. Спротивниот број на тој број е $-x$. Кога $-x$ ќе го помножиме со -3 го добиваме производот $(-x) \cdot (-3)$, кој треба да е еднаков на 24. Значи, $(-x) \cdot (-3) = 24$, од каде добиваме $3 \cdot x = 24$. Решението на последната равенка е $x = 8$.

Проверка, спротивниот број на 8 е бројот -8 и притоа $(-8) \cdot (-3) = 24$.

Значи, Мелинда го замислила бројот 8.

Пример 13. Дамјан планира да направи забава за учениците од неговото одделение. Тој знае дека од родителите ќе добие 1850 денари, од бабата ќе добие 930 денари и од дедото ќе добие 1400 денари, а ако му недостигаат пари, остатокот треба да го надополни од звојата заштеда. За забавата Дамјан планира да потроши 2300 денари за храна и 1900 денари за пијалак. Дали Дамјан за организирање на забавата треба да потроши пари од својата заштеда и колку?

Решение. За да ја решиме задачата, ќе направиме табела на парите кои Дамјан ќе ги добие (приходи) и парите кои ќе ги потроши (расходи).

Јасно, ако разликата меѓу збирот на приходите и збирот на расходите е поголема или еднаква на 0, тогаш Дамјан нема да има потреба да троши од својата заштеда. Но, ако оваа разлика е негативна, тогаш Дамјан трееба да потроши сума еднаква на апсолутната вредност на разликата (Зошто?).

Имаме,

$$1850 + 930 + 1400 - (2300 + 1900) = 4180 - 4200 = -20.$$

Значи, за организирање на забавата Дамјан од својата заштеда треба да потроши $|-20| = 20$ денари.

Назив	Приход/расход
родители	1850
баба	930
дедо	1400
храна	2300
пијалок	1900

Пример 14. Ако некој број го поделиш со 6 и од добиениот количник го одземеш бројот 13, ќе го добиеш бројот -31 . Кој е тој број?

Решение. Ако непознатиот број е x , тогаш при делењето со 6 се добива $x:6$, а кога ќе се одземе бројот 13 се добива разликата $x:6 - 13$, која треба да е еднаква на -31 . Значи, $x:6 - 13 = -31$, од каде добиваме $x:6 = -31 + 13$, односно $x:6 = -18$. Конечно, $x = -108$.

Проверка, $-108:6 - 13 = -18 - 13 = -31$.

Значи, бараниот број е -108 .

Задачи за вежби

119. Пресметај ја вредноста на бројниот израз:

а) $-31 + (-180):(-15) - |15:(-3) + 24|$,

б) $(-14) \cdot 3 - (-2) + |-42 + (-35):(-7)|$,

в) $|-5 + (-56):8| - (7 \cdot (-5) + (-63):(-9))$.

120. Реша ги равенките:

а) $-x = 3$,

б) $x - 13 = 0$,

в) $x + 22 = -7$.

121. Реша ги равенките:

а) $x \cdot (-9) = 99$,

б) $10 \cdot x = -120$,

в) $x \cdot (-7) = -84$.

122. Реша ги равенките:

а) $x:(-11) = 7$,

б) $x:(-7) = 35$,

в) $x:(-7) = -14$.

123. Реша ги равенките:

а) $54:x = -6$,

б) $(-39):x = 3$,

в) $124:x = -4$.

124. Определи го збирот на бројот -52 и количникот на броевите -144 и -12 .
125. Михаил за роденден добил 3000 денари од дедо му, 5000 денари од баба му и 7000 денари од тетка му. Тој со парите кој ги добил сака да купи велосипед кој чини 20000 денари. Дали на Михаил ќе му останат пари или неговите родители треба да додадат пари за да го купи велосипедот и колку?
126. Туристичка агенција организира еднодневна екскурзија за ученици од шесто и дводневна екскурзија за ученици од седмо одделение. На екскурзијата отишле 77 ученици од шесто одделение и 42 ученици од седмо одделение. Секој ученик од шесто одделение уплатил по 600 денари, а секој ученик од седмо одделение уплатил по 800 денари. Туристичката агенција превозот на еден ученик ја чини по 500 денари, а ноќевање на еден ученик од седмо одделение ја чини 400 денари. Колку ќе заработи туристичката агенција од организацијата на екскурзијата?
127. Кој број треба да го додадеш на разликата на броевите -43 и -21 , за да го добиеш нивниот збир?
128. Зоран има 6000 денари и сака да купи таблет кој чини 10000 денари и ранец кој чини 2000 денари. Во продавницата му рекле дека 6000 денари мора да плати одма, а остатокот од парите може да го плати во текот на една година со еднакви месечни рати. Колку пари треба да плаќа Зоран секој месец?
129. Ако некој број го поделиш со 7 и до добиениот количник одземеш 12, ќе го добиеш бројот 45. Кој е тој број?
130. Со кој број треба да се подели бројот -324 за да се добие количник 14 и остаток -2 ?

1.2.12 Степен со показател природен број. Квадратен корен од природен број

Веќе знаеш дека собирањето на повеќе еднакви собирци кратко го запишуваме како множење. Но дали множењето на повеќе еднакви множители може кратко да се запише? Одговорот на прашањето е дека ваквиот производ може кратко да се запише – како степен.

Пример 1. Илија решавал задачи 5 дена, по 5 часа на ден, по 5 задачи на час. Колку вкупно задачи решил Илија?

Решение. Илија решавал 5 дена по 5 часа, што значи дека тој решавал $5 \cdot 5$ часа. Бидејќи секој час решавал по 5 задачи, заклучуваме дека тој вкупно решил $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ задачи. Ова кратко можеме да го запишеме како $5^3 = 125$.

Нека $n \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{Z}$. Производот $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ множители}}$ кратко се запишува a^n , а се чита a на n -та. Записот a^n се нарекува *степен со основа a и степен*

степенов показател — $5^3 = 125$
основа — 5 — степен — 3 — вредност на степенот

енов показател n . Вредноста на производот $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ ја нарекуваме вредност на степенот a^n .

Значи, основата е множителот, а показателот е бројот на множителите, т.е. колку пати основата е помножена сама со себе.

Пример 2. Запиши го производот како степен, а потоа прочитај го и определи ги основата и степеновиот показател:

- а) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, б) $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11$, в) $0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0$,
г) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$, д) $121 \cdot 121$, ё) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$.

Решение. а) Имаме, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$ и тоа е два на шести. Степенот е со основа 2 и степенов показател 6.

б) Имаме, $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 = 11^4$ и тоа е единаесет на четврти. Степенот е со основа 11 и степенов показател 4.

в) Имаме, $0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0^7$ и тоа е нула на седми. Степенот е со основа 0 и степенов показател 7.

г) Имаме, $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^3$ и тоа е минус пет на трети. Степенот е со основа -5 и степенов показател 3.

д) Имаме, $121 \cdot 121 = 121^2$ и тоа е сто и дваесет и еден на втори. Степенот е со основа 121 и степенов показател 2.

ё) Имаме $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1^7$ и тоа е еден на седми. Степенот е со основа 1 и степенов показател 7.

Пример 3. Запиши го степенот како производ на еднакви множители, а потоа пресметај ја неговата вредност:

- а) 2^6 , б) $(-3)^3$, в) 7^2 , г) $(-5)^4$.

Решение. а) Од $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 16 \cdot 4 = 64$, добиваме дека вредноста на степеот е 64.

б) Слично како под а) добиваме: $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 9 \cdot (-3) = -27$.

в) Имаме: $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$.

г) Имаме: $(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = ((-5) \cdot (-5)) \cdot ((-5) \cdot (-5)) = 25 \cdot 25 = 625$.

Пример 4. Илија и Јасмин купиле по 8 пакети, во кои имало по 8 бонбониери со по 8 бонбони во секоја бонбониера. По колку бонбони имал секој од нив? Колку бонбони имале двајцата заедно?

Решение. Илија и Јасмин имале по $8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3$ бонбони. Двајцата заедно имале $8^3 + 8^3 = 2 \cdot 8^3$ бонбони.

Степените со степенови показатели 2 ги нарекуваме *квадрати*, а степените со степенови показатели 3 ги нарекуваме *кубови*. Притоа степенот a^2 го читаме „ a на квадрат“.

Пример 5. Квадратите на природните броеви од 1 до 20 се:

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1, & 2^2 &= 4, & 3^2 &= 9, & 4^2 &= 16, & 5^2 &= 25, \\ 6^2 &= 36, & 7^2 &= 49, & 8^2 &= 64, & 9^2 &= 81, & 10^2 &= 100, \\ 11^2 &= 121, & 12^2 &= 144, & 13^2 &= 169, & 14^2 &= 196, & 15^2 &= 225, \\ 16^2 &= 256, & 17^2 &= 289, & 18^2 &= 324, & 19^2 &= 361, & 20^2 &= 400. \end{aligned}$$

Разгледај ја дадената шема. Што забележуваш? Продолжи на истиот начин со запишување на природните броеви до 100. Дали правилото кое го воочи важи и понатаму?

				1			
		2	3	4			
	5	6	7	8	9		
10	11	12	13	14	15	16	
17	18	19	20	21	22	23	24
							25
.....							

Од својствата на множењето цели броеви следува тврдењето.

Ако основата a на степенот a^n е позитивен цел број, тогаш $a^n > 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Ако е негативен цел број, тогаш $a^n > 0$ кога n е парен број, а $a^n < 0$ кога n е непарен број.

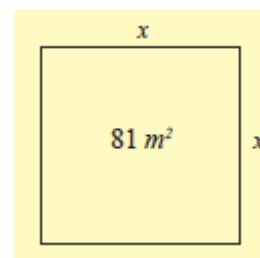
Ако $a = 0$, тогаш $a^n = 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Од претходното тврдење следува дека квадратот на секој ненулта цел број е позитивен број, а квадратот на бројот 0 е 0.

Сега, да го разгледаме следниов пример.

Пример 6. Училишниот базен има форма на квадрат, чија плоштина е $81 m^2$. Колку е должината на базенот?

Решение. Ако должината на базенот ја означиме со x , тогаш неговата плоштина е $P = x^2$. Според тоа, за да ја определиме должината на базенот треба да ја решиме равенката $x^2 = 81$. Од $9^2 = (-9)^2 = 81$ заклучуваме -9 и 9 се решенија на добиената равенка. Сега, бидејќи должината мора да е позитивен број заклучуваме дека должината на базенот е $9 m$.



Бидејќи квадратот на секој ненулта цел број е позитивен број, а квадратот на бројот 0 е 0, ако $a < 0$, тогаш равенката $x^2 = a$ нема решение. Јасно, единственото решение на равенката $x^2 = 0$ е бројот 0. Понатаму, може да се докаже дека ако a е природен број,

тогаш равенката $x^2 = a$ има две решенија, позитивно и негативно. Во врска со претходните разгледувања ја имаме следнава дефиниција.

Ненегативното решение на равенката $x^2 = a$, $a \geq 0$ го нарекуваме *квадратен корен* на бројот a и го означуваме со $\sqrt{a}$. Знакот $\sqrt{}$ е знак за *квадратен корен*, а во записот $\sqrt{a}$, бројот a го нарекуваме *поткоренова величина*.

Во пример 4 ги запишавме квадратите на природните броеви од 1 до 20. Всушност, во овој пример се дадени квадрати на природни броеви до 400, а оттука може да се видат и соодветните корени.

Пример 7. Докажи дека:

а) $\sqrt{100} = 10$, б) $\sqrt{121} = 11$, .

Решение. а) Имаме $10^2 = 100$, од каде следува дека 10 е решение на равенката $x^2 = 100$. Значи, $\sqrt{100} = 10$.

б) Имаме $11^2 = 121$, од каде следува дека 11 е решение на равенката $x^2 = 121$. Значи, $\sqrt{121} = 11$.

Задачи за вежби

131. Запиши го производот како степен, а потоа определи ги основата и степеновиот показател:

а) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, б) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$,
в) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$, г) $13 \cdot 13 \cdot 13$

132. Запиши го степенот како производ на еднакви множители, а потоа пресметај ја неговата вредност:

а) $(-1)^4$, б) 5^4 , в) 2^7 , г) $(-2)^7$.

133. Запиши ги табеларно множествата:

а) $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ и } n < 9\}$, б) $B = \{(-3)^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ и } n < 6\}$.

134. На цртата стави еден од знаците $<$, $=$ или $>$ така што е добиеш точно равенство или неравенство:

а) $2^4 \underline{\hspace{1cm}} (-2)^4$, б) $2^3 \underline{\hspace{1cm}} 3^2$, в) $2^4 \underline{\hspace{1cm}} 4^2$,
г) $4^3 \underline{\hspace{1cm}} 8^2$, д) $2^7 \underline{\hspace{1cm}} 5^3$, е) $3^4 \underline{\hspace{1cm}} 9^2$.

135. Запиши ги броевите чии квадрати се: 36, 64, 100, 144 и 196.

136. Запиши ги броевите чии кубови се: 1, 8, 64 и 216.

137. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $1 + 4 + 4^2 + 4^3$,
б) $1 + (-2) + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + (-2)^5$,

в) $4^2 + 3^4 - 2^6$.

138. Докажи дека:

а) $\sqrt{81} = 9$, б) $\sqrt{169} = 13$, в) $\sqrt{64} = 8$, г) $\sqrt{400} = 20$.

139. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\sqrt{36} - \sqrt{16}$, б) $\sqrt{25} + \sqrt{9}$.

Провери го своето знаење 2

1. а) Претстави ги на бројната права точките: $A(-5)$, $B(2)$, $C(-7)$, $D(5)$.

б) Определи ја должината на отсечката AB ако $A(-6)$, $B(0)$.

2. Дополни ја табелата

a	24	-17			-212
$-a$			17	-33	
$ a $					

3. Подреди ги по големина почнувајќи од најмалиот збирите:

$-2 + (-7)$, $-11 + (-6)$, $-4 + (-6)$, $-15 + (-4)$.

4. Дополни ја низата броеви: 12, 7, 2, __, __, __, __, __, -28.

5. Ослободи се од заградите, а потоа пресметај ја вредноста на изразот:

а) $4 + (-5 + 3 - 12 + 7)$, б) $12 - (13 - 7 + (4 - 5 + 10))$.

6. Дополни ја табелата

a	-11	9	-23	-22
b	-4	-6	4	-11
$a \cdot b$				

7. За која вредност на целиот број a е точно равенството:

а) $(-17) + (-33) = (-33) + a$,

б) $(+119) \cdot (-335) = (-335) \cdot a$,

в) $((+15) + a) + (-59) = (+15) + ((-27) + (-59))$,

г) $((+17) \cdot (-31)) \cdot (-12) = (+17) \cdot ((-31) \cdot a)$.

8. Пресметај ја вредноста на изразот: $30 \cdot (-25) + 30 \cdot 15$.

9. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $(-56) : (-8) + (-48) : 6$, б) $|-5 + (-56) : 4| - (7 \cdot (-5) + (-63) : (-3))$.

10. Реши ги равенките:

а) $x + 11 = -17$, б) $9 \cdot x = -108$, в) $x : (-4) = 15$, г) $(-42) : x = 7$.

11. Кој број треба да го додадеш на разликата на броевите -42 и 21, за да го добиеш нивниот збир?

12. Пресметај ја вредноста на изразот: а) $1 + 3 + 3^2 + 3^3$, б) $\sqrt{49} + \sqrt{16}$.

1.3 Позитивни рационални броеви

- 1.3.1 Поим за дробка. Видови дробки
- 1.3.2 Претставување на дробки на бројна полуправа
- 1.3.3 Проширување, скратување и споредување дробки
- 1.3.4 Собирање и одземање дробки
- 1.3.5 Множење дробки
- 1.3.6 Реципрочна дробка. Делење дробки, двојни дробки
- 1.3.7 Равенки со множење и делење дробки
- 1.3.8 Поим за децимален број. Основни својства
- 1.3.9 Претставување децимален број на бројна полуправа.
Споредување децимални броеви
- 1.3.10 Собирање и одземање децимални броеви
- 1.3.11 Множење децимални броеви
- 1.3.12 Делење децимални броеви
- 1.3.13 Претворање дробка во децимален број. Заокружување децимални броеви
- 1.3.14 Проенти и примена на проенти
- 1.3.15 Размер и пропорционалност

Со дробките и децималните броеви се запозна во претходните одделенија, а со освојување на содржините од оваа поттема ќе го повториш досега наученото и ќе ги заокружиш своите знаења за дробки, со што ќе можеш:

- дел од целото или количникот на два природни броја да го запишеш како дробка,
- да претставуваш дробки на бројната полуправа,
- да прошируваш, скратуваш и споредуваш дробки,
- да сведуваш дробки на еднакви именители,
- да собираш и одземаш дробки со еднакви и различни именители,
- да множиш и делиш дробки,
- да ги користиш комутативното, асоцијативното и дистрибутивното својство,
- да одредуваш вредности на бројни изрази со дробки,
- да решаваш равенки и проблеми со дробки,
- да запишува дробки како децимални броеви и обратно,
- да претставуваш децимални броеви на бројната полуправа и да ги споредуваш,
- да собираш и одземаш децимални броеви,
- да множиш и делиш децимални броеви,
- да одредуваш вредности на бројни изрази со децимални броеви,
- да решаваш равенки и проблеми со децимални броеви ,
- да запишуваш број како процент и обратно,
- да пресметуваш проенти и да решаваш проблеми со проенти,
- да наоѓаш размер на два броја и да решаваш проблеми со размер,
- да утврдуваш правопрпорционалност на две величини и да користиш правопрпорционални величини при решавање проблеми.

1.3.1 Поим за дробка. Видови дробки

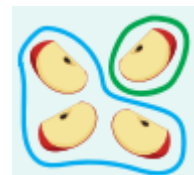
Во претходните одделенија учеше за дробки. Сега ќе ги повториш своите знаења за дробките и ќе стекнеш нови сознанија за истите.

Кога треба да опишеме еден или повеќе делови од една целина ги користиме дробките. Притоа целината можеме да ја поделиме на: 2, 3, 4, 5, ... еднакви делови. Така добиваме: половици, третини, четвртини, петтини,

Пример 1. Станко го поделил чоколадото на три еднакви дела. Еден дел задржал за себе, а два дела и дал на неговата сестра Илина. Значи, Станко добил третина од чоколадото, а Илина добила две третини од чоколадото.

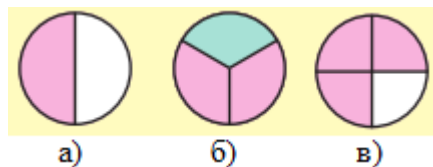


Пример 2. Енис го поделил јаболкото на четири еднакви дела. Едниот дел го изел, а трите дела ги оставил во чинијата. Значи, Енис изел четвртина, а оставил три четвртини од јаболкото.



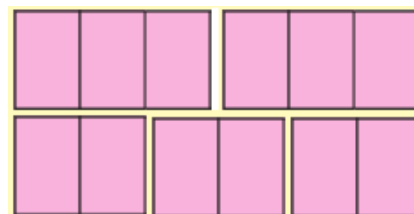
Во примерот 2 едно цело е поделено на четири еднакви делови, т.е. одредено е колку е $1:4$. Јасно, овој количник не е природен број, бидејќи не постои природен број кој помножен со 4 дава 1. Но, бидејќи точно знаеме што е тоа една четвртина, разумно е да прифатиме дека и една четвртина е број. Притоа запишуваме $1:4 = \frac{1}{4}$.

Пример 3. На цртежот а) кругот е поделен на два еднакви дела, што значи дека розевиот дел е $\frac{1}{2}$ од кругот. Кругот б) е поделен на три дела. Розевиот дел е $\frac{2}{3}$ од кругот, а синиот дел е $\frac{1}{3}$ од кругот. На кругот в) розевиот дел е $\frac{3}{4}$ од кругот, а белиот дел е $\frac{1}{4}$.



Пример 4. Како три деца ќе поделат подеднакво две чоколади?

Решение. Ако прво секое чоколадо го поделиме на три еднакви дела, ќе добиеме $2 \cdot 3 = 6$ еднакви делови. Според тоа, секое дете треба да добие по $6:3 = 2$ дела од едно чоколадо, односно $\frac{2}{3}$ од едно чоколадо.



Во претходните примери ние всушност имаме дробки. Како што можеме да видиме тоа се броеви од видот $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$. Така ја имаме следнава дефиниција.

Ако $m, n \in \mathbb{N}_0, n \neq 0$, тогаш записот $\frac{m}{n}$ е број кој го нарекуваме *дропка*. Притоа читаме m врз n . Бројот m е *броител*, а бројот n *именител* на дропката. Тие се одделени со цртичка која ја нарекуваме *дробна црта*.

$$\frac{m}{n}$$

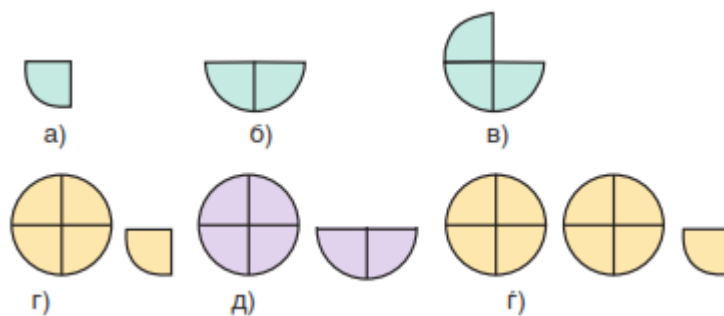
броител
дробна црта
именител

Именителот на дропката покажува на колку делови сме ја поделиле целината, а броителот покажува колку делови сме зеле

Ако природниот број m е делив со природниот број n , т.е. ако $m = kn$, $k \in \mathbb{N}$, тогаш $m : n = (kn) : n = k$. Значи, ако за $m, n \in \mathbb{N}$ важи $n \mid m$, тогаш $\frac{m}{n} \in \mathbb{N}$. Специјално, за секој природен број m важи $\frac{m}{m} = m : m = 1 \in \mathbb{N}$, $\frac{m}{1} = m$ и $\frac{0}{m} = 0 : m = 0$. Исто така, ако $m, n \in \mathbb{N}$, тогаш $\frac{m \cdot n}{n} = (m \cdot n) : n = m$, што значи дека секој природен број m може да се запише во вид на дропка со именител n . Затоа множеството $\mathbb{N}_0$ е подмножество од множеството дропки.

Дропката со која е претставен природен број ја нарекуваме *привидна дропка*.

На цртежите се прикажани фигури кои се оставени од делови што претставуваат $\frac{1}{4}$ од еден круг. Така фигурите од првиот ред се претставуваат со дропките: а) $\frac{1}{4}$, б) $\frac{2}{4}$ и в) $\frac{3}{4}$. Фигурите од вториот ред се претставуваат со дропките: г) $\frac{5}{4}$, д) $\frac{6}{4}$ и е) $\frac{9}{4}$. Забележуваме дека во првата група дропки броителот е помал од именителот, а во втората група е поголем од именителот. Затоа разликуваме три вида дропки, т.е. ја имаме следнава дефиниција.



Ако $m < n$, тогаш $\frac{m}{n} < 1$ и ваквата дропка ја нарекуваме *правилна дропка*. Ако $m = n$, тогаш $\frac{m}{n} = 1$. Ако $m > n$, тогаш $\frac{m}{n} > 1$ и ваквата дропка ја нарекуваме *неправилна дропка*.

Пример 5. Од множеството $\{\frac{2}{3}, \frac{7}{4}, \frac{6}{11}, \frac{13}{3}, \frac{15}{4}, \frac{5}{16}, \frac{17}{7}, \frac{21}{8}\}$ определи ги подмножествата правилни и неправилни дропки.

Решение. Јасно, подмножеството правилни дропки е $\{\frac{2}{3}, \frac{7}{4}, \frac{6}{11}, \frac{5}{16}\}$, а $\{\frac{13}{3}, \frac{15}{4}, \frac{17}{7}, \frac{21}{8}\}$ е подмножеството неправилни дропки.

Нека $m > n$. Тоа значи, постојат природни броеви q и $r < n$ такви што $m = qn + r$. Неправилната дробка $\frac{m}{n}$ ја запишуваме во облик на мешан број $q\frac{r}{n}$.

количник
на m и n

$$\frac{m}{n} = q\frac{r}{n}$$

остаток
мешан број

Пример 6. Престави ги неправилните дробки $\frac{13}{3}, \frac{15}{4}, \frac{17}{7}, \frac{21}{8}$ во облик на мешани броеви.

Решение. Имаме: $13 = 3 \cdot 4 + 1$, $15 = 4 \cdot 3 + 3$, $17 = 7 \cdot 2 + 3$, $21 = 8 \cdot 2 + 5$, па затоа

$$\frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}, \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}, \frac{17}{7} = 3\frac{3}{7}, \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}.$$

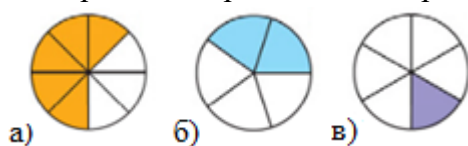
Пример 7. Мешаните броеви $4\frac{2}{3}, 5\frac{3}{7}, 3\frac{7}{11}$ претвори ги во неправилни дробки.

Решение. Имаме

$$4\frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{14}{3}, 5\frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 7 + 3}{7} = \frac{38}{7}, 3\frac{7}{11} = \frac{3 \cdot 11 + 7}{11} = \frac{40}{11}.$$

Задачи за вежби

140. Кои дробки се прикажани на цртежите?



141. Кои дробки од множеството $A = \{\frac{2}{7}, \frac{1}{9}, \frac{6}{6}, \frac{15}{3}, \frac{5}{4}, \frac{3}{7}, \frac{27}{9}, \frac{27}{11}, \frac{3}{19}, \frac{54}{6}\}$ се:

а) правилни, б) привидни, в) неправилни.

142. Неправилните дробки запиши ги во вид на мешани броеви:

$$\frac{22}{7}, \frac{21}{9}, \frac{5}{4}, \frac{27}{9}, \frac{27}{11}.$$

143. Мешаните броеви запиши ги како неправилни дробки:

$$5\frac{2}{7}, 4\frac{2}{9}, 7\frac{1}{4}, 4\frac{2}{9}, 8\frac{2}{11}.$$

144. Запиши ги сите правилни дробки со именител 5.

145. Меѓу кои природни броеви е бројот:

а) $2\frac{1}{4}$, б) $5\frac{3}{7}$, в) $8\frac{3}{5}$, г) $10\frac{3}{4}$.

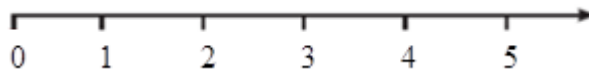
146. Десет деца порачале 12 пици и ги поделиле подеднакво. Колкав дел е добие секое дете?

147. Броевите 3 и 5 претстави ги како дробки чии именители се:

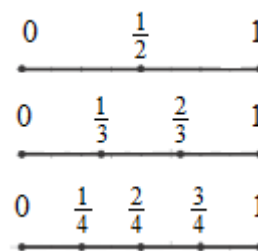
а) 2, б) 3.

1.3.2 Претставување на дробки на бројна полуправа

Множеството $\mathbb{N}_0$ на бројната полуправа го претставуваме така што точките кои ги претставуваат природните броеви ги добиваме со надоврзување на единичната должина на онолку пати колку што е природниот број. Притоа единичната должина ја избираме произволно.



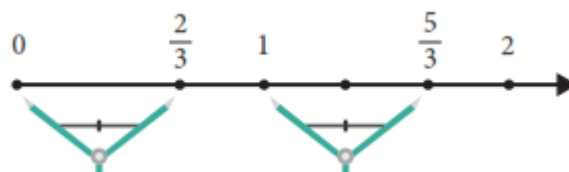
Дропките исто така може да се претстават на бројната полуправа. На секоја дробка можеме да и придружимо по една точка на бројната полуправа. Да ја разгледаме отсечката чии крајни точки соодветствуваат на броевите 0 и 1. Ако оваа отсечка ја поделиме на два дела, тогаш на средната точка и ја придружуваме дробката $\frac{1}{2}$. Ако ја поделиме на три дела, тогаш на добиените



ните точки од лево кон десно им ги придружуваме дробките $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. Слично, како на цртежот постапуваме кога отсечката ќе ја поделиме на четири дела итн. Понатаму, ако отсечката ја поделиме на n делови, тогаш на добиените $n-1$ точка редоследно од лево кон десно им ги придружуваме дробките $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$. На овој начин ги претставуваме сите правилни дробки $\frac{m}{n}, m < n$.

Да ја разгледаме дробката $\frac{5}{3}$, која запишана како мешан број е $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$. Бидејќи дробката $\frac{2}{3}$ претставува помалку од едно цело, мешаниот број $1\frac{2}{3}$ претставува повеќе од 1 цело и помалку од две цели, т.е. важи $1 < 1\frac{2}{3} < 2$. Затоа на дробката $\frac{5}{3}$ ќе и придружиме точка која е на отсечката со крајни точки 1 и 2. Определуваме точка која соодветствува на дробниот дел $\frac{2}{3}$ од дробката $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.

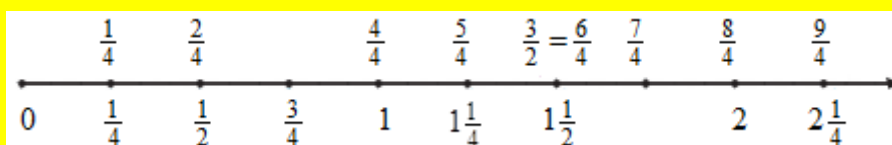
Точката која соодветствува на дробката $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ ја добиваме со надоврзување на отсечката со должина $\frac{2}{3}$ во десно на отсечката чии крај и точки се 0 и 1.



Пример 1. Определи ги точките кои на бројната права соодветствуваат на дробките:

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, \frac{8}{4}, \frac{9}{4}.$$

Решение. Бараните претставувања се дадени на цртежот. Како што можеме да видиме на дробките $\frac{2}{4}$ и $\frac{1}{2}$ соодветствува иста точка, па затоа важи $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.



Понатаму, од исти причини важи

$$\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} = 1\frac{2}{4} = \frac{6}{4}.$$

Како што знаеме за секои $a, b \in \mathbb{N}_0$ е исполнета само една од трите можности: или $a < b$ или $a = b$ или $a > b$. Понатаму, $a < b$, ако точката која на бројната права соодветствува на бројот b е десно од точката која соодветствува на бројот a . На ист начин ги споредуваме и дробките.

Пример 2. Определи ги точките кои на бројната права соодветствуваат на дробките: $\frac{11}{4}$ и $\frac{12}{5}$, а потоа спореди ги овие дробки.

Решение. Имаме:

$$\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4} \text{ и } \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}.$$

Претставувањата на дробките се дадени на цртежот.



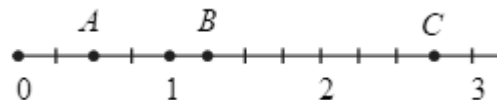
Сега, од цртежот заклучуваме дека $\frac{12}{5} < \frac{11}{4}$.

Задачи за вежби

148. На бројната полуправа претстави ги дробките:

$$\frac{7}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, 3\frac{1}{4}, \frac{7}{2}.$$

149. Кои дробки соодветствуваат на бројната полуправа на точките A, B, C ?



150. Определи ги точките кои на бројната права соодветствуваат на дробките:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1\frac{1}{6}.$$

151. Определи ги точките кои на бројната права соодветствуваат на дробките: $\frac{21}{6}$ и $\frac{18}{5}$, а потоа спореди ги овие дробки.

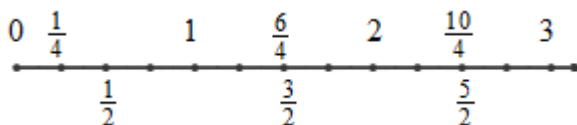
152. На бројната права воочи ги точките кои соодветствуваат на броевите 3 и 4, а потоа определи дробка која соодветствува на точката која е еднакво оддалечена од овие две точки.

153. Подреди ги по големина дробките:

$$\frac{1}{3}, \frac{11}{5}, \frac{9}{7}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}.$$

1.3.3 Проширување, скратување и споредување дробки

Пример 1. На бројната полуправа се прикажани дробките $\frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{5}{2}, \frac{10}{4}$. Како што гледаме на дробките $\frac{3}{2}$ и $\frac{6}{4}$ одговара



една иста точка, а истото важи и за дробките $\frac{5}{2}$ и $\frac{10}{4}$. Затоа важи $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ и $\frac{5}{2} = \frac{10}{4}$. Сега, ако искористиме дека $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 3 \cdot 2$ и $10 = 5 \cdot 2$, можеме да запишеме $\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4}$ и $\frac{5}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{10}{4}$.

Ако броителот и именителот на дробката $\frac{a}{b}$ ги помножиме со природниот број $n > 1$, тогаш велиме дека дробката $\frac{a}{b}$ сме ја *прошириле* со бројот n . Притоа се добива дробката $\frac{a \cdot n}{b \cdot n}$ чија вредност е еднаква на дробката $\frac{a}{b}$, т.е. $\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}$, за секои $a, b, n \in \mathbb{N}$.

Пример 2. Дробката $\frac{3}{5}$ прошири ја со броевите 2, 3, 4, 5, 6 и 7.

Решение. Имаме,

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}, \quad \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{9}{15}, \quad \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}, \quad \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 5} = \frac{15}{25}, \quad \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{18}{30}, \quad \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{21}{35}.$$

Нека природните броевите a и b се деливи без остаток со природниот број $m > 1$. Тогаш $a : m$ и $b : m$ се природни броеви. Сега, ако дробката $\frac{a:m}{b:m}$ ја прошириме со бројот m добиваме $\frac{a:m}{b:m} = \frac{(a:m) \cdot m}{(b:m) \cdot m} = \frac{a}{b}$. Така ја имаме следнава дефиниција.

Ако броителот и именителот на дробката $\frac{a}{b}$ се деливи со природниот број $m > 1$, тогаш можеме да ги поделиме со m и велиме дека дробката $\frac{a}{b}$ сме ја *скратиле* со бројот m . Притоа важи $\frac{a}{b} = \frac{a:m}{b:m}$.

Пример 3. Скрати ја дробката $\frac{12}{24}$.

Решение. Зеднички делители поголеми од 1 на броевите 12 и 24 се: 2, 3, 4, 6 и 12. Ако дробката ја скратиме со секој од овие броеви, добиваме

$$\frac{12}{24} = \frac{12:2}{24:2} = \frac{6}{12}, \quad \frac{12}{24} = \frac{12:3}{24:3} = \frac{4}{8}, \quad \frac{12}{24} = \frac{12:4}{24:4} = \frac{3}{6}, \quad \frac{12}{24} = \frac{12:6}{24:6} = \frac{2}{4}, \quad \frac{12}{24} = \frac{12:12}{24:12} = \frac{1}{2}.$$

Добиените дробки имаат иста вредност бидејќи истите се резултат од кретењето на дробката $\frac{12}{24}$. Затоа важи

$$\frac{12}{24} = \frac{6}{12} = \frac{4}{8} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Да се потсетиме, дека за два броја a и b постои нивен најголем заеднички делител кој го означуваме со $\text{НЗД}(a, b)$. Тоа значи дека најголемиот број со кој може да се скрати дробката $\frac{a}{b}$ е бројот $\text{НЗД}(a, b)$.

Пример 4. Најди НЗД од 24 и 60 и потоа скрати ја дробката $\frac{24}{60}$.

Решение. Броевите 2 и 5 се заемно прости, што значи дека $\text{НЗД}(24, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Значи, бараното скратување е $\frac{24}{60} = \frac{24:12}{60:12} = \frac{2}{5}$. Да забележиме дека слично како во пример 3 дробката $\frac{24}{60}$ може и постепено да скратуваме со 2, 2 и 3, но методот со наоѓање на $\text{НЗД}(24, 60)$ е поефикасен.

24,	60	2
12,	30	2
6,	15	3
2,	5	

Во претходниот пример при скратувањето добивме дробка чии броител и именител се заемно прости броеви. Во врска со ова ја имаме следнава дефиниција.

Ако броителот и именителот на дробката $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$ се заемно прости, тогаш велиме дека таа е *нескратлива* дробка.

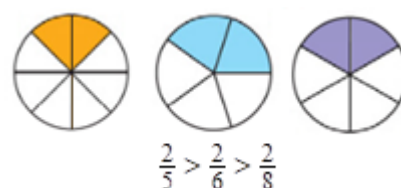
Веќе знаеш дека со помош на бројната полуправа дробките ги споредуваме исто како и природните броеви. Тоа значи дека од две дробки поголема е дробката која е десно на бројната права. На пример: $\frac{33}{8} > \frac{27}{8}$, $\frac{4}{7} > \frac{3}{7}$, $\frac{19}{21} > \frac{17}{21}$, $\frac{5}{k} > \frac{3}{k}$ ($k \in \mathbb{N}$). Од ова и од фактот дека од две дробки со еднакви именители десно на бројната права е дробката која има поголем броител (Зошто?) следува точноста на следново тврдење.

Ако a, b, c се природни броеви такви што $a < c$, тогаш $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$, и обратно.

Пример 5. Дробките $\frac{3}{7}$, $\frac{12}{7}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{6}{7}$ подреди ги во растечки редослед.

Решение. Забележуваме дека дадените дробки имаат именител 7, т.е. дека тоа се дробки со еднакви именители. Затоа подредувањето во растечки редослед го правиме според нивните броители (почнувајќи од најмалиот) и добиваме: $\frac{1}{7} < \frac{3}{7} < \frac{6}{7} < \frac{8}{7} < \frac{12}{7}$.

Ако една целина ја делиме на 5 или на 6 или на 8 еднакви делови, тогаш е јасно дека најмал ќе биде делот кога делиме на 8 делови, поголем е делот кога делиме на 6 делови и најголем е делот кога делиме на 5 делови. Оттука следува дека $\frac{2}{5} > \frac{2}{6} > \frac{2}{8}$.



Значи, колку е поголем бројот на еднаквите делови, толку истите се помали. Оттука следува точноста на тврдењето.

Ако a, b, c се природни броеви такви што $a < c$, тогаш $\frac{b}{c} < \frac{b}{a}$, и обратно.

Пример 6. Дропките $\frac{11}{7}, \frac{11}{5}, \frac{11}{17}, \frac{11}{18}, \frac{11}{12}$ подреди ги во растечки редослед.

Решение. Забележуваме дека дадените дропки имаат броител 11, т.е. дека тоа се дропки со еднакви броители. Затоа подредувањето во растечки редослед го правиме според нивните именители (почнувајќи од најголемиот): $\frac{11}{18} < \frac{11}{17} < \frac{11}{12} < \frac{11}{7} < \frac{11}{5}$.

Видовме како можеме на бројната полуправа да споредиме било кои две дропки. Но, ова често пати може да е доста комплицирано, па затоа ќе разгледаме еден едноставен начин.

Пример 7. Спореди ги дропките $\frac{11}{4}$ и $\frac{13}{5}$.

Решение. Дадените дропки имаат различни именители и различни броители. Меѓутоа, ако првата дропка ја прошириме со именителот на втората дропка, а втората дропка ја прошириме со именителот на првата дропка, добиваме $\frac{11}{4} = \frac{11 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{55}{20}$ и $\frac{13}{5} = \frac{13 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{52}{20}$. Дропките $\frac{55}{20}$ и $\frac{52}{20}$ имаат еднакви именители, па затоа $\frac{52}{20} < \frac{55}{20}$.

Во претходниот пример дадените дропки ги проширивме така што двете дропки да имаат еднакви именители, а потоа истите ги споредивме.

Постапката со која од дропки со различни именители со проширување или скратување добиваме дропки со еднакви именители, ја нарекуваме *сведување на дропки на заеднички именител*.

Ако се дадени дропките $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, тогаш наједноставно можеме да ги сведеме на дропки со заеднички именител ако првата ја прошириме со бројот d , а втората ја прошириме со бројот b . Според тоа, $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}$ и $\frac{c}{d} = \frac{c \cdot b}{d \cdot b}$, па споредувањето на дропките можеме да го направиме споредувајќи дропки со еднакви именители.

Дадени се дропките $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$. Точни се следниве тврдења

- 1) ако $\frac{a \cdot d}{b \cdot d} < \frac{c \cdot b}{d \cdot b}$, т.е. ако $a \cdot d < c \cdot b$, тогаш $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ и обратно
- 2) ако $\frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{c \cdot b}{d \cdot b}$, т.е. ако $a \cdot d = c \cdot b$, тогаш $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и обратно,
- 3) ако $\frac{a \cdot d}{b \cdot d} > \frac{c \cdot b}{d \cdot b}$, т.е. ако $a \cdot d > c \cdot b$, тогаш $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ и обратно.

Сведувањето на дропките $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ на заеднички именител може да се направи на погоре опишаниот начин. Меѓутоа истото најчесто се прави со користење на најмалиот

заеднички содржател на броевите b и d . Притоа велиме дека дробките сме ги свеле на нивниот најмал заеднички именител. Да разгледаме еден пример

Пример 8. Спореди ги дробките $\frac{13}{6}$ и $\frac{23}{9}$.

Решение. Прв начин. Имаме, $\frac{13}{6} = \frac{13 \cdot 9}{6 \cdot 9} = \frac{117}{54}$ и $\frac{23}{9} = \frac{23 \cdot 6}{9 \cdot 6} = \frac{138}{54}$, од каде добиваме дека $\frac{13}{6} = \frac{117}{54} < \frac{138}{54} = \frac{23}{9}$.

Втор начин. Бидејќи $\text{НЗС}(6,9) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$, првата дробка треба да ја прошириме со бројот $\frac{\text{НЗС}(6,9)}{6} = \frac{18}{6} = 3$, а втората со $\frac{\text{НЗС}(6,9)}{9} = \frac{18}{9} = 2$. Добиваме $\frac{13}{6} = \frac{13 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{39}{18}$ и $\frac{23}{9} = \frac{23 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{46}{18}$, па затоа $\frac{13}{6} = \frac{39}{18} < \frac{46}{18} = \frac{23}{9}$.

$$\begin{array}{r|l} 6, & 9 \\ 3, & 9 \\ 1, & 3 \\ & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 3 \end{array}$$

На сличен начин се споредуваат дробките со сведување до заеднички броител. Ќе разгледаме еден пример.

Пример 9. Спореди ги дробките $\frac{10}{7}$ и $\frac{8}{5}$.

Решение. Прв начин. Имаме: $\frac{10}{7} = \frac{10 \cdot 8}{7 \cdot 8} = \frac{80}{56}$ и $\frac{8}{5} = \frac{8 \cdot 10}{5 \cdot 10} = \frac{80}{50}$, од каде добиваме дека $\frac{10}{7} = \frac{80}{56} < \frac{80}{50} = \frac{8}{5}$.

Втор начин. Бидејќи $\text{НЗС}(10,8) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$, првата дробка треба да ја прошириме со бројот $\frac{40}{10} = 4$, а втората со $\frac{40}{8} = 5$. Добиваме $\frac{10}{7} = \frac{10 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{40}{28}$ и $\frac{8}{5} = \frac{8 \cdot 5}{5 \cdot 5} = \frac{40}{25}$, па затоа $\frac{10}{7} = \frac{40}{28} < \frac{40}{25} = \frac{8}{5}$.

$$\begin{array}{r|l} 10, & 8 \\ 5, & 4 \\ 5, & 2 \\ 5, & 1 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{array}$$

На крајот ќе покажеме како споредувањето на дробки може да се употреби за решавање на едноставни равенки со дробки.

Пример 10. Определи го x ако $\frac{x}{3} = \frac{3}{12}$.

Решение. Именителите на дадените дробки се различни, па затоа прво дробките ќе ги сведеме на еднакви именители. Бидејќи $\text{НЗС}(3,12) = 12$, тоа можеме да го напраиме ако првата дробка ја прошириме со бројот $\frac{12}{3} = 4$. Притоа добиваме $\frac{4 \cdot x}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}$, односно $\frac{4 \cdot x}{12} = \frac{3}{12}$. Сега од последното тврдење следува дека $4 \cdot x = 3$, односно $x = 3 : 4 = \frac{3}{4}$.

За оние што сакаат да знаат повеќе

Во пример 4 при скратувањето на дробките прво најдовме НЗД од двата броја, а потоа ги скративме дадените дробки. Во шесто одделние научи како да определиш НЗД на два броја. Меѓутоа, НЗД на броевите a и b , ($a > b$) може да определиш и користејќи го равенството $\text{НЗД}(a,b) = \text{НЗД}(b, a - b)$. Последното равенство го применуваме се до-

дека додека не добиеме два еднакви броја и добиениот број е еднаков на $\text{НЗД}(a, b)$. На пример, за броевите 24 и 60 имаме:

$$\begin{aligned}\text{НЗД}(24, 60) &= \text{НЗД}(60 - 24, 24) = \text{НЗД}(36, 24) = \text{НЗД}(36 - 24, 24) = \text{НЗД}(12, 24) \\ &= \text{НЗД}(12, 24 - 12) = \text{НЗД}(12, 12) = 12.\end{aligned}$$

При сведувањето на дропки со еднаков броител или еднаков именител користевме НЗС на два броја. Во шесто одделение научи како да определиш НЗС. Меѓутоа, ако знаеш $\text{НЗД}(a, b)$, тогаш нивниот НЗС можеш да го најдеш користејќи го равенството $a \cdot b = \text{НЗС}(a, b) \cdot \text{НЗД}(a, b)$. На пример, за броевите 24 и 60 имаме:

$$24 \cdot 60 = 12 \cdot \text{НЗС}(24, 60), \text{ т.е. } \text{НЗС}(24, 60) = (24 \cdot 60) : 12 = 120.$$

Задачи за вежби

154. а) Прошири ја дропката $\frac{4}{9}$ со 2, со 3 и со 5.

б) Прошири ја дропката $\frac{8}{7}$ со 3, со 4 и со 6.

155. Определи $\text{НЗД}(56, 84)$, а потоа скрати ја дропката $\frac{56}{84}$.

156. Скрати ја дропката $\frac{24}{30}$ со заедничките делители на 24 и 30 кои се поголеми од 1.

157. Скрати ја дропката $\frac{132}{204}$ така што ќе добиеш нескратлива дропка.

158. Подреди ги по големина дропките $\frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{6}{5}, \frac{5}{5}, \frac{11}{5}, \frac{3}{5}$, почнувајќи од најмалата.

159. Подреди ги по големина дропките $\frac{13}{2}, \frac{13}{5}, \frac{13}{12}, \frac{13}{15}, \frac{13}{19}, \frac{13}{7}$, почнувајќи од најмалата.

160. Спореди дропките $\frac{17}{42}$ и $\frac{19}{56}$:

а) со користење на НЗС, б) без користење на НЗС.

161. Спореди ги дропките: $\frac{9}{4}, \frac{11}{6}$ и $\frac{19}{9}$.

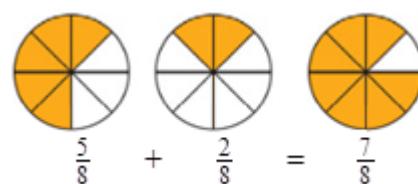
162. Спореди ги дропките $\frac{10}{13}$ и $\frac{14}{19}$ така што ќе го искористиш правилото за споредување при еднакви броители:

а) со користење на НЗС, б) без користење на НЗС.

1.3.4 Собирање и одземање дропки

Пример 1. Пресметај го збирот $\frac{5}{8} + \frac{2}{8}$.

Решение. На цртежот на првиот круг се прикажани 5 осмини од кругот, а на вториот круг се прикажани 2 осмини од кругот. Според тоа, на двата круга се прикажани $5 + 2 = 7$ осмини од кругот. Оттука заклучуваме дека $\frac{5}{8} + \frac{2}{8} = \frac{7}{8}$.



Од наведениот пример и од наученото во шесто одделение веројатно заклучи како се собираат дробки со еднакви именители.

Збирот на две дробки со еднакви именители е дробка со истиот именител како и дробките собироци, а броителот е еднаков на збирот на броителите на дробките собироци. Значи, $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.

Пример 2. Имаме:

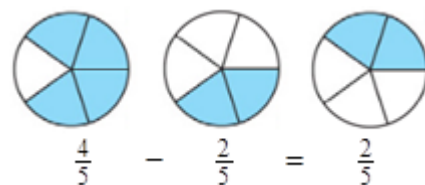
а) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{1+2}{5} = \frac{3}{5}$,

б) $1\frac{1}{5} + 2\frac{2}{5} = \frac{5+1}{5} + \frac{2\cdot 5+2}{5} = \frac{6}{5} + \frac{12}{5} = \frac{6+12}{5} = \frac{18}{5}$,

в) $\frac{2}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2+4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6+1}{9} = \frac{7}{9}$.

Пример 3. Пресметај ја разликата $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}$.

Решение. На цртежот на првиот круг се прикажани 4 петтини од кругот, а на вториот круг се прикажани 2 петтини од кругот. Според тоа, на првиот круг се прикажани $4 - 2 = 2$ петтини повеќе отколку на вториот круг. Оттука заклучуваме дека $\frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$.



Од претходниот пример и од наученото во шесто одделение веројатно заклучи како се одземаат дробки со еднакви именители.

Разлика на две дробки со еднакви именители е дробка со ист именител како и дробките кои што ги одземаме, а броителот е еднаков на разликата од броителите на дробките кои што ги одземаме. Значи, $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$, ($a > b$).

Пример 4. Имаме:

а) $\frac{11}{12} - \frac{4}{12} = \frac{11-4}{12} = \frac{7}{12}$, в) $2\frac{2}{9} - 1\frac{7}{9} = \frac{2\cdot 9+2}{9} - \frac{9+7}{9} = \frac{20}{9} - \frac{16}{9} = \frac{20-16}{9} = \frac{4}{9}$.

Во претходната лекција научивме како дробки со различни именители да сведеме на дробки со еднакви именители, а погоре видовме како се собираат и одземаат дробки со еднакви именители. Имајќи го ова предвид, дробки со различни именители собираме и одземаме со следнава постапка.

Дробки со различни именители собираме или одземаме така што прво со проширување ги сведуваме на дробки со еднакви именители, а потоа ги собираме или одземаме.

Пример 5. Пресметај: а) $\frac{1}{6} + \frac{2}{5}$, б) $\frac{2}{3} + \frac{5}{12}$, в) $\frac{8}{9} - \frac{5}{6}$.

Решение. а) $\frac{1}{6} + \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 5}{6 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{5}{30} + \frac{12}{30} = \frac{17}{30}$.

б) $\frac{2}{3} + \frac{5}{12} = \frac{2 \cdot 12}{3 \cdot 12} + \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{24}{36} + \frac{15}{36} = \frac{24+15}{36} = \frac{39}{36} = \frac{39:3}{36:3} = \frac{13}{12}$.

в) $\frac{8}{9} - \frac{5}{6} = \frac{8 \cdot 6}{9 \cdot 6} - \frac{5 \cdot 9}{6 \cdot 9} = \frac{48}{54} - \frac{45}{54} = \frac{48-45}{54} = \frac{3}{54} = \frac{1}{18}$.

Забележуваме дека во пример 5 б) наместо заедничкиот содржател 36, можеме да го најдеме најмалиот заеднички содржател на именителите на дробките $\text{НЗС}(3,12) = 12$.

Тогаш имаме $\frac{2}{3} + \frac{5}{12} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{5}{12} = \frac{8}{12} + \frac{5}{12} = \frac{8+5}{12} = \frac{13}{12}$. Истото важи и за пример 5 в), каде

$\text{НЗС}(6,9) = 18$ и $\frac{8}{9} - \frac{5}{6} = \frac{8 \cdot 2}{9 \cdot 2} - \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{16}{18} - \frac{15}{18} = \frac{16-15}{18} = \frac{1}{18}$.

Пример 6. Пресметај: а) $\frac{3}{8} + 2$, б) $\frac{11}{4} - 2$.

Решение. а) $\frac{3}{8} + 2 = \frac{3}{8} + \frac{2}{1} = \frac{3}{8} + \frac{2 \cdot 8}{1 \cdot 8} = \frac{3}{8} + \frac{16}{8} = \frac{19}{8}$.

б) $\frac{11}{4} - 2 = \frac{11}{4} - \frac{2}{1} = \frac{11}{4} - \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 4} = \frac{11}{4} - \frac{8}{4} = \frac{11-8}{4} = \frac{3}{4}$.

Знаеш дека собирањето броеви во множеството $\mathbb{N}_0$ има комутативно и асоцијативно својство. Во продолжение ќе видиме дека овие две својства ги има и собирањето дробки. Притоа, ако се земе предвид дека при собирањето дробки собирците ги претвораме во дробки со еднакви именители, доволно е наведените својства да ги покажеме за дробки со еднакви именители.

За секои природни броеви a, b, c, d , каде $d \neq 0$ важи

$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{b}{d} + \frac{a}{d}$, комутативно својство на собирањето,

$(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}) + \frac{c}{d} = \frac{a}{d} + (\frac{b}{d} + \frac{c}{d})$, асоцијативно својство на собирањето,

$\frac{a}{d} + 0 = 0 + \frac{a}{d} = \frac{a}{d}$, нулата е неутрален елемент на собирањето

(како собиок не влијае на вредноста на збирот).

Доказ. (за оние што сакаат да знаат повеќе). Ако искористиме дека комутативното и асоцијативното својство важат за собирањето во множеството $\mathbb{N}_0$ и дека во множеството $\mathbb{N}_0$ важи $a + 0 = a$, добиваме:

$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d} = \frac{b+a}{d} = \frac{b}{d} + \frac{a}{d}$,

$(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}) + \frac{c}{d} = \frac{a+b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{(a+b)+c}{d} = \frac{a+(b+c)}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b+c}{d} = \frac{a}{d} + (\frac{b}{d} + \frac{c}{d})$, и

$\frac{a}{d} + 0 = \frac{a+0}{d} = \frac{a}{d}$.

Применувајќи ги операциите собирање и одземање дробки, ние формираме *бројни изрази*. Со пресметувањата добиваме број кој е вредност на *бројниот израз*.

Да разгледаме неколку примери.

Пример 7. Пресметај ја вредноста на бројниот израз:

а) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{12}$, б) $\frac{7}{11} + (1\frac{2}{7} + \frac{4}{11})$.

Решение. а) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{12} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} - \frac{5}{12} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} - \frac{5}{12} = \frac{8+9}{12} - \frac{5}{12} = \frac{17}{12} - \frac{5}{12} = \frac{17-5}{12} = \frac{12}{12} = 1$.

б) Ако ги искористиме прво комутативното, а потоа асоцијативното својство, добиваме

$$\frac{7}{11} + (1\frac{2}{7} + \frac{4}{11}) = \frac{7}{11} + (\frac{4}{11} + 1\frac{2}{7}) = (\frac{7}{11} + \frac{4}{11}) + 1\frac{2}{7} = \frac{7+4}{11} + 1\frac{2}{7} = 1 + 1\frac{2}{7} = 1 + 1 + \frac{2}{7} = 2 + \frac{2}{7} = 2\frac{2}{7}.$$

Да се потсетиме дека во множеството $\mathbb{N}_0$ непознат собиок се пресметува така што од збирот се одзема познатиот собиок. Значи, ако $x + a = b$, тогаш $x = b - a$, при што $a \leq b$. Слично, непознат намаленик се пресметува така што разликата се собира со познатиот намалител, т.е. ако $x - a = b$, тогаш $x = b + a$. Понатаму, непознат намалител се пресметува така што од намаленикот се одземе разликата, т.е. ако $a - x = b$, тогаш $x = a - b$, при што $b \leq a$.

Споменатите постапки важат и за дробките. Ќе разгледаме неколку примери.

Пример 8. Реши ги равенките:

а) $x + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, б) $\frac{2}{3} + x = \frac{11}{6}$, в) $3 - x = 1\frac{1}{4}$, г) $x - \frac{7}{15} = \frac{1}{5}$.

Решение. Имаме:

$x + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$,	$\frac{2}{3} + x = \frac{11}{6}$,	$3 - x = 1\frac{1}{4}$,	$x - \frac{7}{15} = \frac{1}{5}$,
$x = \frac{5}{6} - \frac{1}{3}$,	$x = \frac{11}{6} - \frac{2}{3}$,	$x = 3 - 1\frac{1}{4}$,	$x = \frac{1}{5} + \frac{7}{15}$,
а) $x = \frac{5}{6} - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}$,	б) $x = \frac{11}{6} - \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2}$,	в) $x = \frac{3 \cdot 4}{4} - \frac{5}{4}$,	г) $x = \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{7}{15}$,
$x = \frac{5}{6} - \frac{2}{6}$,	$x = \frac{11}{6} - \frac{4}{6}$,	$x = \frac{12}{4} - \frac{5}{4}$,	$x = \frac{3}{15} + \frac{7}{15}$,
$x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.	$x = \frac{7}{6}$	$x = \frac{12-5}{4} = \frac{7}{4}$.	$x = \frac{3+7}{15} = \frac{2}{3}$.

Пример 9. Во саботата Илина решавала домашна по математика. Предпладне таа решила $\frac{1}{2}$ од задачите, а попладне решила уште $\frac{1}{3}$ од задачите. Колкав дел од задачите и останале да реши во неделата?

Решение. Ако со x го означиме делот од задачите кои треба да ги реши во неделата, добиваме $x + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1$. Тоа значи, $x + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 2} = 1$, од каде добиваме $x + \frac{5}{6} = 1$. Конечно, $x = 1 - \frac{5}{6}$, односно $x = \frac{1}{6}$.

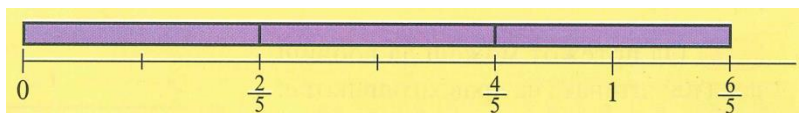
Значи, Илина во неделата треба да реши $\frac{1}{6}$ од домашната работа.

Задачи за вежби

163. Пресметај: а) $\frac{2}{19} + \frac{5}{19}$, б) $\frac{1}{9} + \frac{5}{12} + \frac{7}{15}$, в) $3\frac{3}{4} + 4\frac{7}{9}$, г) $\frac{1}{2} + 4 + 2\frac{1}{3}$.
164. На збирот на дробките $\frac{2}{7}$ и $\frac{13}{28}$ додај ја дробката $\frac{1}{4}$.
165. Еден тракторист првиот ден изорал $\frac{7}{12}$ од една нива, а вториот ден изорал $\frac{7}{18}$ од истата нива. Кој дел од нивата останал неизоран?
166. Пресметај: а) $\frac{8}{9} - \frac{5}{6}$, б) $\frac{8}{9} - (\frac{1}{6} + \frac{1}{4})$, в) $4\frac{7}{8} - 2\frac{1}{4}$, г) $12 - (2\frac{1}{3} + 5\frac{1}{2})$.
167. Збирот на два броја е $12\frac{1}{8}$. Едниот од нив е $3\frac{3}{4}$. Кој е другиот број?
168. Определи кој број треба да стои на местото на знакот * за да биде точно равенството $2\frac{1}{4} + \frac{3}{5} = * + 2\frac{1}{4}$? Кое својство го користеше?
169. Определи кој број треба да стои на местото на знакот * за да биде точно равенството $1\frac{4}{5} + (\frac{8}{9} + \frac{5}{6}) = (1\frac{4}{5} + *) + \frac{5}{6}$? Кое својство го користеше?
170. Користејќи ги комутативното и асоцијативното својство пресметај:
- а) $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} + 2\frac{1}{5}$, б) $\frac{7}{9} + \frac{11}{3} + \frac{5}{9}$, в) $\frac{4}{11} + \frac{5}{13} + \frac{7}{11} + \frac{8}{13} - 2$.
171. Пресметај: а) $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$, б) $\frac{8}{9} - (\frac{1}{4} + \frac{1}{6})$, в) $\frac{1}{9} + (\frac{1}{4} - \frac{1}{6})$.
172. Ерблина прочитала два раскази за $\frac{5}{6}$ часа. Првиот расказ го прочитала за $\frac{1}{4}$ часа. За колку време Ерблина го прочитала вториот расказ?
173. Реша ги равенките: а) $x + \frac{4}{15} = \frac{2}{3} + \frac{2}{5}$, б) $x - \frac{11}{12} = \frac{3}{4}$, в) $7\frac{1}{5} - x = 5\frac{1}{2}$.
174. Лента долга $23\frac{3}{10} m$ е пресечена на три дела. Првиот дел има $7\frac{1}{2} m$, вториот дел има $9\frac{3}{5} m$. Колку метри има третиот дел?

1.3.5 Множење дробки

Ивана имала три ленти со должина $\frac{2}{5} m$. Таа ги надоврзала лентите една по



друга и добила лента со должина $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$. Веројатно се сети дека како кај природните, така и кај целите броеви збирот на еднакви собирци кратко го запишуваме како производ. Така Ивана можела да запише $3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$.

Од собирањето на дробки со еднакви именители и множењето на природни броеви следува дека за секој природен број n и за секоја дробка $\frac{a}{b}$ важи

$$n \cdot \frac{a}{b} = \underbrace{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots + \frac{a}{b}}_{n \text{ пати}} = \frac{\overbrace{a+a+\dots+a}^{n \text{ пати}}}{b} = \frac{n \cdot a}{b}.$$

Природен број n со дробка $\frac{a}{b}$ се множи така што со n се множи броителот на дропката, а именителот останува непроменет, т.е. $n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{b}$.

Пример 1. Пресметај:

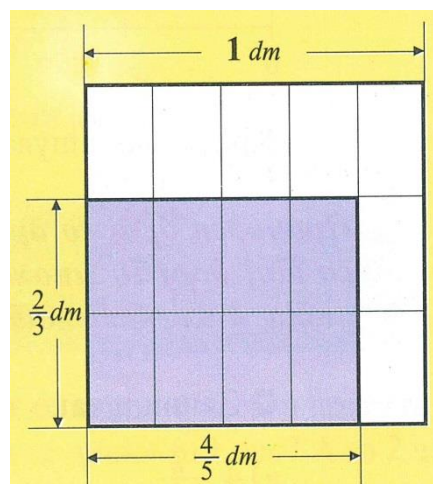
а) $4 \cdot \frac{3}{5}$, б) $12 \cdot \frac{5}{18}$, в) $15 \cdot \frac{3}{5}$, г) $12 \cdot 2\frac{3}{9}$.

Решение. Имаме:

а) $4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5}$, б) $12 \cdot \frac{5}{18} = \frac{12 \cdot 5}{18} = \frac{60}{18} = \frac{6 \cdot 10}{6 \cdot 3} = \frac{10}{3}$,

в) $15 \cdot \frac{3}{5} = \frac{15 \cdot 3}{5} = \frac{45}{5} = 9$, г) $12 \cdot 2\frac{3}{9} = 12 \cdot 2\frac{1}{3} = 12 \cdot \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} = 12 \cdot \frac{7}{3} = \frac{12 \cdot 7}{3} = \frac{84}{3} = 28$.

Да ја пресметаме плоштината на правоагоникот со страни $\frac{2}{3} dm$ и $\frac{4}{5} dm$. Правоаголникот да го поставиме во квадрат кој, како на цртежот, со три хоризонтални прави и пет вертикални прави е поделен на 15 мали правоаголници со еднакви плоштини. Како што може да видиме плоштината на нашиот правоаголник е $\frac{8}{15} dm^2$. Од друга страна ако ја употребиме формулата $P = a \cdot b$ за плоштина на правоаголник добиваме дека плоштината на правоаголникот е $(\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}) dm^2$. Оттука следува дека $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$.



На потполно ист начин може да се покаже дека во општ случај важи следново правило за множење на дропки.

Производ на две дропки е дробка, чиј броител е еднаков на производот на броителите, а именителот е еднаков на производот на именителите, т.е. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Пример 2. Пресметај: а) $\frac{5}{9} \cdot \frac{2}{3}$, б) $\frac{5}{3} \cdot \frac{6}{11}$, в) $\frac{5}{13} \cdot 4$, г) $5\frac{1}{4} \cdot 2\frac{2}{15}$.

Решение. а) $\frac{5}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{9 \cdot 3} = \frac{10}{27}$, б) $\frac{5}{3} \cdot \frac{6}{11} = \frac{5 \cdot 6}{3 \cdot 11} = \frac{5 \cdot 2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 11} = \frac{10}{11}$,

в) $\frac{5}{13} \cdot 4 = \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{1} = \frac{5 \cdot 4}{13 \cdot 1} = \frac{20}{13}$,

г) $5\frac{1}{4} \cdot 2\frac{2}{15} = \frac{5 \cdot 4 + 1}{4} \cdot \frac{2 \cdot 15 + 2}{15} = \frac{21}{4} \cdot \frac{32}{15} = \frac{21 \cdot 32}{4 \cdot 15} = \frac{\cancel{3} \cdot 7 \cdot \cancel{4} \cdot 8}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot 5} = \frac{56}{5} = 11\frac{1}{5}$.

Пример 3. Колкава е плоштината на соба, чија должина е $4\frac{2}{5} m$, а ширина е $3\frac{3}{4} m$?

Решение. Плоштината на собата е

$$P = 4\frac{2}{5} \cdot 3\frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 5 + 2}{5} \cdot \frac{3 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{22}{5} \cdot \frac{15}{4} = \frac{22 \cdot 15}{5 \cdot 4} = \frac{330}{20} = \frac{33}{2} = 16\frac{1}{2} m^2.$$

Знаеш дека множењето броеви во множеството $\mathbb{N}_0$ има комутативно и асоцијативно својство и дека множењето е дистрибутивно во однос на собирањето. Во продолжение ќе видиме дека овие својства важат и за операциите собирање и множење дропки.

За секои природни броеви a, b, c, d, e, f , каде $b, d, f \neq 0$ важи

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}, \text{ комутативно својство на множењето,}$$

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right), \text{ асоцијативно својство на множењето,}$$

$$\frac{a}{b} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}, \text{ единицата е неутрален елемент на множењето}$$

(како множител не влијае на вредноста на производот),

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}, \text{ дистрибутивност на множењето во однос на собирањето.}$$

Доказ. (за оние што сакаат да знаат повеќе). Ако искористиме дека комутативното и асоцијативното својство важат за множењето во множеството $\mathbb{N}_0$, дека множењето е дистрибутивно во однос на собирањето и дека во множеството $\mathbb{N}_0$ важи $a \cdot 1 = a$, добиваме:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{c \cdot a}{d \cdot b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b},$$

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{(a \cdot c) \cdot e}{(b \cdot d) \cdot f} = \frac{a \cdot (c \cdot e)}{b \cdot (d \cdot f)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c \cdot e}{d \cdot f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right), \text{ и}$$

$$\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a \cdot 1}{b} = \frac{a}{b}.$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) &= \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c \cdot f}{d \cdot f} + \frac{e \cdot d}{d \cdot f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c \cdot f + e \cdot d}{d \cdot f} = \frac{a \cdot (c \cdot f + e \cdot d)}{b \cdot d \cdot f} = \frac{a \cdot c \cdot f + a \cdot e \cdot d}{b \cdot d \cdot f} \\ &= \frac{a \cdot c \cdot f}{b \cdot d \cdot f} + \frac{a \cdot e \cdot d}{b \cdot d \cdot f} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} + \frac{a \cdot e}{b \cdot f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

Пример 4. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}\right) \cdot \frac{9}{4},$ б) $\left(\frac{11}{3} \cdot \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{18}{25}.$

Решение. а) Со примена на комутативното и асоцијативното својство добиваме

$$\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}\right) \cdot \frac{9}{4} = \left(\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{9}{4} = \frac{5}{7} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}\right) = \frac{5}{7} \cdot \frac{18}{12} = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{14}.$$

б) Имаме:

$$\left(\frac{11}{3} \cdot \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{18}{25} = \frac{11}{3} \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{18}{25}\right) = \frac{11}{3} \cdot \frac{90}{150} = \frac{11}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{33}{15} = \frac{11}{5}.$$

Пример 5. Пресметај на два начлина:

а) $(\frac{1}{2} + \frac{5}{6}) \cdot 6$, б) $(1\frac{1}{2} + \frac{3}{5}) \cdot \frac{10}{3}$.

Решение. а) Имаме

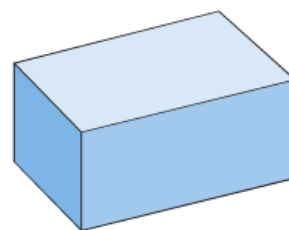
$$(\frac{1}{2} + \frac{5}{6}) \cdot 6 = (\frac{3}{6} + \frac{5}{6}) \cdot 6 = \frac{8}{6} \cdot 6 = \frac{48}{6} = 8 \text{ и } (\frac{1}{2} + \frac{5}{6}) \cdot 6 = \frac{1}{2} \cdot 6 + \frac{5}{6} \cdot 6 = \frac{6}{2} + \frac{30}{6} = 3 + 5 = 8.$$

б) Имаме:

$$(1\frac{1}{2} + \frac{3}{5}) \cdot \frac{10}{3} = (\frac{3}{2} + \frac{3}{5}) \cdot \frac{10}{3} = \frac{3 \cdot 5 + 3 \cdot 2}{2 \cdot 5} \cdot \frac{10}{3} = \frac{21}{10} \cdot \frac{10}{3} = \frac{21 \cdot 10}{10 \cdot 3} = 7 \text{ и}$$

$$(1\frac{1}{2} + \frac{3}{5}) \cdot \frac{10}{3} = (\frac{3}{2} + \frac{3}{5}) \cdot \frac{10}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{10}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{3} = \frac{3 \cdot 10}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 10}{5 \cdot 3} = 5 + 2 = 7.$$

Пример 6. Колку дециметри тел се потребни за да се направи модел на квадар со димензии $4\frac{1}{4} dm$, $\frac{5}{2} dm$ и $3\frac{1}{4} dm$. Дали се доволни $45\frac{1}{2} dm$ тел.



Решение. Ако должините на рабовите на квадарот се a, b и c , тогаш збирот на должините на сите 12 рабови на квадарот е $4 \cdot (a + b + c)$. Во нашиот случај имаме:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (a + b + c) &= 4 \cdot (4\frac{1}{4} + \frac{5}{2} + 3\frac{1}{4}) = 4 \cdot (\frac{17}{4} + \frac{5}{2} + \frac{13}{4}) = 4 \cdot (\frac{17+13}{4} + \frac{5}{2}) \\ &= 4 \cdot \frac{30}{4} + 4 \cdot \frac{5}{2} = 30 + 10 = 40 dm. \end{aligned}$$

Бидејќи $45\frac{1}{2} dm > 40 dm$, заклучуваме дека $45\frac{1}{2} dm$ тел се доволни за да се направи моделот.

Задачи за вежби

175. Пресметај:

а) $5 \cdot \frac{1}{8}$, б) $12 \cdot \frac{5}{6}$, в) $4 \cdot 3\frac{1}{9}$.

176. Пресметај:

а) $\frac{3}{7} \cdot \frac{11}{13}$, б) $\frac{7}{3} \cdot \frac{6}{11}$, в) $2\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{11}$, г) $3\frac{2}{5} \cdot 1\frac{1}{2}$.

177. Пресметај:

а) $(\frac{1}{3} + \frac{2}{9}) \cdot \frac{3}{15}$, б) $(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}) \cdot \frac{3}{15}$, в) $\frac{4}{9} \cdot \frac{27}{16} \cdot \frac{12}{15}$.

178. Пресметај ја плоштината на правоаголникот чии страни се со должини $3\frac{2}{5} cm$ и $4\frac{2}{5} cm$?

179. Енис купил пакување од $\frac{1}{2} l$ сок и испила $\frac{2}{5}$ од содржината. Колку сок останало?

180. Во едно одделение има 28 ученици. Од нив $\frac{3}{7}$ се девојчиња. Колку девојчиња и има во тоа одделение? А колку момчиња?

181. Определи кој број треба да стои на местото на знакот * за да биде точно равенството $2\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = * \cdot 2\frac{1}{4}$? Кое својство го користеше?
182. Определи кој број треба да стои на местото на знакот * за да биде точно равенството $1\frac{4}{5} \cdot (\frac{8}{9} \cdot \frac{5}{6}) = (1\frac{4}{5} \cdot *) \cdot \frac{5}{6}$? Кое својство го користеше?
183. Кој број треба да се запише на местото на знакот * за да биде точно равенството $1\frac{4}{5} \cdot \frac{8}{9} \cdot 0 \cdot \frac{5}{6} \cdot 13\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8} = 1\frac{4}{5} \cdot *$?
184. Пресметај ја на два начина вредноста на бројниот израз:
 а) $(\frac{11}{2} + \frac{4}{3}) \cdot \frac{6}{5}$, б) $1\frac{4}{5} \cdot (\frac{8}{9} + \frac{5}{6})$, в) $4\frac{1}{2} \cdot (1\frac{8}{9} + 3\frac{1}{6})$.
185. Масата на една железна прачка долга 1 m е еднаква на $7\frac{2}{3}\text{ kg}$. Колава е масата на иста такава железна прачка со должина $4\frac{1}{5}\text{ m}$
186. Во едно одделение има 32 ученици. Од нив $\frac{5}{8}$ се занимаваат со спорт, а $\frac{2}{5}$ од спортистите се кошаркари. Колу ученици се кошаркари?
187. Пресметај го производот на три броја, ако првиот е $3\frac{2}{3}$, вториот е $1\frac{1}{3}$ и третиот е за $2\frac{2}{3}$ поголем од првиот број.
188. Пресметај го производот на бројот $3\frac{1}{5}$ и збирот на броевите $1\frac{2}{3}$ и $3\frac{1}{8}$.
189. Пресметај го производот од збирот и разликата на броевите $3\frac{1}{5}$ и $2\frac{1}{8}$.

1.3.6 Реципрочна дробка. Делење дробки, двојни дробки

Како што знаеме во множеството природни броеви од производот $x \cdot y = 1$ следува дека $x = y = 1$. Меѓутоа во множеството дробки постојат броеви кои не се еднакви на 1, а чиј производ е еднаков на 1, што може да се види од следниов пример.

Пример 1. а) За броевите 5 и $\frac{1}{5}$ важи $5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5 \cdot 1}{1 \cdot 5} = 1$.

б) За броевите $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$ важи $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 1$.

За бројот y велиме дека е *реципрочен* на бројот x ($x \neq 0$), ако $x \cdot y = 1$.

Ако $x \cdot y = 1$, тогаш $y \cdot x = 1$, што значи дека бројот x е реципрочен на бројот y . Затоа велиме дека броевите x и y се *заемно реципрочни*.

Бројот $n \in \mathbb{N}$ и дробката $\frac{1}{n}$ се заемно реципрочни броеви бидејќи $n \cdot \frac{1}{n} = \frac{n \cdot 1}{n} = 1$.

Дропките $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ ($a, b \in \mathbb{N}$) се заемно реципрочни бидејќи $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1$.

Пример 2. Определи ги реципрочните броеви на броевите:

- а) 13, б) $\frac{3}{11}$, в) $4\frac{1}{3}$.

Решение. а) Бројот $\frac{1}{13}$ е реципрочен на бројот 13.

б) Бројот $\frac{11}{3}$ е реципрочен на бројот $\frac{3}{11}$.

в) Бидејќи $4\frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{13}{3}$, добиваме дека бројот $\frac{3}{13}$ е реципрочен на бројот $4\frac{1}{3}$.

Делењето на дропките има исто значење како и делењето во множеството $\mathbb{N}_0$. Значи треба за дадени производ x и еден множител y да се определи другиот множител z . Како и кај природните броеви ја имаме следнава дефиниција.

Ако за дропките x, y, z важи $x = y \cdot z$, тогаш пишуваме $x : y = z$, при што дропката x ја нарекуваме *деленик*, дропката y *делител* и дропката z *количник*.

Пример 3. Подели ја дропката $\frac{1}{3}$ со дропката $\frac{4}{5}$.

Решение. Треба да определиме дропка $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}$) таква што $\frac{1}{3} : \frac{4}{5} = \frac{a}{b}$. Од претходната дефиниција следува дека $\frac{1}{3} = \frac{a}{b} \cdot \frac{4}{5}$.

Од дефиницијата на заемно реципрочни дропки и асоцијативното својство на множењето дропки добиваме

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4}\right) \cdot \frac{4}{5}.$$

Од последното равенство заклучуваме дека $\frac{a}{b} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4}$.

Во пример 3 количникот на дропките $\frac{1}{3}$ и $\frac{4}{5}$ го определивме така што деленикот $\frac{1}{3}$ го помноживме со реципрочната вредност на делителот, т.е. со бројот $\frac{5}{4}$. На потполно идентичен начин се покажува дека ова правило важи за делење на било кои две дропки.

Дропка делиме со дропка така што деленикот го множиме со реципрочната дропка на делителот, т.е. за секои дропки $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ ($c \neq 0$) важи $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Нека е дадена дропката $\frac{a}{b}$ и нека $n \in \mathbb{N}$. Тогаш $\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b} : \frac{n}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{n} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot n} = \frac{a}{b \cdot n}$. Значи, дропка делиме со природен број така што именителот на дропката го множиме со тој број, а броителот на дропката останува непроменет.

Пример 4. Пресметај: а) $\frac{5}{7} : 4$, б) $\frac{3}{7} : \frac{5}{3}$, в) $1\frac{2}{5} : \frac{5}{3}$, г) $2\frac{1}{4} : 3\frac{1}{2}$.

Решение. а) $\frac{5}{7} : 4 = \frac{5}{7 \cdot 4} = \frac{5}{28}$,

б) $\frac{3}{7} : \frac{5}{3} = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{9}{35}$,

в) $1\frac{2}{5} : \frac{5}{3} = \frac{5+2}{5} : \frac{5}{3} = \frac{7}{5} : \frac{5}{3} = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{21}{25}$

г) $2\frac{1}{4} : 3\frac{1}{2} = \frac{9}{4} : \frac{7}{2} = \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{7} = \frac{9 \cdot 2}{4 \cdot 7} = \frac{9 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 7} = \frac{9}{14}$.

Пример 5. Пресметај: а) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$ и $\frac{2}{3} : \frac{1}{2}$, б) $(\frac{1}{2} : \frac{2}{3}) : \frac{3}{5}$ и $\frac{1}{2} : (\frac{2}{3} : \frac{3}{5})$.

Решение. а) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$ и $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{3}$.

б) $(\frac{1}{2} : \frac{2}{3}) : \frac{3}{5} = (\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}) : \frac{3}{5} = \frac{3}{4} : \frac{3}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{4}$ и $\frac{1}{2} : (\frac{2}{3} : \frac{3}{5}) = \frac{1}{2} : (\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3}) = \frac{1}{2} : \frac{10}{9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{20}$.

Во примерот 5 видовме дека $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} \neq \frac{2}{3} : \frac{1}{2}$ и $(\frac{1}{2} : \frac{2}{3}) : \frac{3}{5} \neq \frac{1}{2} : (\frac{2}{3} : \frac{3}{5})$, што значи дека за операцијата делење дробки *не важат комутативното и асоцијативното својство*. Меѓутоа важи следново својство.

Нека се дадени дробките $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ и $\frac{e}{f}$ ($e \neq 0$). Тогаш

$$(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) : \frac{e}{f} = (\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) \cdot \frac{f}{e} = \frac{a}{b} \cdot \frac{f}{e} + \frac{c}{d} \cdot \frac{f}{e} = \frac{a}{b} : \frac{e}{f} + \frac{c}{d} : \frac{e}{f}.$$

Ова својство се вика *дистрибутивно својство од десно* на делењето во однос на собирањето дробки.

Пример 6. Пресметај на два начина: $(\frac{1}{2} + \frac{4}{7}) : \frac{3}{14}$.

Решение. Имаме:

$$(\frac{1}{2} + \frac{4}{7}) : \frac{3}{14} = \frac{1}{2} : \frac{3}{14} + \frac{4}{7} : \frac{3}{14} = \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{3} + \frac{4}{7} \cdot \frac{14}{3} = \frac{7}{3} + \frac{8}{3} = \frac{15}{3} = 5 \text{ и}$$

$$(\frac{1}{2} + \frac{4}{7}) : \frac{3}{14} = \frac{7+4 \cdot 2}{2 \cdot 7} : \frac{3}{14} = \frac{15}{14} : \frac{3}{14} = \frac{15}{14} \cdot \frac{14}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

Пример 7. Плоштината на еден правоаголник е $13\frac{1}{3} \text{ cm}^2$, а должината е $3\frac{1}{5} \text{ cm}$.
Опреди ја неговата ширина.

Решение. Ширината на правоаголникот ја добиваме ако плоштината ја поделиме со должината. Имаме

$$13\frac{1}{3} : 3\frac{1}{5} = \frac{13 \cdot 3 + 1}{3} : \frac{3 \cdot 5 + 1}{5} = \frac{40}{3} : \frac{16}{5} = \frac{40}{3} \cdot \frac{5}{16} = \frac{200}{48} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6} \text{ cm}.$$

Како што знаеме количникот на два природни броја го запишуваме како дробка. Слично и количниците $\frac{1}{2} : 5$, $7 : \frac{3}{4}$, $\frac{2}{5} : \frac{3}{7}$ можеме да ги запишеме како дробки. Имаме

$$\frac{1}{2} : 5 = \frac{\frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{10}, \quad 7 : \frac{3}{4} = \frac{7}{\frac{3}{4}} = \frac{28}{3}, \quad \frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}} = \frac{14}{15}.$$

Овие и слични примери се причина за воведувањето на таканаречените двојни дробки.

Нека $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, ($c \neq 0$) се дробки. Записот $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ го нарекуваме *двојна дробка*. Броевите a и d ги нарекуваме *надворешни членови*, броевите b и c ги нарекуваме *внатрешни членови* на двојната дробка, а дробната црта меѓу дробките $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ ја нарекуваме *главна дробна црта*.

Имаме:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Вредноста на двојната дробка е еднаква на дробката чиј броител е еднаков на производот на надворешните членови на двојната дробка, а именителот е еднаков на производот на нејзините внатрешни членови.



Пример 8. Претвори ја двојната дробка во обична дробка:

а) $\frac{7}{\frac{3}{5}}$, б) $\frac{\frac{3}{2}}{12}$ в) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{5}}$ г) $\frac{1\frac{1}{3}}{2\frac{2}{5}}$.

Решение. а) $\frac{7}{\frac{3}{5}} = \frac{7}{\frac{3}{5}} = \frac{7 \cdot 5}{3 \cdot 1} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$, б) $\frac{\frac{3}{2}}{12} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{12}{1}} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 12} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$,

в) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{5}} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 4} = \frac{15}{28}$ г) $\frac{1\frac{1}{3}}{2\frac{2}{5}} = \frac{\frac{3+1}{3}}{\frac{2 \cdot 5 + 2}{5}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{12}{5}} = \frac{4 \cdot 5}{12 \cdot 3} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

Задачи за вежби

190. Запиши ги реципрочните броеви на броевите:

а) $\frac{43}{12}$, б) $2\frac{3}{7}$, в) $\frac{1}{121}$, г) 13.

191. Пресметај:

а) $\frac{7}{3} : 5$, б) $11 : \frac{4}{3}$, в) $\frac{2}{5} : 1\frac{4}{13}$, г) $5\frac{4}{5} : 2\frac{1}{2}$.

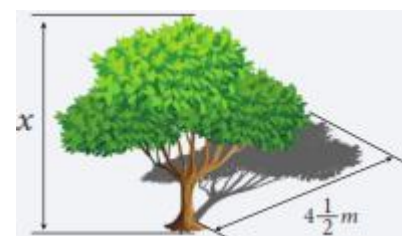
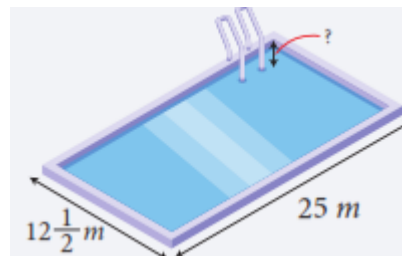
192. Пресметај:

а) $\frac{\frac{5}{6} - \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{2}{3}}$, б) $\frac{2\frac{1}{4} + 1\frac{1}{3}}{1\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}}$, в) $\frac{1\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3}}{3\frac{3}{4} + \frac{2}{3}}$, г) $\frac{4\frac{1}{4} : 5\frac{2}{3} \cdot 2}{4\frac{1}{3}}$

193. Пресметај: а) $(\frac{4}{5} + (2\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4})) : \frac{3}{5}$, б) $(\frac{1}{5} : (1\frac{1}{2} - \frac{3}{4})) : (\frac{3}{5} \cdot (1\frac{1}{2} + \frac{3}{4}))$

194. Спореди го количникот на броевите $\frac{4}{3}$ и $\frac{2}{7}$ со нивниот збир.

195. Збирот на броевите $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{6}$ подели го со нивниот производ.
196. Плоштината на еден правоаголник е $14\frac{2}{7} \text{ cm}^2$, а должината е $3\frac{1}{3} \text{ cm}$. Определи ја неговата ширина.
197. Збирот на броевите $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{6}$ подели го со нивниот производ.
198. Разликата на броевите $2\frac{2}{3}$ и $1\frac{1}{4}$ подели ја со нивниот збир.
199. Училишниот базен собира 562500 литри вода. Должината на базенот е 25 m, а неговата ширина е $12\frac{1}{2} \text{ m}$. Колкава е длабочната на базенот?
200. Во еден сончев ден Александар забеле-жал дека неговата сенка е $\frac{3}{4}$ од неговата висина. Во тој момент сенката на дрвото била долга $4\frac{1}{2} \text{ m}$. Колку било високо др-вото?



1.3.7 Равенки со множење и делење дробки

Нека a и b се дадени броеви, а x е непознат број. При усвојувањето на целите броеви видовме дека определувањето на непознатиот множител, деленик и делител може да се направи на следниве начини:

- ако $x \cdot a = b$, тогаш $x = b : a$,
- ако $x : a = b$ ($a \neq 0$), тогаш $x = b \cdot a$,
- ако $a : x = b$ ($b \neq 0$), тогаш $x = a : b$.

Од дефиницијата на делењето на дробки следува дека овие правила важат и за дробките. Ќе разгледаме неколку примери.

Пример 1. Определи го бројот кој помножен со $2\frac{1}{2}$ дава производ 12.

Решение. Нека бараниот број е x . Од условот следува равенката $2\frac{1}{2} \cdot x = 12$. Значи, $x = 12 : 2\frac{1}{2}$, од каде добиваме $x = 12 : \frac{2 \cdot 2 + 1}{2} = 12 : \frac{5}{2} = 12 \cdot \frac{2}{5} = \frac{24}{5}$. Значи, $x = 4\frac{4}{5}$.

Проверка: $2\frac{1}{2} \cdot 4\frac{4}{5} = \frac{5}{2} \cdot \frac{24}{5} = 12$.

Пример 2. Реши ја равенката $x : \frac{3}{4} = 5\frac{2}{5}$.

Решение. Од дадената равенка следува $x = 5\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$, од каде добиваме $x = \frac{5 \cdot 5 + 2}{5} \cdot \frac{3}{4}$, односно $x = \frac{27}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{81}{20}$.

Проверка: $\frac{81}{20} : \frac{3}{4} = \frac{81}{20} \cdot \frac{4}{3} = \frac{\cancel{3} \cdot 27 \cdot \cancel{4}}{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3}} = \frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$.

Пример 3. Со кој број треба да се подели бројот $\frac{6}{5}$ за да се добие бројот $\frac{33}{25}$.

Решение. Нека бараниот број е x . Од условот следува равенката $\frac{6}{5} : x = \frac{33}{25}$. Значи, $x = \frac{6}{5} : \frac{33}{25}$, па затоа $x = \frac{6}{5} \cdot \frac{25}{33} = \frac{10}{11}$.

Проверка: $\frac{6}{5} : \frac{10}{11} = \frac{6}{5} \cdot \frac{11}{10} = \frac{66}{50} = \frac{33}{25}$.

Пример 4. Кој број треба да се собере со $\frac{1}{4}$ за да при делење на добиениот збир со $\frac{2}{5}$ се добие бројот 5.

Решение. Нека бараниот број е x . Од условот следува равенката $(x + \frac{1}{4}) : \frac{2}{5} = 5$. Значи, $x + \frac{1}{4} = 5 \cdot \frac{2}{5}$, од каде добиваме $x + \frac{1}{4} = 2$. Конечно, $x = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$.

Проверка: $(\frac{7}{4} + \frac{1}{4}) : \frac{2}{5} = 2 : \frac{2}{5} = 2 \cdot \frac{5}{2} = 5$.

Задачи за вежби

201. Реша ги равенките:

а) $x : \frac{11}{2} = 1\frac{3}{5}$, б) $\frac{3}{5} : x = \frac{12}{125}$, в) $\frac{4}{7} \cdot x = 3\frac{3}{5}$.

202. Реша ги равенките:

а) $4 \cdot x - \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4}) = 5\frac{1}{4}$, б) $\frac{1}{2} - \frac{2}{5} \cdot x = \frac{1}{4}$, в) $2 : x + \frac{2}{5} = 1\frac{3}{5}$.

203. Реша ги равенките:

а) $(3 + \frac{1}{4} : \frac{7}{8}) : x = 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5}$, б) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot (3 \cdot x - \frac{11}{15}) = \frac{3}{2}$.

204. Кој број треба да се помножи со $\frac{3}{7}$ за да се добие бројот $8\frac{3}{7}$?

205. Ако на $\frac{3}{14}$ од еден број му се додаде 50 ќе се добие $\frac{2}{5}$ од бројот 185. Кој е тој број?

206. Количество од $630\frac{1}{2} \text{ kg}$ брашно е поделено на определен број социјално загро-
зени семејства. Секое семејство добило по $48\frac{1}{2} \text{ kg}$ брашно. Определи го бројот
на семејствата.

207. Бојана и Ангела заедно купиле една книга. За $\frac{3}{8}$ од цената на книгата Бојана
дала 90 денари. Колку пари дала Ангела? Колку чини книгата?

208. Во една канта со волумен 5 l има $3\frac{1}{2}\text{ l}$ вода. За да ја наполни кантата, Марија пет пати со помал сад дотурала вода во кантата. Ако помалиот сад при секое дотурање бил полн, колку е неговиот волумен?
209. Аднан се подготвува за писмена работа по математика. Кога решил $\frac{5}{9}$ од предвидениот број задачи, му останале уште 24 задачи. Колку задачи вкупно требало да реши Аднан?
210. Дедо Аврам купил три торби со јапонски јаболка и пет торби со обични јаболка. Тој вкупно купил 56 kg јаболка. Масата на секоја торба јапонски јаболка била $6\frac{1}{2}\text{ kg}$. Сите торби со обични јаболка имаат еднакви маси. Колку е масата на една торба со обични јаболка?
211. Ако треба да реши определен број задачи. Првиот ден решил $\frac{1}{3}$ од сите задачи. Вториот ден решил $\frac{1}{3}$ од остатокот, а третиот ден решил $\frac{1}{3}$ од новиот остаток. Потоа му останале 32 задачи. Колку вкупно задачи требало да реши Ако?



1.3.8 Поим за децимален број. Основни својства

Да се потсетиме, дека за единиците мерки за должина важи:

$$1\text{ m} = 10\text{ dm}, 1\text{ m} = 100\text{ cm} \text{ и } 1\text{ m} = 1000\text{ mm} \text{ итн.}$$

односно

$$1\text{ dm} = \frac{1}{10}\text{ m}, 1\text{ cm} = \frac{1}{100}\text{ m}, 1\text{ mm} = \frac{1}{1000}\text{ m} \text{ итн.}$$

Исто така, за единиците за маса важи:

$$1\text{ kg} = 10\text{ hg}, 1\text{ kg} = 100\text{ dag}, 1\text{ kg} = 1000\text{ g} \text{ итн.}$$

односно

$$1\text{ hg} = \frac{1}{10}\text{ kg}, 1\text{ dag} = \frac{1}{100}\text{ kg}, 1\text{ g} = \frac{1}{1000}\text{ kg} \text{ итн.}$$

Како што можеме да видиме именителите на дропките со кои се дадени врските меѓу одделните единици за должина, но и врските меѓу одделните единици за маса се декадните единици 10, 100, 1000 итн. Овие дропки имаат посебна улога во математиката и се наречени децимални дропки. Така ја имаме следнава дефиниција.

Дропките чии именители се декадните единици 10, 100, 1000, 10000 итн. ги нарекуваме *децимални дропки*.

Пример 1. а) Следниве дропки $\frac{4}{10}$, $\frac{217}{10}$, $\frac{53}{100}$, $\frac{2025}{1000}$, $\frac{13}{10000}$ се децимални.

б) Имаме

$$\frac{46}{10} = \frac{40+6}{10} = \frac{40}{10} + \frac{6}{10} = 4 + \frac{6}{10} = 4\frac{6}{10},$$

$$\frac{217}{10} = \frac{210+7}{10} = \frac{210}{10} + \frac{7}{10} = 21 + \frac{7}{10} = 21\frac{7}{10},$$

$$\frac{53}{100} = \frac{50+3}{100} = \frac{50}{100} + \frac{3}{100} = \frac{5}{10} + \frac{3}{100},$$

$$\frac{2025}{1000} = \frac{2000+20+5}{1000} = \frac{2000}{1000} + \frac{20}{1000} + \frac{5}{1000} = 2 + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}.$$

Во пример 1 видовме дека децималната дробка $\frac{46}{10}$ можеме да ја запишеме како $4\frac{6}{10}$. Но, овој запис е долг и непрактичен. Затоа во математиката е прифатен многу пократок и поедноставен начин на запишување на децималните дробки. Така, наместо $4\frac{6}{10}$ пишуваме **4,6** и читаме *четири цели и шест десетини*. Ваквиот запис го нарекуваме децимален запис, запирката меѓу броевите цифрите 4 и 6 ја нарекуваме *децимална запирка*, а бројот 4,6 *децимален број*. Според тоа, $\frac{46}{10} = 4,6$.

Пример 2. а) Имаме $\frac{49}{100} = \frac{40+9}{100} = \frac{40}{100} + \frac{9}{100} = \frac{4}{10} + \frac{9}{100}$. Значи дробката $\frac{49}{100}$ содржи 4 десетинки и 9 стотинки, т.е. 49 стотинки. Оваа дробка се запишува како 0,49 и се чита 0 цели и 49 стотинки.

б) Дробката $\frac{217}{10} = 21 + \frac{7}{10}$ содржи 21 цели и 7 десетинки. Таа се запишува како 21,7 и се чита 21 цели и 7 десетинки.

в) Дробката $\frac{217}{100} = 2 + \frac{17}{100}$ содржи 2 цели и 17 стотинки. Таа се запишува како 2,17 и се чита 2 цели и 17 стотинки.

Запишувањето на децимална дробка како децимален број го правиме на следниов начин:

- прво ги запишуваме целите,
- се запишува децималната запирка,
- се запишува броителот на децималната дробка, ако тој има толку цифри колку што има нули во именителот,
- ако броителот има помалку цифри од нули во именителот, тогаш пред него се додава потребниот број нули за да има цифри колку и нули во именителот и така добиената низа цифри се запишува по децималната запирка.

Пример 3. Запиши ги како децимални броеви следниве децимални дробки:

$$\frac{22}{100}, 3\frac{14}{100}, 2\frac{25}{1000}, 11\frac{3}{10000}.$$

Решение. Ако се искористи горното правило, добиваме

$$\frac{22}{100} = 0,22, \quad 3\frac{14}{100} = 3,14, \quad 2\frac{25}{1000} = 2,025, \quad 11\frac{3}{10000} = 11,0003.$$

Како што можеме да забележиме секој децимален број се состои од два дела и тоа бројот кој е запишан пред децималната запирка и кој го нарекуваме *цел дел* и низата цифри која е по децималната запирка и која ја нарекуваме *децимален (дробен) дел*. Притоа првата цифра во дробниот дел го означува бројот на *десетинките*, втората бројот на *стотинките*, третата бројот на илјадитинките итн.



Запишувањето на децималните броеви нагледно е прикажано во следнава табела, во која е запишан бројот 159,0231.

КЛАСА ИЛЈАДИ			КЛАСА ЕДИНИЦИ		
СИ	ДИ	ЕИ	С	Д	Е
			1	5	9

,

ДЕСЕТИНКИ	СТОТИНКИ	ИЛЈАДИНКИ	ДЕСЕТ-ИЛЈАДИНКИ	СТО-ИЛЈАДИНКИ	МИЛИОНИНКИ
0	2	3	1		

Пример 4. а) Должината на отсечката AB е еднаква на 342 mm . Колку дециметри е долга отсечката AB ?

б) Масата на една златна прачка е 1245 g . Колку килограми е нејзината маса?

Решение. а) Имаме, $342\text{ mm} = 300\text{ mm} + 42\text{ mm} = 3\text{ dm} + \frac{42}{100}\text{ dm} = 3,42\text{ dm}$.

б) Имаме, $1245\text{ g} = 1000\text{ g} + 245\text{ g} = 1\text{ kg} + \frac{245}{1000}\text{ kg} = 1,245\text{ kg}$.

Пример 5. Запиши го децималниот број

а) 5,17

б) 1,0011

в) 0,013.

како децимална дробка.

Решение. а) Дадениот број е 5 цели и 17 стотинки, па затоа $5,17 = 5 + \frac{17}{100} = 5\frac{17}{100}$.

б) Дадениот број е 1 цело и 11 десетилјадитинки, па затоа $1,0011 = 1 + \frac{11}{10000} = 1\frac{11}{10000}$.

в) Дадениот број е 0 цели и 13 илјадитинки, па затоа $0,013 = 0 + \frac{13}{1000} = \frac{13}{1000}$.

Запишувањето на децимален број како децимална дробка го правиме на следниов начин:

- целите на децималниот број ги запишуваме како цели на дробката,
- децималниот дел се запишува како броител на децималната дробка,
- именителот на децималната дробка е декадна единица со толку нули колку што има децимали.

Пример 6. Ако дробката $\frac{5}{10}$ последователно ја прошируваме со бројот 10, добиваме

$$\frac{5}{10} = \frac{50}{100} = \frac{500}{1000} = \frac{5000}{10000} = \dots$$

Добиените децимални дробки ги запишуваме како децимални броеви и добиваме

$$0,5 = 0,50 = 0,500 = 0,5000 = \dots$$

Постапката од пример 6 важи за секој децимален број, што значи дека:

Децималниот број не се менува, ако по последната децимала му се допише нула.

Пример 7. Ако дробката $\frac{1200}{1000}$ последователно ја кратиме со бројот 10, добиваме

$$\frac{1200}{1000} = \frac{120}{100} = \frac{12}{10}.$$

Добиените децимални дробки ги запишуваме како децимални броеви и добиваме

$$1,200 = 1,20 = 1,2.$$

Постапката од пример 7 важи за секој децимален број чија последна децимала е 0, што значи дека:

Ако последната децимала на некој децимален број е 0, со нејзиното испуштање бројот не се менува.

Пример 8. Бројот 2 го запишуваме како децимална дробка на следниве начини:

$$2 = \frac{20}{10} = \frac{200}{100} = \frac{2000}{1000} = \dots,$$

па затоа $2 = 2,0 = 2,00 = 2,000 = \dots$

Постапката од пример 8 важи за секој природен број, што значи дека:

Секој природен број може да се запише како децимален број, така што по него се запишува децималната запирка и во децималниот дел запишуваме произволен број нули.

Задачи за вежби

212. Кои од следниве дробки се децимални дробки:

а) $\frac{121}{10}$, б) $\frac{12}{30}$, в) $\frac{77}{100}$, г) $\frac{13}{101}$, д) $\frac{99}{10000}$.

213. Прочитај ги децималните броеви:

а) 2,132, б) 0,1234, в) 12,21, г) 2,003, д) 0,0032.

214. Запиши ги децималните дробки како децимални броеви:

а) $\frac{127}{10}$, б) $2\frac{12}{100}$, в) $7\frac{77}{100}$, г) $4\frac{13}{1000}$, д) $1\frac{99}{10000}$.

215. Запиши ги децималните броеви како децимални дробки:

а) 2,12, б) 0,24, в) 12,211, г) 2,003, д) 1,0032.

216. Броевите:

а) 1,1100 б) 0,1 в) 2,11 г) 121,1210 д) 14

запиши ги така што ќе имаат по три децимали.

217. Дали ќе се промени вредноста на бројот 1,1012 ако се изостави нулата и се запише бројот 1,112?

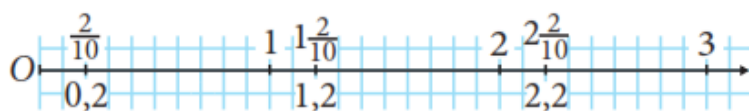
218. Во децималниот број:

а) 0,20100 б) 2,10000 в) 0,2000 г) 1,201000 д) 21,10001

изостави ги сите нули, така што бројот нема да ја промени вредноста.

1.3.9 Претставување децимален број на бројна полуправа. Споредување децимални броеви

Децималните броеви ги претставуваме на бројната полуправа на ист начин како и дробките. На пример, децималниот број 0,2 го запишуваме како децимална дробка $0,2 = \frac{2}{10}$. Растојанието од 0 до 1 го делиме на 10 еднакви делови и децималниот број 0,2 го придружуваме на точката која го означува вториот дел. Претставувањето на децималниот број 0,2, како и претставувањата на децималните броеви 1,2 и 2,2 на бројната полуправа се прикажани на цртежот.



Пример 1. На бројната полуправа се прикажани точките А, В и С. Определи го децималниот број кој е придружен на секоја од овие точки.



Решение. Помеѓу точката О и точката А има 7 еднакви делови, што значи дека на точката А е придружен децималниот број 0,7. Слично, на точките В и С соодветно се придружени броевите 1,8 и 2,9.

Како што знаеме, $0,1 = 0,10$; $0,01 = 0,010$; $0,001 = 0,0010$ итн. Според тоа, 1 десетинка има 10 стотинки, 1 стотинка има 10 илјадитинки, 1 илјадитинка има 10 десетилјадитинки итн. Општо, точно е тврдењето.

Позиционата вредност на секоја цифра во децималниот дел е 10 пати поголема од позиционата вредност на цифрата која е одма зад неа.

Пример 2. Знаеме дека

$$2547 \text{ g} > 1547 \text{ g}, \quad 2547 \text{ g} > 2499 \text{ g}, \quad 2547 \text{ g} > 2538 \text{ g}, \quad 2547 \text{ g} > 2546 \text{ g}.$$

Ако овие маси ги претвориме во килограми добиваме

$$2,547 \text{ kg} > 1,547 \text{ kg}, \quad 2,547 \text{ kg} > 2,499 \text{ kg}, \quad 2,547 \text{ kg} > 2,538 \text{ kg}, \quad 2,547 \text{ kg} > 2,546 \text{ kg}.$$

Тоа значи дека

$$2,547 > 1,547; \quad 2,547 > 2,499; \quad 2,547 > 2,538; \quad 2,547 > 2,546.$$

Претходниот пример, но и сличните примери со мерните единици за должина, плоштина или волумен покажуваат дека споредувањето на децималните броеви го правиме според следново правило.

- 1) Од два децимални броја поголем е бројот кој има поголем цел дел.
- 2) Ако децималните броеви имаат еднакви цели делови, тогаш поголем е бројот кој што има поголема прва децимала (десетинка). Ако и десетинките се еднакви, тогаш поголем е бројот кој што има поголема втора децимала (стотинка), итн.

Пример 3. Спореди ги броевите:

- а) 5,33 и 5,42 б) 52,12 и 52,11 в) 0,199 и 0,198

Решение. а) Броевите имаат еднакви цели делови, но бидејќи за цифрите на првите децимали важи $3 < 4$ заклучуваме дека $5,33 < 5,42$.

б) Броевите имаат еднакви цели делови, како и еднакви први децимали, но бидејќи за цифрите на вторите децимали важи $2 > 1$ заклучуваме дека $52,12 > 52,11$.

в) Броевите имаат еднакви цели делови, еднакви први децимали и еднакви втори децимали, но бидејќи за цифрите на третите децимали важи $9 > 8$ заклучуваме дека $0,199 > 0,198$.

Пример 4. Спореди:

- а) 2,123 kg и 213,4 dag , б) 12,125 m и 1254,3 cm .

Решение. а) Имаме

$$213,4 \text{ dag} = 2134 \text{ g} = \frac{2134}{1000} \text{ kg} = 2,134 \text{ kg} .$$

Сега, бидејќи $2,123 \text{ kg} < 2,134 \text{ kg}$, заклучуваме дека $2,123 \text{ kg} < 213,4 \text{ dag}$.

б) Имаме $1254,3 \text{ cm} = 12543 \text{ mm} = \frac{12543}{1000} \text{ m} = 12,543 \text{ m}$. Сега, од $12,125 \text{ m} < 12,543 \text{ m}$ следува дека $12,125 \text{ m} < 1254,3 \text{ cm}$.

Пример 5. Подреди ги по големина, почнувајќи од најмалиот, децималните броеви:

$$a = 4,202; \quad b = 4,022; \quad c = 4,2220; \quad d = 4,2222 .$$

Решение. Бидејќи првата децимала на бројот 4,202 е поголема од првата децимала на бројот 4,022 заклучуваме дека $4,022 < 4,202$, односно $b < a$.

Бидејќи втората децимала на бројот 4,2220 е поголема од втората децимала на бројот 4,202 заклучуваме дека $4,202 < 4,2220$, односно $a < c$.

Бидејќи четвртата децимала на бројот 4,2222 е поголема од четвртата децимала на бројот 4,2220 заклучуваме дека $4,2220 < 4,2222$, односно $c < d$.

Значи, $b < a < c < d$, односно $4,022 < 4,202 < 4,2220 < 4,2222$.

Задачи за вежби

219. Претстави ги на бројната права децималните броеви 0,5; 1,4; 2,7 и 3,40.

220. Спореди ги броевите

- а) 2,03 и 1,99 б) 6,98 и 6,899 в) 19,321 и 19,319 г) 0,108 и 0,1079.
221. Подреди ги по големина децималните броеви:
 $a = 11,101$; $b = 11,011$; $c = 10,9999$; $d = 10,9989$.
222. Кои цифри може да се стават на местото на знакот * за да важи:
 а) $7,59^* < 7,592$ б) $0,83^* 4 < 0,8335$.
223. Подреди ги по големина децималните броеви:
 а) 555,5 g; 0,55 kg; 0,0000 t, б) $44,4 \text{ cm}^2$; 4400 mm^2 ; $0,45 \text{ dm}^2$.

1.3.10 Собирање и одземање децимални броеви

Децималните броеви се дробки чии именители се декадните единици. Претходно научивме како да собираме дробки, што значи дека знаеме да собираме и децимални броеви. Меѓутоа децималните броеви може да се собираат и поедноставно, односно слично на природните броеви. Да разгледаме еден пример.

Пример 1. Пресметај:

- а) $3,12 + 1,17$, б) $1,24 + 0,25$, в) $1,231 + 7,12$.

Решение. Бараните збирови ќе ги определиме запишувајќи ги собираците како децимални дробки. Добиваме:

- а) $3,12 + 1,17 = \frac{312}{100} + \frac{117}{100} = \frac{429}{100} = 4,29$,
 б) $1,24 + 0,25 = \frac{124}{100} + \frac{25}{100} = \frac{149}{100} = 1,49$, и
 в) $1,231 + 7,12 = 1,231 + 7,120 = \frac{1231}{1000} + \frac{7120}{1000} = \frac{8351}{1000} = 8,351$.

Собирањата во претходниот пример можеме да ги запишеме на следниов начин:

$$\begin{array}{r} 3,12 \\ + 1,17 \\ \hline 4,29 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1,24 \\ + 0,25 \\ \hline 1,49 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1,231 \\ + 7,120 \\ \hline 8,351 \end{array}$$

Според тоа, собирањето на децималните броеви го правиме на следниов начин.

Децималните броеви се собираат како што се собираат и природните броеви. Притоа децималните запирки во собираците и во збирот треба да бидат на иста вертикална права.

Искажаното правило практично се применува на следниов начин. Ги запишуваме броевите еден и под друг и тоа:

- цели под цели (единици под единици, десетки под десетки итн.)
- децимали под децимали (десетинки под десетинки, стотинки под стотинки итн.)

	Е	Д	С
	3	1	2
+	1	1	7
	4	2	9

- децималните записи на збирот и собирците се на иста вертикална права,
- цифрите на збирот се определуваат на ист начин како при собирањето природни броеви.

Пример 2. Пресметај го збирот:

а) $44,3 + 6,234$, б) $123,12 + 2,654$.

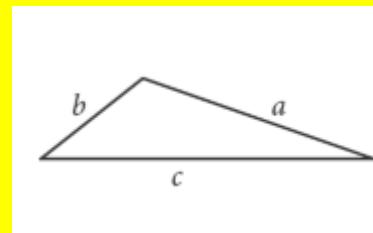
Решение. Ако собирците немаат ист број децимали, тогаш допишуваме нули. Сега:

$$\begin{array}{r} ^1 \\ 44,300 \\ \text{а) } + \quad 6,234 \\ \hline 50,534 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 123,120 \\ \text{б) } + \quad 2,654 \\ \hline 125,774 \end{array}$$

Пример 3. Пресметај го периметарот на триаголникот чии страни се $a = 2,77 \, dm$, $b = 3,5 \, dm$ и $c = 2,55 \, dm$.

Решение. Собирокот $b = 3,5 \, dm$ има само една децимала, па затоа од десно му допишуваме 0. Имаме:

$$\begin{array}{r} ^1 ^1 \\ 2,77 \\ 3,50 \\ + \quad 2,55 \\ \hline 8,82 \end{array}$$



Значи, бараниот периметар е $a + b + c = 8,82 \, dm$.

Пред да го разгледаме одземањето на децимални броеви, да забележиме дека од тоа што децималните броеви се дропки и секој природен број е децимален број следува:

Собирањето децимални броеви има комутативно својство, т.е. за секои децимални броеви a и b важи $a + b = b + a$.

Собирањето децимални броеви има асоцијативно својство, т.е. за секои децимални броеви a, b и c важи $a + (b + c) = (a + b) + c$.

За секој децимален број a важи $a + 0 = 0 + a = a$.

Децимален број се собира со природен број така што природниот број се претвора во децимален број, а потоа броевите се собираат.

Како и собирањето, така и одземањето на децималните броеви можеме да го реализираме со одземање на дропки. Да разгледаме еден пример

Пример 4. Пресметај:

а) $3,12 - 1,17$, б) $1,24 - 0,25$, в) $7,12 - 1,231$.

Решение. Бараните разлики ќе ги определиме запишувајќи ги децималните броеви како децимални дропки. Добиваме:

$$\begin{aligned} \text{а) } 3,12 - 1,17 &= \frac{312}{100} - \frac{117}{100} = \frac{195}{100} = 1,95, \\ \text{б) } 1,24 - 0,25 &= \frac{124}{100} - \frac{25}{100} = \frac{99}{100} = 0,99, \text{ и} \\ \text{в) } 7,12 - 1,231 &= 7,120 - 1,231 = \frac{7120}{1000} - \frac{1231}{1000} = \frac{5889}{1000} = 5,889. \end{aligned}$$

Одземањата во претходниот пример можеме да ги запишеме на следниов начин:

$$\begin{array}{r} 3,12 \\ - 1,17 \\ \hline 1,95 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1,24 \\ - 0,25 \\ \hline 0,99 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7,120 \\ - 1,231 \\ \hline 5,889 \end{array}$$

Според тоа, децимални броеви одземаме на следниов начин.

Децималните броеви се одземаат како што се одземаат и природните броеви. Притоа децималните записи во намаленикот, намалителот и разликата треба да бидат на иста вертикална права.

Искажаното правило практично се применува на следниов начин.

Ги запишуваме броевите еден и под друг и тоа:

- цели под цели (единици под единици, десетки под десетки итн.)
- децимали под децимали (десетинки под десетинки, стотинки под стотинки итн.)
- децималните записи на намаленикот, намалителот и разликата се на иста вертикална права,
- цифрите на разликата се определуваат на ист начин како при одземањето природни броеви.

	Е	.	Д	С
	3	.	1	2
-	1	.	1	7
	1	.	9	5

Пред да преминеме на решавање на следните примери да забележиме дека е точно тврдењето.

За секој децимален број a важи $a - 0 = a$ и $a - a = 0$.

Пример 5. Пресметај ја разликата:

$$\text{а) } 44,3 - 6,234, \quad \text{б) } 123,12 - 2,654.$$

Решение. Ако собирците немаат ист број децимали, тогаш допишуваме нули. Сега:

$$\begin{array}{r} 44,300 \\ - 6,234 \\ \hline 38,066 \end{array} \quad \begin{array}{r} 123,120 \\ - 2,654 \\ \hline 120,466 \end{array}$$

Пример 6. Илија требало да помине пат долг 12 km . Првиот час поминал $5,12 \text{ km}$. Уште колку километри му останале да помине.

Решение. Од

$$\begin{array}{r} 12,00 \\ - 5,12 \\ \hline 6,88 \end{array}$$

добиваме дека по првиот час на Илија му останало да помине $6,88 \text{ km}$. ■

Задачи за вежби

224. Пресметај го збирот:

- а) $12,32 + 5,17$; б) $15,4 + 17,11$; в) $155,2 + 12,234$; г) $15 + 14,21$.

225. Пресметај ја разликата:

- а) $4,55 - 3,23$; б) $12,7 - 3,45$; в) $1 - 0,0123$, г) $5,3 - 2,345$.

226. Дадени се броевите $a = 3,77 + 2,345$ и $b = 7,11 - 0,832$. Дали е $a > b$ или $b > a$?

227. Во едно шише има $0,5 \text{ l}$ сок, а во друго има $0,75 \text{ l}$ сок.

Колку сок има вкупно во двете шишиња?

228. Два правоаголници се направени од тел. Должините на страните на едниот правоаголник се $a = 3,77 \text{ cm}$ и $b = 2,11 \text{ cm}$, а на другиот се $c = 3,54 \text{ cm}$ и $b = 2,47 \text{ cm}$. Колку вкупно тел е потрошено за да се направата овие правоаголници? За кој правоаголник е потрошено повеќе тел?



229. Ардијан од парче јаже долго $13,2 \text{ m}$ исекол две парчиња со должини $6,67 \text{ m}$ и $1,25 \text{ m}$. Колку е должината на јажето кое му останало?

230. Пресметај:

- а) $2,24 - 1,57 + 3,11$; б) $13,54 - 12,87 + 1,05$; в) $12,98 + 11,23 - 20,49$.

231. Пресметај:

- а) $12,24 - (1,57 + 3,11)$; б) $13,54 - (12,87 - 1,05)$; в) $42 - (11,23 + 20,49)$.

232. Симон однел во пошта три пакети. Масата на првиот пакет е $3,5 \text{ kg}$, на вториот $2,54 \text{ kg}$ и на третиот $12,23 \text{ kg}$. Колкава е масата на сите три пакети заедно:

233. Во една вреќа има $12,73 \text{ kg}$ грав, а во друга има $2,54 \text{ kg}$ грав повеќе. Колку килограми грав има во двете вреќи заедно?

234. Збирот на броевите $13,7$ и $73,1$ намалиго за збирот на броевите $23,2$ и $34,7$.

235. Разликата на броевите $74,24$ и $23,51$ зголемија за разликата на броевите $11,23$ и $2,54$.

236. Ардијан утрото на пазар однел 250 kg компири. Претпладне продал $87,5 \text{ kg}$, а попладне продал уште $98,3 \text{ kg}$. Колку килограми компири му останале непродадени?

237. Рампо во пошта уплатил три уплатници: првата во вредност од $350,50$ денари, втората $412,50$ денари и третата 1150 денари. Тој дал банкнота од 2000 денари. Колку денари му вратиле?

238. Реши ги равенките:

- а) $x + 2,345 = 5,7$; б) $x - 5,34 = 7,12$; в) $9,345 - x = 6,23$.

1.3.11 Множење децимални броеви

Децималните броеви се дробки чии именители се декадните единици. Претходно научивме како да множиме дробки, што значи дека знаеме да множиме и децимални броеви. Меѓутоа децималните броеви може да се множат и поедноставно, односно слично на природните броеви. Да разгледаме два примера.

Пример 1. Чекорот на Дамјан има $0,75\text{ m}$. Колку метри поминал Дамјан кога направил 10 чекори?

Решение. Чекорот на Дамјан има $0,75\text{ m} = \frac{75}{100}\text{ m}$. Кога Дамјан направил 10 чекори тој поминал

$$10 \cdot 0,75 = 10 \cdot \frac{75}{100} = \frac{75}{10} = 7,5\text{ m}.$$

Пример 2. Пресметај го производот на бројот 1,538 со броевите 10, 100 и 1000.

Решение. Имаме:

$$10 \cdot 1,538 = 10 \cdot \frac{1538}{1000} = \frac{1538}{100} = 15,38$$

$$100 \cdot 1,538 = 100 \cdot \frac{1538}{1000} = \frac{1538}{10} = 153,8$$

$$1000 \cdot 1,538 = 1000 \cdot \frac{1538}{1000} = 1538.$$

Децимален број се множи со декадна единица така што неговата децимална запирка се поместува во десно за онолку места колку што има нули декадната единица.

Пример 3. Имаме:

$$123,45 \cdot 10 = 1234,5; \quad 0,3256 \cdot 100 = 32,56; \quad 2,1439 \cdot 1000 = 2143,9;$$
$$0,1 \cdot 100 = 0,10 \cdot 100 = 10; \quad 1,3 \cdot 1000 = 1,300 \cdot 1000 = 1300.$$

Пример 4. Имаме:

$$2,53 \cdot 10 + 0,47 \cdot 100 - 0,015 \cdot 1000 = 25,3 + 47 - 15 = 57,3$$
$$12,53 \cdot 10 - 0,77 \cdot 100 + 0,023 \cdot 1000 = 125,3 - 77 + 23 = 179,3.$$

Сега да видиме како се множи децимален број со природен број.

Пример 5. Пресметај ги производите на броевите:

а) 2,54 и 6 б) 1,321 и 4.

Решение. Имаме:

$$\text{а) } 2,54 \cdot 6 = \frac{254}{100} \cdot 6 = \frac{1524}{100} = 15,24;$$

$$\text{б) } 1,321 \cdot 4 = \frac{1321}{1000} \cdot 4 = \frac{5284}{1000} = 5,284.$$

Децимален број се множи со природен број како што се множат природни броеви. Бројот на децималите во производот е еднаков на бројот на децималите во децималниот број

Останува да видиме како се множат било кои два децимални броја.

Пример 5. Пресметај го производот на броевите:

а) 1,7 и 2,2

б) 1,1 и 1,31.

Решение. Имаме

$$\text{а) } 1,7 \cdot 2,2 = \frac{17}{10} \cdot \frac{22}{10} = \frac{374}{100} = 3,74$$

$$\text{б) } 1,1 \cdot 1,31 = \frac{11}{10} \cdot \frac{131}{100} = \frac{1441}{1000} = 1,441.$$

Два децимални броја се множат како што се множат природни броеви, а во производот се одделуваат онолку децимални места колку што имаат двата множители заедно.

Пример 6. Пресметај ги производите:

а) 3,4·5,2 и

б) 1,53·3,4.

Решение. Имаме

$$\begin{array}{r} 3,4 \cdot 5,2 \\ 68 \\ + 170 \\ \hline 17,68 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,53 \cdot 3,4 \\ 612 \\ + 459 \\ \hline 5,202 \end{array}$$

Да забележиме дека од тоа што децималните броеви се дробки следува:

Множењето децимални броеви има комутативно својство, т.е. за секои децимални броеви a и b важи $a \cdot b = b \cdot a$.

Множењето децимални броеви има асоцијативно својство, т.е. за секои децимални броеви a, b и c важи $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (b \cdot c)$.

За секој децимален број a важи $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ и $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

За собирањето и множењето децимални броеви важи *дистрибутивното својство на множењето во однос на собирањето*, т.е. за секои децимални броеви a, b и c важи $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Пример 7. Пресметај ја вредноста на изразот: $2,623 \cdot 3,12 + 2,623 \cdot 2,88$.

Решение. Ако го искористиме дистрибутивното својство на множењето во однос на собирањето дробки, добиваме:

$$\begin{aligned} 2,623 \cdot 3,12 + 2,623 \cdot 2,88 &= 3,12 \cdot 2,623 + 2,88 \cdot 2,623 = (3,12 + 2,88) \cdot 2,623 \\ &= 6 \cdot 2,623 = 15,738. \end{aligned}$$

Задачи за вежби

239. Пресметај:

- а) $0,534 \cdot 10$; б) $2,145 \cdot 100$; в) $0,012 \cdot 1000$.

240. Пресметај:

- а) $6,34 \cdot 7$; б) $35,12 \cdot 11$; в) $2,2468 \cdot 5$.

241. Пресметај:

- а) $2,4 \cdot 1,2$; б) $3,15 \cdot 1,4$; в) $0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,4$.

242. Кој број треба да се стави на местото на знакот * за да се добие точно равенство:

- а) $2,15 \cdot 3,12 = 3,12 \cdot *$; б) $1,54 \cdot * = 3,12 \cdot 1,54$.

243. Кој број треба да се стави на местото на знакот * за да се добие точно равенство:

- а) $(2,12 \cdot 3,45) \cdot 1,13 = 2,12 \cdot (* \cdot 1,13)$, б) $1,1 \cdot (* \cdot 1,32) = (1,1 \cdot *) \cdot 1,32$.

244. Пресметај ја вредноста на бројниот израз:

- а) $2,12 \cdot 3,45 + 2,12 \cdot 1,15$; б) $1,11 \cdot 1,32 + 2,99 \cdot 1,32$.

245. Пресметај ја вредноста на бројниот израз:

- а) $2,4 \cdot 1,2 + 5 \cdot 6,412 - 16$; б) $0,13 \cdot 4,5 + 6,2 \cdot 0,01 - 5 \cdot 0,12$.

246. Кој број е 3,6 пати поголем од бројот 5,05?

247. Пресметај ја плоштината на квадратот со должина на страна $a = 2,5 \text{ cm}$.

248. Пресметај ја плоштината на правоаголникот со страни $7,5 \text{ cm}$ и $2,5 \text{ cm}$.

249. Аднан на пазар купил $1,3 \text{ kg}$ јаболка по цена од 80 денари за килограм и $2,2 \text{ kg}$ круши по цена од 220 денари за килограм. Колку пари платил Аднан за овошјето?



250. Стојан имал 16000 денари. Тој 0,65 од парите потрошил за ролери, а 0,2 од парите потрошил за фудбалска топка. Колку пари му останале?

251. Запиши четири броја од кои првиот е 1,2, а секој следен е 1,5 пати поголем од претходниот.

252. Вангел од Скопје до Белград возел 5,2 часа со просечна брзина $85,4 \text{ km/h}$. Колаво е растојанието од Скопје до Белград?



253. Миле и Јасмин требало да пренесат 37 t цемент. Миле возел 5 пати по $3,2 \text{ t}$ во секое возење, а Јасмин возел 7 пати по $2,9 \text{ t}$ во секое возење. Уште колку цемент останало да се превезе?



254. Реша ги равенките:

- а) $x + 0,8 \cdot 0,2 = 0,9 \cdot 0,3$; б) $x - 0,81 \cdot 0,22 = 0,7 \cdot 0,4$;
в) $2,33 \cdot 1,8 - x = 4,4 \cdot 0,6$ г) $x - 0,11 \cdot 0,52 = 0,75 \cdot 0,45$.

1.3.12 Делење децимални броеви

Децималните броеви се дробки чии именители се декадните единици. Претходно научивме како да делиме дробки, што значи дека знаеме да делиме и децимални броеви. Да разгледаме еден пример.

Пример 1. Пресметај ги количниците на бројот 154,9 со броевите 10, 100 и 1000.

Решение. Имаме:

$$154,9 : 10 = \frac{1549}{10} : 10 = \frac{1549}{100} = 15,49$$

$$154,9 : 100 = \frac{1549}{10} : 100 = \frac{1549}{1000} = 1,549$$

$$154,9 : 1000 = \frac{1549}{10} : 1000 = \frac{1549}{10000} = 0,1549.$$

Децимален број се дели со декадна единица така што неговата децимална запирка се поместува во лево за онолку места колку што има нули декадната единица.

Пример 2. Имаме:

$$123,45 : 10 = 12,345; \quad 3,256 : 100 = 0,03256; \quad 2143,9 : 1000 = 2,1439;$$

$$0,1 : 100 = 0,001; \quad 1,3 : 1000 = 0,0013.$$

Пример 3. Имаме:

$$2,53 : 100 + 0,47 : 10 - 1,5 : 100 = 0,0253 + 0,047 - 0,015 = 0,0573$$

$$12,53 : 10 - 0,7 : 100 + 0,23 : 10 = 1,253 - 0,007 + 0,023 = 1,269.$$

Сега да видиме како се дели децимален број со природен број.

Пример 4. Децималниот број 17,64 подели го со бројот 3.

Решение. *Прв начин.* Имаме:

$$17,64 : 3 = \frac{1764}{100} : 3 = \frac{1764}{3 \cdot 100} = \frac{3 \cdot 588}{3 \cdot 100} = \frac{588}{100} = 5,88.$$

Втор начин. До истиот резултат можеме да дојдеме и поедноставно.

Дадените броеви ќе ги поделиме како да се природни природни броеви. Притоа водиме сметка за децималната запирка, т.е. постапуваме како што е прикажано при делењето во примеров.

$$17,64 : 3 = 5,88$$

$$\begin{array}{r} -15 \\ \hline 26 \\ -24 \\ \hline 24 \\ -24 \\ \hline 0 \end{array}$$

Кога при делењето ќе дојдеме до децималната запирка, децималната запирка ја запишуваме и кај количникот.

При делењето на децимален број со природен број постапи како да делиш природни броеви. Кога ќе ја спуштиш децималата на десетинките, тогаш во количникот стави децимална запирка.

Пример 5. Пресметај:

а) $28,752 : 6$,

б) $4,758 : 6$,

в) $0,112 : 14$.

Решение. Имаме:

$$\begin{array}{r} 28,752 : 6 = 4,792 \\ \underline{-24} \\ 47 \\ \underline{-42} \\ 55 \\ \underline{-54} \\ 12 \\ \underline{-12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4,758 : 6 = 0,793 \\ \underline{-0} \\ 47 \\ \underline{-42} \\ 55 \\ \underline{-54} \\ 18 \\ \underline{-18} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,112 : 14 = 0,008 \\ \underline{-0} \\ 1 \\ \underline{-0} \\ 11 \\ \underline{-0} \\ 112 \\ \underline{-112} \\ 0 \end{array}$$

Пример 6. Децималниот број 4,032 подели го со децималниот број 3,6.

Решение. *Прв начин.* Имаме:

$$4,032 : 3,6 = \frac{4032}{1000} : \frac{36}{10} = \frac{4032}{1000} \cdot \frac{10}{36} = \frac{112}{100} = 1,12.$$

Втор начин. Ако десет пати ги зголемиме деленикот и делителот, тогаш количникот не се менува. Значи,

$$4,032 : 3,6 = 40,32 : 36.$$

Притоа делителот ќе биде природен број, па сега делењето се сведува на делење на децимален број со природен број. Според тоа,

$$4,032 : 3,6 = 1,12.$$

$$\begin{array}{r} 40,32 : 36 = 1,12 \\ \underline{-36} \\ 43 \\ \underline{-36} \\ 72 \\ \underline{-72} \\ 0 \end{array}$$

Постапката прикажана во вториот начин на делење децимални броеви важи за секои два децимални броеви.

Децимален број се дели со децимален број така што:

- 1) во деленикот и делителот ја преместуваме децималната запирка на десно за онолку места, колку што децимали има делителот,
- 2) потоа се делат добиените броеви како што се дели децимален број со природен број.

Пример 7. Пресметај $85,26 : 5,8$.

Решение. Деленикот и делителот ги зголемуваме десет пати, т.е. децималната запирка во деленикот и делителот ја поместуваме за едно место во десно и добиваме $85,26 : 5,8 = 852,6 : 58$.

Сега, бараниот количник го наоѓаме делејќи го децималниот број 852,6 со природниот број 58. Добиваме: $85,26 : 5,8 = 14,7$.

$$\begin{array}{r} 852,6 : 58 = 14,7 \\ \underline{-58} \\ 272 \\ \underline{-232} \\ 406 \\ \underline{-406} \\ 0 \end{array}$$

Нека a, b, c ($c \neq 0$) се децимални броеви. Тогаш

$$(a + b) : c = a : c + b : c,$$

т.е. важи *дистрибутивното својство од десно* на делењето во однос на собирањето децимални броеви.

Пример 8. Пресметај: $44,85 : 2,3 + 24,15 : 2,3$.

Решение. Од дистрибутивното својство од десно на делењето во однос на собирањето добиваме

$$44,85 : 2,3 + 24,15 : 2,3 = (44,85 + 24,15) : 2,3 = 69 : 2,3 = 690 : 23 = 30.$$

Задачи за вежби

255. Пресметај ги количниците на бројот 2514,8 со броевите 10, 100 и 1000.

256. Пресметај:

- а) $2,17 : 7$; б) $59,4 : 11$; в) $8,16 : 0,6$;
г) $6,84 : 1,9$; г) $0,356 : 0,02$; д) $1,2328 : 0,8$.

257. Пресметај ја вредноста на бројниот израз:

- а) $13,2 + 5,2 : 2$; б) $14,8 - 7,2 : 3$;
в) $13,3 \cdot 0,2 + 18,3 : 0,3$; г) $14 : 0,4 - 27,3 : 3$,

258. Производот на броевите 2,461 и 2,3 подели го со нивниот количник.

259. Збирот на броевите 3,18 и 1,68 подели го со нивната разлика.

260. Возејќи велосипед со постојана брзина Маријана за 12 минути поминала 2,75 km. Пресметај ја во километри на час брзината со која Маријана возела?

261. Дамјан прво на бројот 7,2 му го додал бројот 3,6, а потоа бројот 7,2 го помножил со 3. Колку пати добиениот производ е поголем од добиениот збир?



262. Реши ги равенките:

- а) $3,7 \cdot x = 22,2$; б) $x : 7,2 = 12,2$; в) $18,2 : x = 2,6$.

263. Реши ја равенката: $32,4 - (8,1 - 2 \cdot x) = 29,2$.

264. Дестан замислил еден број. Кога го поделил со бројот 5,5 добил 1,6. Кој број го замислил Дестан?

265. Периметарот на еден рамнокрак триаголник е 8,5 cm. Ако основата на триаголникот е долга 3,7 cm, колкава е должината на неговиот крак?

266. Кој број треба да се помножи со 1,32 за да се добие бројот 9,24?

1.3.13 Претворање дробка во децимален број.

Заокружување децимални броеви

При воведувањето на децималните броеви видовме како децимална дробка се запишува како децимален број. Покрај тоа, одделни нескратливи дробки со примена на постапката за проширување дробки може да се запишат како децимални дробки, што значи и како децимални броеви.

Пример 1. Дропките $\frac{1}{8}$, $\frac{23}{25}$ и $\frac{1221}{2000}$ запиши ги како децимални дропки, а потоа како децимални броеви.

Решение. Имаме:

$$\frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 5}{40 \cdot 5} = \frac{25 \cdot 5}{200 \cdot 5} = \frac{125}{1000} = 0,125; \text{ проширување со } 5^3$$

$$\frac{23}{25} = \frac{23 \cdot 2}{25 \cdot 2} = \frac{46 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{92}{100} = 0,92; \text{ проширување со } 2^2$$

$$\frac{1221}{2000} = \frac{1221 \cdot 5}{2000 \cdot 5} = \frac{6105}{10000} = 0,6105; \text{ проширување со } 5^1.$$

Во пример 1 именителите на сите дропки се производи на степени на броевите 2 и 5 (Провери!). Притоа, во сите случаи со множење со степен или на бројот 2 или на бројот 5 извршивме проширување на дадената дропка до децимална дропка. Јасно, овие дропки имаат *конечен децимален запис* (децималниот дел има конечен број цифри).

Обратно, ако една дропка има конечен децимален запис, тогаш таа е децимална дропка. Бидејќи единствени прости делители на декадните единици се броевите 2 и 5, ако децималната дропка ја сведеме на нескратлива дропка, тогаш нејзиниот именител ќе биде производ на степени на броевите 2 и 5.

Од претходно кажаното следува тврдењето.

Ако именителот на дропката е производ на степени на броевите 2 и 5, тогаш таа има конечен децимален запис и обратно.

Децималните записи на дропките од разгледуваниот вид можеме да ги најдеме и со делење на броителот со именителот, според правилото за делење на децимален број со природен број. На пример,

$$\frac{56}{40} = 56 : 40 = 56,00 : 40,$$

па добиваме:

$$\begin{array}{r} 56,0 : 40 = 1,4 \\ -40 \\ \hline 160 \\ -160 \\ \hline 0 \end{array}$$

Според тоа, $\frac{56}{40} = 1,4$.

Но, што станува со нескратлива дропка која во именителот имаат множители различни од 2 и 5. Дали таа може да се запише како децимален број и каков е тој број? За да одговориме на горното прашање ќе го разгледаме следниот пример. Притоа децималниот запис на разгледуваните дропки ќе го побараме како погоре, со делење на броителот со именителот.

Пример 2. Дропката $\frac{1}{3}$ претстави ја во децимален запис.

Решение. Да ги поделиме броителот и именителот.

Очигледно дека постапката на делење на бројот 1 со бројот 3 нема да заврши. Имено, кога би завршила, би добиле дека дробката $\frac{1}{3}$ има конечен децимален запис, што не е можно бидејќи нејзиниот именител има прост множител различен од 2 и 5.

Според тоа, $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$

$$\begin{array}{r} 1 : 3 = 0,333\dots \\ - 0 \\ \hline 10 \\ - 9 \\ \hline 10 \\ - 9 \\ \hline 10 \\ - 9 \\ \hline 1\dots \end{array}$$

Слично, како во пример 2 се добива дека

$$\frac{2}{3} = 0,6666\dots, \frac{1}{7} = 0,1428571428571\dots, \frac{6}{11} = 0,545454\dots \text{ и } \frac{27}{35} = 0,675675675\dots$$

Како што можеме да видиме во сите случаи во децималниот запис имаме повторување на една цифра или група цифри. Така ја имаме следнава дефиниција.

Најмалата група цифри која постојано се повторува во децималниот запис на дробката $\frac{a}{b}$ ја нарекуваме *периода*, а бројот на цифрите во периодата го нарекуваме нејзина *должина*.

Во децималниот запис на $\frac{1}{3}$ периодата е со должина 1, за дробката $\frac{6}{11}$ периодата е со должина 2, за $\frac{27}{35}$ е со должина 3, а за $\frac{1}{7}$ е со должина 6. При запишувањето на децималните записи на дробките, заради краткост периодата се става во заграда. Така имаме $0,3333\dots = 0,(3)$; $0,5454\dots = 0,(54)$ и $0,675675\dots = 0,(675)$.

Во врска со претходно изнесеното може да се докаже следново тврдење.

Дробките кои не може да се прошират до децимални дробки, бидејќи нивните именители содржат множители различни од 2 и 5, со делење може да се запишат како децимални броеви кои имаат *бесконечен периодичен децимален запис*.

Ако непосредно по децималната запирка започнува периодата, тогаш за ваквиот децимален број ќе велиме дека е *чисто периодичен децимален број*. Јасно, броевите $0,(3)$; $0,(54)$; $0,(675)$ и $0,(142857)$ се чисто периодични децимални броеви. Меѓутоа, броевите $\frac{5}{16} = 0,2(7)$; $\frac{679}{495} = 1,3(71)$ и $\frac{7}{12} = 0,58(3)$ не се чисто периодични. За ваквите броеви велиме дека се *мешано периодични децимални броеви*.

За оние што сакаат за знаат повеќе. Како што видовме секоја дробка, па и секој природен број има конечен или бесконечен периодичен запис. Потоа видовме дека со секој конечен децимален запис е дадена дробка чиј именител е производ на степени на броевите 2 и 5. Може да се докаже дека на секој бесконечен периодичен децимален запис соодветствува дробка. Така, на пример,

$$0,(619047) = \frac{619047}{10^6 - 1} = \frac{619047}{999999} = \frac{13 \cdot 47619}{21 \cdot 47619} = \frac{13}{21} \text{ и}$$

$$2,44(9) = \frac{244}{10^2} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{9}{10^{-1}} = \frac{244}{10^2} + \frac{1}{10^2} = \frac{245}{10^2} = 2,45.$$

Меѓутоа, постојат и децимални записи кои се бесконечно непериодични. На пример, вakov децимален запис е: 0,303003000300003000003..., кој се добива од 0,(3) така што по првата цифра 3 ставаме една нула, по втората цифра 3 ставаме две нули, по третата цифра 3 ставаме три нули итн.

Пример 3. Слаткарот Коста направил ролат долг 1496 mm, кој го поделил на 100 еднакви парчиња. Колкава е дебелината на парчињата кои ги добил Коста?

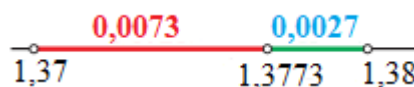
Решение. Бидејќи Коста ролатот го поделил на 100 еднакви парчиња, дебелината на едно парче е еднаква на стотина од должината на ролатот. Значи, дебелината на едно парче е $\frac{1496}{100} = 14,96 \text{ mm}$.

Во претходниот пример ние точно пресметавме дека дебелината на парче торта е 14,96 mm. Но, дали можеме практично во слаткарница да пресечеме парче од ролат кое ќе биде со дебелина 14,96 mm. Јасно, тоа не е можно, но ние може да пресечеме парче кое ќе има дебелина 15 mm. Притоа пишуваме $14,96 \text{ mm} \approx 15 \text{ mm}$ и читаме 14,96 mm е *приближно еднакво* на 15 mm. Во секојдневниот живот често пати имаме потреба од заокружување на одделни броеви, бидејќи преголемата точност понекогаш и не е потребна. Таков е случајот со дебелината на парчињата торта, но и при сидањето на зграда, при што мајсторите количеството потребен цемент не го мерат во грамови.

Погоре видовме дека периодичните децимални броеви имаат бесконечно многу децимали. Јасно, не можеме да собереме два вакви броја. Затоа мора да разгледуваме нивни заокружувања. Но, што значи да се заокружи децимален број.

Да се заокружи некој децимален број значи да се определи неговата приближна вредност на определен број децимали.

Заокружувањето на децималните броеви не го вршime произволно. Имено, како и се во математиката тоа се прави на точно определен начин. На пример, ако сакаме да го заокружime бројот 1,3773 на втора децимала, тогаш прво ги определуваме двата најблиски до него броја кои имаат по две децимали. Јасно, тоа се броевите 1,37 и 1,38. Притоа важи $1,37 < 1,3773 < 1,38$, па затоа можеме да земеме $1,3773 \approx 1,37$ или $1,3773 \approx 1,38$. Притоа во двата случаја е направена грешка помала од 0,01, па затоа велиме дека бројот 1,3773 сме го заокружиле со точност до 0,01, односно со точност до две децимали.



Како што можеме да видиме растојанијата од бројот 1,3773 до броевите 1,37 и 1,38 се $1,3773 - 1,37 = 0,0073$ и $1,38 - 1,3773 = 0,0027$, што значи дека бројот 1,3773 е поблиску до бројот 1,38. Според тоа, ако земеме $1,3773 \approx 1,38$, тогаш грешката на заокружувањето е помала и токму ова е критериумот за заокружување на децималните броеви.

Ова го овозможува следново правило за заокружување:

1) ако првата цифра која ја испуштаме е помала од 5, тогаш последната цифра која останува не се менува,

2) ако првата цифра која ја испуштаме е поголема или еднаква на 5, тогаш последната цифра која ја задржуваме ја зголемуваме за 1.

Пример 4. Броевите: 87,56; 9,34; 4,875 и 0,925 заокружи ги на една децимала.

Решение. Кај сите броеви ние ја испуштаме втората децимала, па затоа:

- а) $87,56 \approx 87,6$ бидејќи цифрата која ја испуштаме е 6 и таа е поголема од 5,
- б) $9,34 \approx 9,3$ бидејќи цифрата која ја испуштаме е 4 и таа е помала од 5,
- в) $4,875 \approx 4,9$ бидејќи првата цифра која ја испуштаме е 7 и таа е поголема од 5,
- г) $0,925 \approx 0,9$ бидејќи првата цифра која ја испуштаме е 2 и таа е помала од 5.

Пример 5. Бројот 5,8183713 заокружи го на:

- а) една, б) две, в) три и г) четири децимали.

Решение. Лесно се гледа дека:

- а) $5,8183713 \approx 5,8$, б) $5,8183713 \approx 5,82$,
- в) $5,8183713 \approx 5,818$, г) $5,8183713 \approx 5,8184$.

Задачи за вежби

267. Прошири ги дропките до децимални дропки, а потоа запиши ги како

децимални броеви: $\frac{3}{5}$, $\frac{37}{25}$, $\frac{229}{125}$, $\frac{23}{80}$, $\frac{11}{32}$, $\frac{83}{64}$.

268. Претвори ги дропките во децимални броеви: $\frac{9}{11}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{37}{275}$.

269. Определи и периодите на децималните броеви: 0,378585...; 5,54302302...,

270. Заокружи ги на три децимали броевите: 2,7145; 313287; 0,123768.

271. Дропката $\frac{7}{15}$ претвори ја во децимален број со точност до:

- а) прва, б) втора, в) трета децимала.

272. Броевите 4,7125 и 3,3914 заокружи ги со точност до втора децимала, а потоа собери ги.

1.3.14 Проценти и примена на проценти

Пример 1. Определи една шестина од бројот 72.

Решение. Една шестина од бројот 72 определуваме така што бројот 72 го делиме со 6, односно бројот 72 го множиме со $\frac{1}{6}$. Значи $\frac{1}{6}$ од 72 е $\frac{1}{6} \cdot 72 = 12$.

На сличен начин како во примерот можеме да определиме една стотина од некој број. На пример, стоти дел од бројот 2300 е $\frac{1}{100} \cdot 2300 = 23$. Понатаму, 40 стоти делови од

бројот 120 е $\frac{40}{100} \cdot 120 = 48$. Значи, дробките со именител 100 ги користиме кога сакаме да определиме определен број стоти делови од некој број. Така ја имаме следнава дефиниција.

Една стоти дел од даден број се нарекува еден процент од тој број и се означува 1%.

На цртежот засенчениот дел претставува 1% од квадратот со должина на страна a .

Како што видовме за определување на 40 стоти делови од даден број ја користиме дробката $\frac{40}{100}$. Сега, од својствата на десетичните дробки добиваме $\frac{40}{100} = 40 \cdot \frac{1}{100} = 40 \cdot 1\% = 40\%$. На сличен начин се

добива дека $\frac{2}{100} = 2 \cdot \frac{1}{100} = 2\%$, $\frac{3}{100} = 3 \cdot \frac{1}{100} = 3\%$ итн. Оттука заклучуваме дека важи

$$p\% = p \cdot \frac{1}{100} = \frac{p}{100}.$$

Сега, од последната формула следува дека

$$\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\%, \quad 1 = \frac{100}{100} = 100\% \text{ и } \frac{9}{20} = \frac{45}{100} = 45\%.$$

Од разгледани примери заклучуваме дека:

Дробка се запишува во процентен запис така што се запише колку стоти делови има и се допишува знакот за процент %.

Пример 2. Броевите $\frac{19}{100}$; $\frac{57}{100}$; $\frac{21}{1000}$; $\frac{8}{25}$; 0,6; $\frac{2}{3}$; 3,25; 8,5 изрази ги во проценти.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} \frac{19}{100} &= 19\%; & \frac{57}{100} &= 57\%; & \frac{21}{1000} &= \frac{2,1}{100} = 2,1\%; \\ \frac{8}{25} &= \frac{8 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{32}{100} = 32\%; & 0,6 &= \frac{6}{10} = \frac{60}{100} = 60\%; & 3,25 &= \frac{325}{100} = 325\%; \\ 8,5 &= \frac{850}{100} = 850\%; & \frac{2}{3} &= 0,6666... \approx 0,67 = \frac{67}{100} = 67\%. \end{aligned}$$

Пример 3. Запиши ги како дробка и како децимален број следниве проценти: 7%; 25%; 158%; 234%.

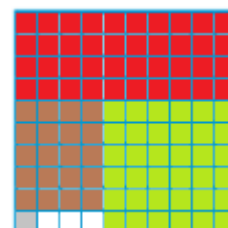
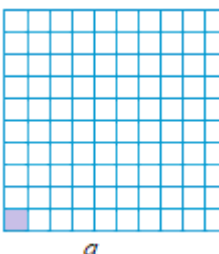
Решение. Имаме

$$7\% = \frac{7}{100} = 0,07; \quad 25\% = \frac{25}{100} = 0,25; \quad 158\% = \frac{158}{100} = 1,58; \quad 234\% = \frac{234}{100} = 2,34.$$

Пример 4. Определи колку проценти од фигурата се обоени со црвена, колку со зелена, колку со кафеава и колку со бела боја.

Решение. Со црвена боја се обоени $\frac{4 \cdot 10}{100} = \frac{40}{100} = 40\%$.

Со зелена боја се обоени $\frac{6 \cdot 6}{100} = \frac{36}{100} = 36\%$.



Со бела боја се обоени $\frac{3}{100} = 3\%$.

Со кафеава боја се обоени $\frac{4.5}{100} = \frac{20}{100} = 20\%$.

Пример 5. Пресметај:

а) 47% од бројот 200, б) 75% од бројот 220.

Решение. а) 47% од бројот 200 е: $\frac{47}{100} \cdot 200 = 94$.

б) 75% од бројот 220 е: $\frac{75}{100} \cdot 220 = \frac{75}{10} \cdot 22 = 165$.

Процентите имаат широка примена во обичниот живот, што може да се види од следниве примери.

Пример 6. Во одделението на Хаким има 25 ученици. Од нив 40% се одлични. Колкав е бројот на одличните ученици.

Решение. Ако сите ученици ги сметаме за една целина, која претставува 100%, тогаш бројот на одличните ученици ќе биде 40% од бројот 25. Значи, во одделението на Хаким има $\frac{40}{100} \cdot 25 = \frac{40 \cdot 25}{100} = \frac{1000}{100} = 10$ одлични ученици.

Пример 7. Во излогот на една продавница стои реклама дека секој кој ќе купи два производа добива попуст од 60% на поевтиниот производ. Јагода купи кошула за 2400 денари и маица за 880 денари. Колку попуст добила и колку платила за купените производи?

Решение. Јагода добила 60% попуст на цената на маицата: $\frac{60}{100} \cdot 880 = 6 \cdot 88 = 528$ денари. Таа за купените производи платила $2400 + 880 - 528 = 2752$ денари.



Пример 8. Колку килограми путер ќе добиеме од 225 kg млеко, ако од млекото просечно се добива 4% путер?

Решение. Бидејќи 4% од 225 е: $\frac{4}{100} \cdot 225 = \frac{900}{100} = 9$ добиваме дека од 225 kg млеко ќе се добие 9 kg путер.

Пример 9*. На еден шахист по 9 победи и 6 нерешени резултати му останале уште 25% неодиграни партии. Колку најмногу поени може да има шахистот на крајот на турнирот? (Во шахот за победа се добива 1 поен, а за нерешен резултат 0,5 поени.)

Решение. Нека вкупниот број одиграни партии е x . Бидејќи на шахистот му останале 25% од партиите, тој одиграл $100 - 25 = 75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ од партиите. Шахистот одиграл $9 + 6 = 15$ партии, па затоа $\frac{3}{4} \cdot x = 15$, од каде добиваме $x = 15 : \frac{3}{4} = 15 \cdot \frac{4}{3} = 20$.

Значи, шахистит треба да одигра уште $20 - 15 = 5$ партии. Конечно, најмногу поени ќе освои ако ги победи овие 5 партии, што значи ако има $9 + 5 = 14$ победи и 6 нерешени партии. Тогаш вкупниот број поени е биде $14 \cdot 1 + 6 \cdot 0,5 = 17$.

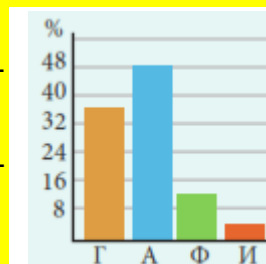
Пример 10. На еден семинар имало 25 учесници. Од нив 36% биле германци, 48% биле англичани, 12% биле французи и 4% биле италијани.

а) Претстави ги овие проценти со столбест дијаграм.

б) Коку учесници биле на семинарот од секоја нација?

Решение. а) Процентуалното учество на секоја нација на семинарот е прикажано на дадениот дијаграм

б) На семинарот имало: $\frac{36}{100} \cdot 25 = 9$ германци, $\frac{48}{100} \cdot 25 = 12$ англичани, $\frac{12}{100} \cdot 25 = 3$ французи и $\frac{4}{100} \cdot 25 = 1$ италијанец.



Задачи за вежби

273. Броевите $\frac{22}{100}$; $\frac{13}{50}$; $\frac{121}{1000}$; $\frac{3}{25}$; 0,12; $\frac{1}{8}$; 1,33; 7,2 изрази ги во проценти.

274. Запиши ги како дропка и како децимален број следниве проценти: 37%; 29%; 144%; 225%.

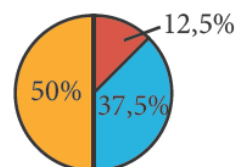
275. Определи колку проценти од фигурата се обоени со црвена, а колку со бела боја.



276. Месечната плата на Марко е 45000 денари. Раководителот му соопштил дека од следниот месец тој е има повисока плата за 12%. Колкава ќе биде новата месечна плата на Марко?

277. При пржењето кафето губи 20% од својата маса. Колку килограми сурово кафе се потребни за да се добијат 5 kg пржено кафе?

278. Во една група има 40 луѓе, од кои 50% се мажи, 37,5% се жени и 12,5% се деца. Определи го бројот на мажите, жените и децата во оваа група?



279. Кој број намален за 12% дава 220?

280. Еден производ прво поефтинилен 10%, а потоа поскапел 10%. За колку проценти се променила почетната цена на производот?

1.3.15 Размер и право пропорционалност

Ако дропката $\frac{1}{5}$ ја прошириме со броевите 2, 3, 4, 6, 10 и 12, редоследно ги добиваме дропките $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{4}{20}$, $\frac{6}{30}$, $\frac{10}{50}$ и $\frac{12}{60}$. Притоа, $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{4}{20} = \frac{6}{30} = \frac{10}{50} = \frac{12}{60}$, т.е. сите проширувања и скратувања на една дропка имаат една иста вредност. Тоа значи дека количникот на два броја има посебно значење, па затоа истиот одделно ќе го разгледаме.

За два броја a и b ($b \neq 0$), нивниот количник $a:b$ (или $\frac{a}{b}$) го нарекуваме *размер* (односно) на бројот a спрема бројот b . Бројот a го нарекуваме *прв член*, а бројот b - *втор член* на размерот.

Ако $\frac{a}{b} = k$, тогаш за бројот k велиме дека е *вредност* на размерот.

За два размери ќе велиме дека се *еднакви* ако имаат еднакви вредности.

Пример 1. а) Бидејќи $126:17=8$, вредноста на размерот $126:17$ е 8.

б) Вредноста на размерот $a:b$ е 5, а неговиот втор член е 8. Значи, $a:8=5$, од каде добиваме $a=5 \cdot 8=40$. Значи, првиот член на размерот е 40.

в) Имаме $4:25=0,16$ и $\frac{3}{5}:\frac{15}{4}=\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{15}=\frac{4}{25}=0,16$. Значи, размерите $4:25$ и $\frac{3}{5}:\frac{15}{4}$ имаат еднакви вредности, па затоа тие се еднакви.

Како што знаеме, при проширувањето и скратувањето на дробки добиваме со една иста вредност, односно $(a \cdot m):(b \cdot m) = (a:m):(b:m) = a:b$. Оттука следува точноста на следново тврдење.

Ако членовите на размерот ги помножимо или поделиме со еден ист природен број, тогаш вредноста на размерот не се менува.

Со броевите a и b ($a \neq 0, b \neq 0$) се определени размерите $a:b$ и $b:a$, за кои велиме дека се *заемно обратни*, т.е. размерот $a:b$ е *обратен* на размерот $b:a$, а размерот $b:a$ е *обратен* на размерот $a:b$.

Нека $a:b$ и $b:a$ ($a \neq 0, b \neq 0$) се два заемно обратни размери. Тогаш

$$(a:b) \cdot (b:a) = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1.$$

Според тоа, точно е следново тврдење.

Производот на два заемно обратни размери е еднаков на 1.

Знаеме дека на географските карти секогаш е даден размерот на растојанијата на картата и во природата при што размерот е еднаков на односот на растојанијата изразени во исти мерни единици. На пример, ако растојанието меѓу две места на картата е еднакво на 2 cm , а во природата ова растојание е 100 km , тоа значи дека размерот во кој е нацртана картата е

$$2\text{ cm}:100\text{ km} = 2\text{ cm}:100000\text{ m} = 2\text{ cm}:10000000\text{ cm} = 1:5000000.$$

Според тоа, 1 cm на картата претставува 5000000 cm .

Забележуваме дека должините на картата и во природата се именувани броеви. При пресметување на размерот ние всушност наоѓаме количник на мерните броеви на двете величини изразени во иста мерна единица. Ова важи и за мерните единици за маса, плоштина, волумен, температура, време, брзина итн., што значи дека се споредуваат са-

мо истородни величини. Како што гледаме во случајот работиме со именувани броеви. Меѓутоа од самата дефиниција следува дека размерот е *неименуван број*.

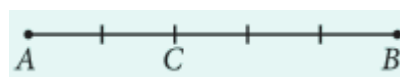
Пример 2. Матеј има стара карта на чија задна страна пишува: „На средината меѓу палмата и карпата, на длабочина од 1 m се наоѓа закопано богатство.“ На картата пишувало дека таа е изработена во размер $1:500$. Матеј измерил дека растојанието на картата меѓу палмата и карпата е 16 cm . Колку е оддалечено од палмата местото на кое е закопано богатството?



Решение. Бидејќи размерот во кој е изработена картата е $1:500$, добиваме дека растојанието од палмата до карпата е $500 \cdot 16\text{ cm} = 8000\text{ cm} = 80\text{ m}$. Значи, местото на кое е закопано богатството од палмата е оддалечено $80 : 2 = 40\text{ m}$.

Пример 3. Растојанието меѓу градовите A и B е 45 km . Компанијата „Угостител“ решила да отвори ресторан на местото кое го дели патот од A до B во размер $2:3$. На кое место од градот A компанијата ќе го изгради ресторанот?

Решение. Бидејќи $2+3=5$ должината на патот треба да ја поделиме на 5 дела. Имаме $45:5=9\text{ km}$. Ако C е



точката во која треба да се изгради ресторанот, тогаш растојанието од A до C треба да е $2 \cdot 9 = 18\text{ km}$. Значи, растојанието од C до B ќе биде $3 \cdot 9 = 27\text{ km}$ и притоа ќе важи $18:27 = (2 \cdot 9):(3 \cdot 9) = 2:3$.

Пример 4. Баба Петкана има 63 години, а нејзината внука Илина има 9 години.

- а) Колкав е размерот на нивните години?
- б) Колкав бил размерот на нивните години пред 3 години?
- в) Колкав ќе биде рамерот на нивните години по 9 години?

Решение. а) Рамерот на годините на бабата и внуката е $63:9=7$.

б) Пред 3 години бабата имала 60, а внуката имала 6 години. Размерот на нивните години бил $60:6=10$

в) По 9 години бабата ќе има 72 години, а внуката ќе има 18 години. Размерот на нивните години е биде $72:18=4$.



Сега ќе разгледаме еден пример, кој на извесен начин е поврзан со поимот размер.

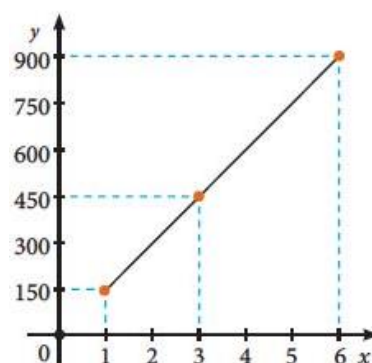
Пример 7. Цената на една тетратка е 150 денари. Кол-ку пари чинат три тетратки? А колку чинат шест тетратки?

Решение. Со x да означиме бројот на тетратките. Ако со y ги означиме парите кои треба да се платат за x тетратки, тогаш бидејќи цената на една тетратка е 150 денари, добиваме дека за x тетратки треба да се платат $y=150x$ денари.

Сега, одговорите на прашањата од задачата се дадени во следнава табела:

x	1	3	6
y	150	450	900

На графикот е прикажана зависноста на вкупната цена од бројот на купените тетратки. Како што можеме да забележиме црвените точки на графикот се наоѓаат на една права.



За променливите величини x и y ќе велиме дека се **правопропорционални** ако постои број $k \neq 0$ таков што за секоја вредност на x соодветната вредност на y е определена со формулата $y = kx$. Бројот k го нарекуваме **коефициент на пропорционалност**, а формулата $y = kx$ ја нарекуваме **функција (формула) на пропорционалност**.

Пример 8. За да се молерисаат $15 m^2$ од станот потребни се $3 l$ боја. Колку боја е потребно за да се молерисаат $70 m^2$?

Решение. Бидејќи за $15 m^2$ се потребни $3 l$, добиваме дека за $1 m^2$ се потребни $\frac{3}{15} = 0,2 l$ боја. Ако со x ја означиме плоштината која ја молерисуваме (во m^2), а со y потртената боја (во l), тогаш е јасно дека $y = 0,2x$. Според тоа, за $70 m^2$ ќе бидат потребни $y = 0,2 \cdot 70 = 14 l$ боја.

Задачи за вежби

281. Колку пати бројот 28 е поголем од бројот 7? Колку е размерот $28:7$?

282. Дали се еднакви размерите:

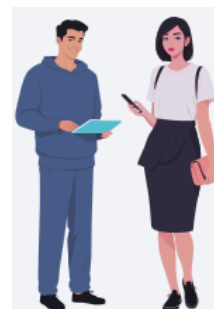
а) $3,6:2,4$ и $3:2$, б) $51:62$ и $4:5$.

283. Месечната заработувачка на Марија е 54000 денари, а на нејзиниот сопруг Марко е 48000 денари. Во кој однос се заработувачките на Марија и Марко?

284. Планот на град Скопје е изработен во размер $1:50000$. На планот должината на Бул. Партизански одреди е $12,1 cm$. Колкава е вистинската должина на овој булевар?

285. Илија сака на лист хартија со димензии $20 cm$ и $27 cm$ да го нацрт планот на својот стан. Кој е најмалиот размер во кој може тоа да го направи, ако станот е во форма на правоаголник со должина $8,1 m$ и ширина $6,3 m$? (За пресметките користи дигитрон!)

286. Должината на отсечката AB е $32 cm$. Определи точка C која оваа отсечка ја дели во размер $3:5$. Колкави се должините на отсечките AC и BC ?



287. Елена и Сенада заедно заработиле 4800 денари. Елена работела 3 часа, а Сенада работела 5 часа. Ако секое девојче за исто време заработува иста сума, колку пари треба да добие Елена, а колку Сенада?
288. Ако за 1620 денари можеш да купиш 18 килограми јаболка, колку пари ти се потребни за да купиш 30 килограми јаболка?
289. Во едно одделение бројот на момчињата спрема бројот на девојчињата е во размер 2:3. Во одделението има 8 момчиња. Колку девојчиња има во ова одделение?
290. Запиши ја формулата за пресметување на периметар на:
 а) квадрат со страна a , б) рамностран триаголник со страна a .
 Дали добиените формули се формули за правопрпорционалност? Во случај на потврден одговор определи го коефициентот на пропорционалност.
291. Ако 6 исти моливи чинат 234 денари, колку такви моливи може да се купат за 390 денарти?
292. Величините x и y се дадени со табелата:
- | | | | | | | | |
|-----|----|----|------|-----|----|----|----|
| x | 12 | 24 | -150 | 126 | -6 | 21 | 96 |
| y | 4 | 8 | -50 | 43 | -2 | 7 | 32 |
- Дали дадените величини x и y се правопрпорционални?
293. Михајло и Јован имаа 6000 денари. Треба да ги поделат правопрпорционално со бројот на буквите во своите имиња. Колку пари добил секој од нив?
294. Мачка и пол за ден и пол јаде глувче и пол. Колку глувчиња ќе изедат 12 мачки за 30 дена?

Провери го своето знаење 3

- Спореди ги броевите:
 а) $\frac{5}{9}$ и $\frac{9}{17}$, б) 2,7 и 2,09.
- Пресметај:
 а) $\frac{3}{5} + \frac{7}{15}$, б) $3 - 1\frac{4}{7}$.
- Пресметај:
 а) $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{15}$, б) $3 : 1\frac{4}{7}$. в) $(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}) \cdot 1\frac{4}{5}$.
- Пресметај:
 а) $12,32 + 5,17$; б) $12,7 - 3,45$, в) $2,7 + 3,45 \cdot 0,2$
- Реша ги равенките:
 а) $4 \cdot x = 2\frac{2}{5}$, б) $x : 1\frac{2}{5} = 1\frac{1}{7}$, в) $18,2 : x = 2,6$.

6. Првиот ден Илија окопал $\frac{3}{8}$ од градината, а вториот $\frac{7}{15}$ од градината. Колкав дел од градината му останало да окопа?
7. Пресметај го периметарот на правоаголникот, ако неговата плоштина е $7,36 \text{ cm}^2$, а ширината е $2,3 \text{ cm}$.
8. Дропката $\frac{7}{17}$ претвори ја во децимален број со точност до трета децимала.
9. Цената на килограм малини минатата година била 120 денари, а оваа година е 180 денари. За колку проценти е зголемена цената на малините?
10. Мирјана и Сениха заедно заработиле 4800 денари. Мирјана работела 5 часа, а Сениха работела 7 часа. Ако секое девојче за исто време заработува иста сума, колку пари треба да добие Мирјана, а колку Сениха?

2 ГЕОМЕТРИЈА

- 2.1 Точка и права. Заемна положба на две прави
- 2.2 Растојание меѓу две точки
- 2.3 Полуправа, отсечка и должина на отсечка
- 2.4 Операции со отсечки
- 2.5 Кружница и круг
- 2.6 Заемна положба на кружница и права и на две кружници
- 2.7 Полурамнина. Агол
- 2.8 Централен агол. Графичко собирање и одземање на агли
- 2.9 Соседни агли, видови агли
- 2.10 Мерење агли. Аритметички операции со агли
- 2.11 Агли на трансверзала
- 2.12 Многуаголник
- 2.13 Триаголник, елементи на триаголник
- 2.14 Збир на агли во триаголник
- 2.15 Симетрала на отсечка
- 2.17 Симетрала на агол
- 2.17 Средна линија на триаголник
- 2.18 Основни конструкции на триаголник
- 2.19 Однос меѓу страните и аглите на триаголникот
- 2.20 Висини и тежишни линии на триаголник
- 2.21 Четириаголник. Видови четириаголници
- 2.22 Збир на агли во четириаголник
- 2.23 Паралелограм. Својства на паралелограмот
- 2.24 Видови паралелограми
- 2.25 Трапез, видови трапези. Делтоид
- 2.26 Осна симетрија
- 2.27 Транслација
- 2.28 Ротација
- 2.29 Скица на 3Д форма гледана од напред, од горе и од страна

Во претходните одделенија се запозна со поимите точка, права, кружница, агол, триаголник и други 2Д и 3Д форми. Во оваа тема ќе го повториш наученото и ќе научиш:

- да црташ кружница и круг, и да определуваш заемна положба на точка и кружница, права и кружница и две кружници,
- да определуваш заемна положба на две прави,
- конструираш отсечка еднаква на дадена отсечка,
- графички да собираш и одземаш отсечки,
- да конструираш симетрала на отсечка, опишана кружница околу триаголник и паралелни и нормални прави,
- графички да собираш и одземаш агли,
- да разликуваш конвексен и неконвексен агол,
- да црташ централен агол на кружница, еднакви агли и графички да собираш и одземаш агли,
- да проценуваш и мериш агли,
- аритметички да собираш и одземаш агли, вклучувајќи го и користењето на помалите единици за мерење агол,
- да конструираш симетрала на агол и впишана кружница во триаголник,
- да ги именуваш аглите на трансверзалата и да ги користиш нивните својства,
- да решаваш проблеми со користење на збир на агли, средна линија, ортоцентар и тежиште на триаголник,
- да ги класифицираш четириаголниците,
- да решаваш проблеми со користење на збирот на аглите во четириаголник и својствата на паралелограмот,
- да определуваш слика на права, кружница и многуаголник со осна симетрија, транслација и ротација,
- да решаваш пороблеми со користење на осна симетрија, транслација и ротација,
- да скицираш 3Д форми гледани од напред, од горе и од страна

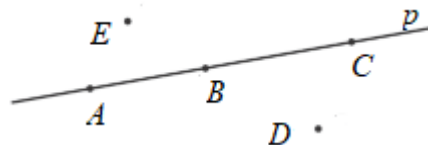
2.1 Точка и права. Заемна положба на две прави

На цртежите, како што е вообичено, точките ги означуваме со големите латинични букви $A, B, C, D, E, \dots$. Притоа користиме и ознаки со индекси како A_1 (читаме „а еден“), $A_2, A_3, \dots$ или A' (читаме „а прим“), $A'', A''', \dots$.

Правите ги означуваме со малите латинични букви $a, b, c, p, q, r, \dots$. Притоа користиме и ознаки со индекси како a_1 (читаме „а еден“), $a_2, a_3, \dots$ или a' (читаме „а прим“), $a'', a''', \dots$.

Точка може да припаѓа или да не припаѓа на права.

На цртежот за точката A велиме дека *ѝ припаѓа* на правата p и пишуваме $A \in p$. Притоа велиме и дека A *лежи* на p , односно p *минува* низ A .



На цртежот за точката E велиме дека *не ѝ припаѓа* на правата p и пишуваме $E \notin p$. Притоа велиме и дека E *не лежи* на p , односно p *не минува* низ E .

На цртежот се означени и точките B, C кои припаѓаат на правата p и точката D која не припаѓа на правата p . Можеш да означиш произволно многу точки кои припаѓаат на правата p , но и произволни многу точки кои не припаѓаат на правата p . Воочи и запомни.

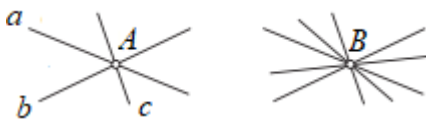
На секоја права p лежат бесконечно многу точки, но постојат и бесконечно многу точки што не лежат на правата p .

Низ точките A и B на цртежот минува правата p , која ја означуваме и со AB . Очигледно е дека не може да се повлече друга права која минува низ точките A и B . Воочи и запомни.



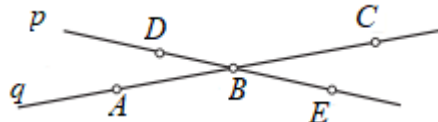
Низ две различни точки A и B минува точно една права p , т.е. секоја права е единствено определена со две различни точки.

На цртежите низ точката A се повлечени три прави a, b, c , а низ точката B се повлечени пет прави. Очигледно и во едниот и во другиот случај можеме да повлечеме уште по една права низ дадените точки. Но, повлекувањето прави можеме да го продолжиме колку што сакаме. Воочи и запомни.



Низ една точка минуваат бесконечно многу прави.

На цртежот точките A, B, C лежат на правата p , а точките B, D, E лежат на правата q . Точките A, B, E

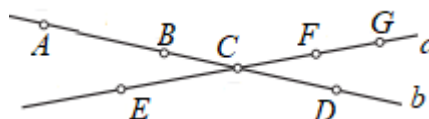


не лежат на една права. Оттука ја имаме следнава дефиниција.

За точки што лежат на иста права велиме дека се *колинеарни*.

За точки што не лежат на иста права велиме дека *не се колинеарни*.

Пример 1. На цртежот точките A, B, C, D лежат на правата b , па затоа тие се колинеарни. Слично, точките E, C, F, G лежат на правата a , па затоа тие се колинеарни. Меѓутоа, точките A, B, E лежат на различни прави, што значи дека тие не се колинеарни. Исто така и точките A, B, F не се колинеарни.



Обиди се да најдеш и други тројки точки кои не се колинеарни.

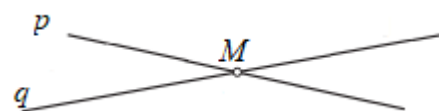
Бидејќи било кои две различни точки определуваат точно една права, добиваме дека било кои две различни точки се колинеарни.

Ако две прави p и q имаат две заеднички точки, тогаш бидејќи низ две различни точки минува точно една права, заклучуваме дека сите точки на овие две прави им се заеднички. Значи, две различни прави може да имаат најмногу една заедничка точка.

За правите p и q на кои сите точки им се заеднички велиме дека *се совпаѓаат*. Притоа пишуваме $p \equiv q$.

За правите кои имаат една заедничка точка велиме дека *се сечат* во таа точка. Заедничката точка ја нарекуваме *пресечна точка* на тие прави.

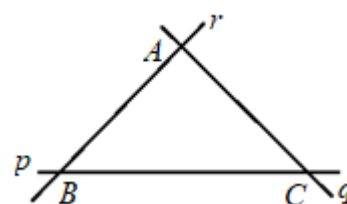
На цртежот правите p и q се сечат во точката M . Притоа пишуваме $p \cap q = M$.



Пример 2. На цртежот се дадени правите p, q и r . Притоа важи

$$p \cap q = C, \quad p \cap r = B, \quad q \cap r = A,$$

што значи дека правите две по две се сечат. Притоа велиме дека правите *се сечат по парови*.



За правите кои немаат заедничка точка велиме дека се *паралелни прави*.

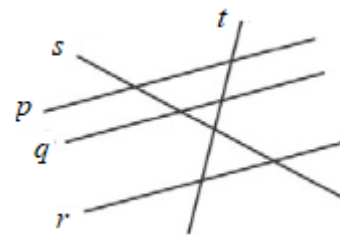
На цртежот правите p и q се паралелни. Притоа пишуваме $p \parallel q$ и читаме „ p е паралелна со q “.



Ако правите p и q не се паралелни, т.е. ако се сечат пишуваме $p \nparallel q$ и читаме „ p не е паралелна со q “.

Пример 3. Заемната положба на правите p, q, r, s, t на цртежот е следната:

- правите p и q се паралелни, т.е. $p \parallel q$,
- правите p и r се паралелни, т.е. $p \parallel r$,
- правите q и r се паралелни, т.е. $q \parallel r$,
- правата s ги сече правите p, q, r, t , т.е. $s \not\parallel p, s \not\parallel q, s \not\parallel r, s \not\parallel t$,
- правата t ги сече правите p, q, r, s , т.е. $t \not\parallel p, t \not\parallel q, t \not\parallel r, t \not\parallel s$. ■



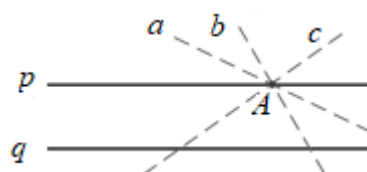
Од досега изнесеното можеме да заклучиме дека две прави или се сечат или се паралелни. Понатаму, кога некои прави се совпаѓаат, тоа се смета за специјален случај на паралелност, па затоа можеме да кажеме дека *секоја права е паралелна самата на себе*, т.е. $p \parallel p$.

Од дефиницијата на паралелни прави и од погоре кажаното следува дека:

- 1) $p \parallel p$, за секоја права p ,
- 2) ако $p \parallel q$, тогаш $q \parallel p$,
- 3) ако $p \parallel q$ и $q \parallel r$, тогаш $p \parallel r$.

Пример 4. Дадени се права q и точка A која не лежи на q . Колку прави ја содржат A и ја сечат q ? Колку прави ја содржат A и се паралелни со q ?

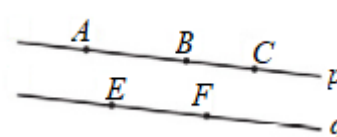
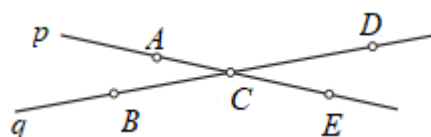
Решение. Правата q содржи бесконечно многу точки, а секои две точки определуваат една права. Ако земеме било која точка X од q , тогаш правата AX ја сече q . Тоа значи дека постојат бесконечно многу прави кои минуваат низ A и ја сечат q . На цртежот такви се правите a, b и c .



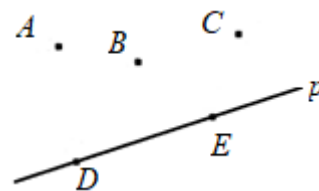
Но, постои само една права p која минува низ A и е паралелна со q . Зошто?

Задачи за вежби

1. Кои од точките на цртежот:
 - а) се колинеарни,
 - б) не се колинеарни.
2. а) Нацртај три прави a, b и c така што ќе имаат една заедничка точка.
 б) Дали правите AB, BC и BD имаат заедничка точка.
3. а) Избери четири точки меѓу кои нема три колинеарни и нацртај ги сите прави што се определени со овие точки. Колку прави нацрта?
 б) Избери четири точки меѓу кои има точно три колинеарни и нацртај ги сите прави што се определени со овие точки. Колку прави нацрта?
4. Нека p и q се две паралелни прави и $A, B, C \in p$, $E, F \in q$. Колку вкупно прави се определени со овие точки?

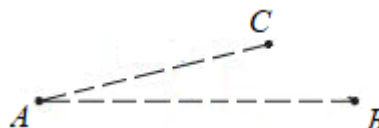


5. На правата p се означени точките D и E , а надвор од неа се означени точките A, B и C . Колку прави се определени со овие пет точки.



2.2 Растојание меѓу две точки

Да воочиме, како на цртежот три различни точки A, B и C . На прашањето што може да се каже за овие точки, еден од најчестите одговори е: растојанието од точката A до точката C е помало отколку растојанието од точката A до точката B . Досега повеќе пати си одредувал растојание од едно место до друго, од една точка до друга. Тоа растојание си го искажувал со определен број милиметри (mm), сантиметри (cm), метри (m), километри (km).

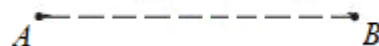


Но, што е растојание?

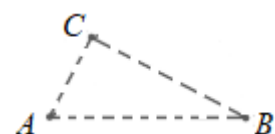
Растојание од една точка A до друга точка B е број поголем или еднаков на нула, кој го означуваме со $\overline{AB}$.

Значи, $\overline{AB} \geq 0$. Притоа $\overline{AB} > 0$ ако точките A и B се различни, а $\overline{AB} = 0$ ако точките A и B се совпаѓаат, т.е. ако $A \equiv B$.

На цртежот се дадени точките A и B . Прво измери го растојанието од A до B , а потоа растојанието од B до A . Сигурно, воочи дека за точките растојанието од A до B е еднакво на растојанието од B до A , односно $\overline{AB} = \overline{BA}$.



На цртежот се дадени три неколинерани точки A, B и C . Измери ги растојанијата $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$, а потоа спореди го $\overline{AB}$ со $\overline{BC} + \overline{CA}$. Сигурно доби дека $\overline{AB} < \overline{BC} + \overline{CA}$.



На цртежот се дадени три колинеарни точки A, B и C . Измери ги растојанијата $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$, а потоа спореди го $\overline{AC}$ со $\overline{AB} + \overline{BC}$. Сигурно доби дека $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.



Значи, за кои било три точки A, B и C растојанието од A до B е помало или е еднакво на збирот на растојанијата од B до C и од C до A , т.е. $\overline{AB} \leq \overline{BC} + \overline{CA}$.

Претходните разгледувања ни даваат одговор на нашето прашање: Што е растојание?

Растојание меѓу две точки A и B е број $\overline{AB}$ со следниве својства:

- 1) $\overline{AB} \geq 0$, при што $\overline{AB} = 0$ ако и само ако точките A и B се совпаѓаат.
- 2) растојанието од A до B е еднакво на растојанието од B до A , т.е. $\overline{AB} = \overline{BA}$,
- 3) за било кои три точки A, B и C важи $\overline{AB} \leq \overline{BC} + \overline{CA}$.

Ако за три точки A, B и C важи равенството $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, тогаш точките се колинеарни. Во тој случај велиме дека точката B е меѓу точките A и C .

Пример 1. За точките A, B и C важи: $\overline{AB} = 6\text{ cm}$, $\overline{BC} = 25\text{ mm}$ и $\overline{CA} = 35\text{ mm}$. Дали точките A, B и C лежат на иста права (се колинеарни)?

Решение. Имаме,

$$\overline{BC} + \overline{CA} = 25\text{ mm} + 35\text{ mm} = 60\text{ mm} = 6\text{ cm} = \overline{AB},$$

што значи дека точките A, B и C лежат на иста права.

Пример 2. Точките A, B и C не се колинеарни и важи $\overline{BC} = 2\text{ cm}$ и $\overline{CA} = 4\text{ cm}$. Дали може $\overline{AB}$ да е поголемо од 60 mm ? А дали може $\overline{AB}$ да е помало од 2 cm ?

Решение. За секои три неколинеарни точки A, B и C важи $\overline{AB} < \overline{BC} + \overline{CA}$, од каде добиваме $\overline{AB} < 2 + 4 = 6\text{ cm} = 60\text{ mm}$. Значи, растојанието $\overline{AB}$ не може да биде поголемо од 60 mm .

Ако $\overline{AB} < 2\text{ cm}$, тогаш од неравенството $\overline{CA} < \overline{CB} + \overline{BA}$, добиваме

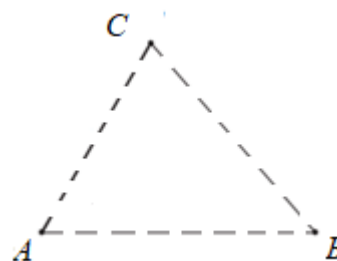
$$\overline{CA} < \overline{CB} + \overline{BA} = 2\text{ cm} + 2\text{ cm} = 4\text{ cm}.$$

Значи, добиваме дека $4\text{ cm} = \overline{CA} < 4\text{ cm}$, што не е можно. Значи, не е можно растојанието $\overline{AB}$ да е помало од 2 cm .

Задачи за вежби

6. На цртежот се дадени неколинеарните точки A, B и C . Измери ги растојанијата $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$, а потоа провери дали се исполнети неравенства:

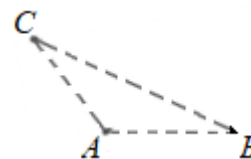
$$\overline{AB} < \overline{BC} + \overline{CA}, \overline{CA} < \overline{CB} + \overline{BA} \text{ и } \overline{BC} < \overline{BA} + \overline{AC}.$$



7. На цртежот се дадени неколинеарните точки A, B и C .

Измери ги растојанијата $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$, а потоа провери дали се исполнети неравенства:

$$\overline{AB} < \overline{BC} + \overline{CA}, \overline{CA} < \overline{CB} + \overline{BA} \text{ и } \overline{BC} < \overline{BA} + \overline{AC}.$$



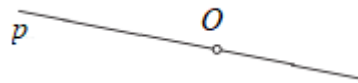
8. За точките A, B и C важи: $\overline{AB} = 8\text{ cm}$, $\overline{BC} = 5\text{ cm}$ и $\overline{CA} = 35\text{ mm}$. Дали точките A, B и C лежат на иста права?
9. За точките A, B и C важи: $\overline{AB} = 8\text{ cm}$, $\overline{BC} = 4,5\text{ cm}$ и $\overline{CA} = 35\text{ mm}$. Дали точките A, B и C лежат на иста права?
10. На правата p се дадени точките A, B и C . Точката B е меѓу точките A и C . Ако $\overline{AC} = 7\text{ cm}$ и $\overline{AB} = 4,8\text{ mm}$, пресметај го растојанието $\overline{BC}$.

2.3 Полуправа, отсечка и должина на отсечка

Точката O ја дели правата p на два дела. За точката O велиме дека е *гранична точка* на секој од двата дела.

Множеството точки од правата p , кои се од иста страна на точката O , заедно со неа го нарекуваме *полуправа*.

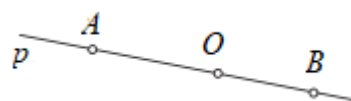
За точката O велиме дека е *почетна точка* на *полуправата*.



На цртежот е нацртана полуправа. Ако O е нејзината почетна точка, а A е било која нејзина точка, тогаш кратко пишуваме *полуправа* OA .



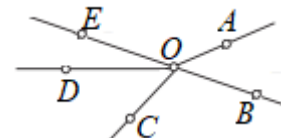
На правата p на цртежот се означени точките O, A, B . Со точката O оваа права е поделена на две полуправи OA и OB . Значи, полуправите OA и OB формираат една права. Така ја имаме следнава дефиниција.



Ако две полуправи со заедничка почетна точка формираат права, тогаш велиме дека тие се *составни прави*.

Пример 1. Именувај ги полуправите прикажани на цртежот. Кои од нив се составни?

Решение. На цртежот се прикажани полуправите OA, OB, OC, OD и OE . Составни се полуправите OB и OE .



На секоја права има бесконечно многу точки, па има смисла да се зборува за распоредот на точките на една права. На цртежот е прикажана права p , на која се означени точките A, B и C . Точките A и B се од иста страна на точката C , а точките A и C се од различни страни на точката B . Редоследот на точките A, B и C на правата го означуваме со $A-B-C$ или $C-B-A$, што значи дека точката B е меѓу точките A и C . Во врска со пртхоно кажаното ја имаме следнава дефиниција.



Нека A и B се две различни точки. Множеството точки формирано од точките A и B и сите точки меѓу нив го нарекуваме *отсечка* и го означуваме со AB (или BA). Точките A и B ги нарекуваме *крајни точки* на отсечката AB , а сите други точки што лежат меѓу A и B ги нарекуваме *внатрешни точки* за отсечката AB .

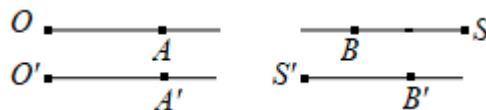
Пример 2. Колку отсечки определуваат четири различни точки?

Решение. Нека се дадени точките A, B, C и D . Отсечките кои се определени со овие точки се: AB, AC, AD, BC, BD и CD . Значи, четири различни точки определуваат 6 отсечки.



За две полуправи велиме дека се *паралелни* ако лежат на иста права или на две паралелни прави.

На цртежот полуправите OA и $O'A'$ се паралелни и полуправите SB и $S'B'$ се паралелни. Забележуваме дека ако кај полуправите OA и $O'A'$ ги повлечеме отсечките OO' и AA' , т.е. отсечката чии крајни точки се почетните точки на полуправите и отсечка чии крајни точки се било кои други две точки од полуправите, тогаш тие нема да се сечат (Провери!). За вакви полуправи велиме дека имаат *иста насока*. Но, ако кај полуправите SB и $S'B'$ на ист начин ги повлечеме отсечките SS' и BB' , тогаш тие ќе се сечат (Провери!). За вакви полуправи велиме дека имаат *спротивна насока*.



Во претходната лекција се запознавме со поимот растојание. Во врска со овој поим ја имаме следнава дефиниција.

Растојанието меѓу кружните точки A и B на отсечката AB го нарекуваме *должина* на отсечката AB . За означување на должината на отсечката AB ја користиме ознаката $\overline{AB}$.

Пример 3. а) На цртежот се прикажани отсечките AB и CD . Нивните должини се: $\overline{AB} = 43\text{ mm}$ и $\overline{CD} = 3\text{ cm}$, односно $\overline{AB} > \overline{CD}$.



б) Измери ги отсечките MN и PQ . Сигурно доби $\overline{MN} = \overline{PQ}$, односно отсечките MN и PQ имаат еднакви должини.



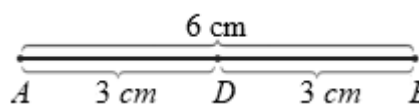
За две отсечки кои што имаат еднаква должина велиме дека се *еднакви* или *складни* отсечки. За отсечката AB велиме дека е *подолга* од отсечката CD ако $\overline{AB} > \overline{CD}$.

Пример 4. Дадени се отсечките AB со должина $1\text{ m } 2\text{ dm}$, CD со должина 15 dm , EF со должина 120 cm и GH со должина 150 cm . Кои од овие отсечки се еднакви?

Решение. Имаме $1\text{ m } 2\text{ dm} = 120\text{ cm}$ и $15\text{ dm} = 150\text{ cm}$, од каде следува дека еднакви се отсечките AB и EF , и еднакви се отсечките CD и GH .

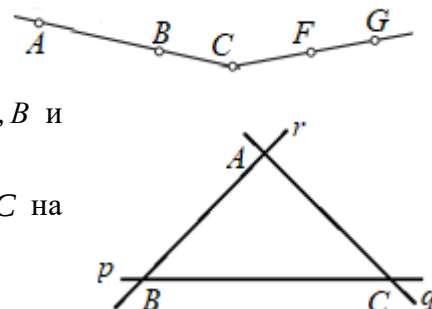
За точката D од отсечката AB која е еднакво оддалечена од крајните точки A и B на отсечката AB велиме дека е *средна точка* или *средица* на отсечката AB .

Пример 5. На отсечката AB е дадена точка D таква што $\overline{AD} = \overline{DB} = 3\text{ cm}$. Значи, точката D е еднакво оддалечена од крајните точки A и B на отсечката AB , т.е. таа е нејзината средна точка.



Задачи за вежби

11. Колку отсечки се дадени на цртежот?
12. а) Колку отсечките се определени со точките A, B и C ?
 б) Колку полуправи определуваат точките A и C на правата q ?
 в) Колку полуправи има со почетна точка B ?
13. Дадени се отсечките AB, CD и EF . Ако AB и CD се складни и CD и EF се складни, какви се отсечките AB и EF ?
14. На една права се означени три точки. Колку полуправи и колку отсечки се определени со тие точки?



2.4 Операции со отсечки

На цртежот е дадена полуправа OS и на неа е означена точка M која од точката O се наоѓа на растојание 3 cm . Јасно, на полуправата не постои друга точка која од точката O е оддалечена 3 cm . Ова важи за секој број поголем од нула.



Ако m е број поголем од нула тогаш на полуправата OS лежи само една точка M таква што $\overline{OM} = m$.

Ова својство може да го искористиме за цртање на еднакви отсечки само со помош на линијар и шестар. Добивањето цртеж направен само со линија и шестар во геометријата се вика *конструкција* .

Пример 1. Конструирај отсечка што е еднаква на дадена отсечка AB .

Решение. Конструкцијата ја реализираме на следниов начин:

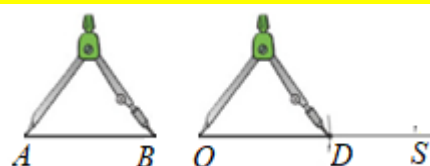
1) Со линијар, како што е покажано на цртежот, цртаме полуправа OS



2) Го отвораме шестарот, така што неговиот отвор ќе биде еднаков на должината на отсечката AB ,

3) Отворениот шестар го забодуваме на почетокот на полуправата OS и со истиот отвор ја означуваме точката D .

4) Отсечките AB и OD се еднакви.

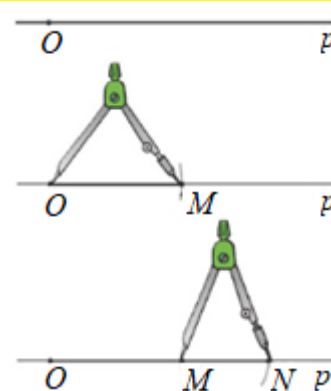
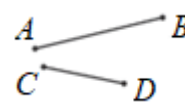


Постапката од пример 1 е позната како *графичко пренесување* на отсечка на дадена полуправа и истата се користи за конструктивно собирање и одземање на отсечки.

Пример 2. Нека се дадени отсечките AB и CD . Конструирај отсечка која е еднаква на збирот на отсечките AB и CD .

Решение. Конструкцијата ја реализираме со следниве чекори:

- 1) Цртаме права p .
- 2) На правата p означуваме точка O .
- 3) Во точката O конструираме отсечка OM која е еднаква на отсечката AB .
- 4) Со шестарот земаме должина еднаква на должината на отсечката CD , ја забодуваме иглата во точката M и на страната на која не е точката O определуваме точка N таква што $\overline{MN} = \overline{CD}$.
- 5) Отсечката ON е еднаква на збирот на отсечките AB и CD .



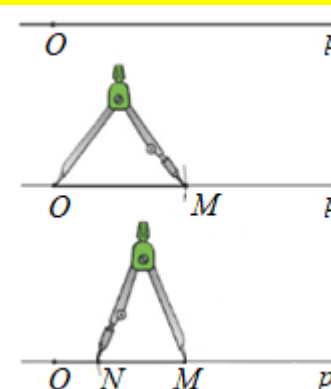
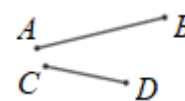
За две отсечки велиме дека се *надоврзани* ако им е заедничка само една крајна точка.

Со надоврзување на отсечки ние всушност го реализиравме графичкото собирање на две отсечки. Нека се дадени три отсечки. Ако прво собереме две отсечки, а потоа на добиениот збир ја надоврземе третата отсечка ние всушност сме го определиме збирот на трите отсечки. На потполно ист начин се определува збирот на четири и повеќе отсечки.

Пример 3. Нека се дадени отсечките AB и CD , $\overline{AB} > \overline{CD}$. Конструирај отсечка која е еднаква на разликата на отсечките AB и CD .

Решение. Конструкцијата ја реализираме со следниве чекори:

- 1) Цртаме права p .
- 2) На правата p означуваме точка O .
- 3) Во точката O конструираме отсечка OM која е еднаква на отсечката AB .
- 4) Со шестарот земаме должина еднаква на должината на отсечката CD , ја забодуваме иглата во точката M и на страната на која е точката O определуваме точка N таква што $\overline{MN} = \overline{CD}$.
- 5) Отсечката ON е еднаква на разликата на отсечките AB и CD .

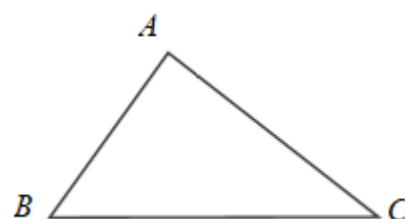


Пример 4. Дадени се неколинеарните точки A, B и C . Графички провери го неравенството

$$\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}.$$

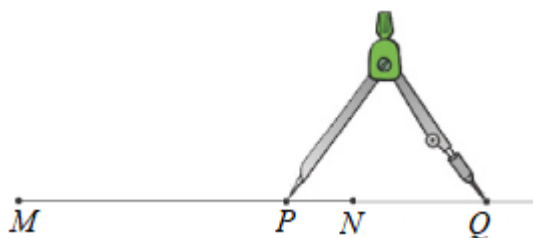
Решение. Проверката ја вршиме на следниов начин:

- 1) Конструираме отсечка $\overline{MN} = \overline{BC}$.



2) На полуправата MN го конструираме збирот на отсечките AC и AB , така што $\overline{MP} = \overline{AC}$ и $\overline{PQ} = \overline{AB}$, со што ја добиваме отсечката MQ .

3) Од цртежот гледаме дека $\overline{MQ} > \overline{MN}$, што значи дека даденото неравенство е точно.



Задачи за вежби

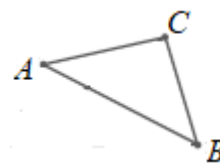
15. Нацртај две еднакви отсечки, а потоа графички собери ги.

16. Нацртај две отсечки AB и CD со различна должина, а потоа графички собери ги и одземи ги.

17. Нацртај три отсечки, а потоа определи го нивниот збир.

Дадени се неколинеарните точки A, B и C . Графички провери ги неравенствата

а) $\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$, б) $\overline{AB} < \overline{BC} + \overline{AC}$, в) $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$.



2.5 Кружница и круг

Минатата учебна година се запозна со кружницата и кругот. Во продолжени ќе ги прошириш своите знаења за овие две важни геометриски фигури.

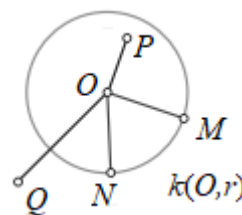
Множеството од сите точки во рамнината, што се наоѓаат на дадено растојание r од една фиксна точка O од таа рамнина го нарекуваме *кружница*.

Точката O ја нарекуваме *центар*, а секоја отсечка, која го сврзува центарот O со која било точка од кружницата, ја нарекуваме *радиус на кружницата*; и нејзината должина ја нарекуваме *радиус на кружницата*.

Кружницата со центар O и радиус r ја означуваме со $k(O, r)$. Значи, $k(O, r) = \{A \mid \overline{OA} = r\}$.



Пример 1. На цртежот е дадена кружница $k(O, r)$ и се означени точките M, N, P и Q . Точките M и N припаѓаат на кружницата, што значи отсечките OM и ON се нејзини радиуси, т.е. важи $\overline{OM} = \overline{ON} = r$. Точките P и Q не припаѓаат на кружницата, па затоа OP и OQ не се нејзини радиуси. Притоа важи $\overline{OP} < r$ и $\overline{OQ} > r$.



Од дефиницијата на кружницата следува дека:

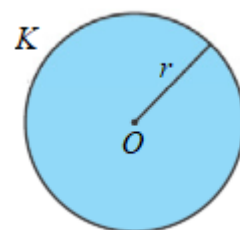
- 1) Со дадена точка како центар и даден радиус може да се нацрта само една кружница.
- 2) Една кружница е напoлно определена ако се дадени центарот и радиусот на кружницата.

Нека е дадена кружницата $k(O, r)$. Ако за точката P важи $\overline{OP} < r$, тогаш велиме дека P е *внатре* во кружницата k (види го цртежот). Ако точката Q важи $\overline{OQ} > r$, тогаш велиме дека Q е *надвор* од кружницата k (види го цртежот).

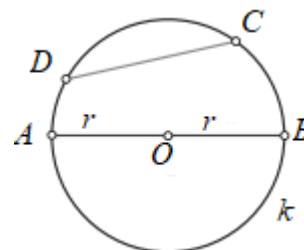
Од претходните разгледувања заклучуваме дека во однос на дадена кружница $k(O, r)$ во рамнината една точка може да припаѓа на k , да е внатре во k или да е надвор од k . Значи, кружницата k ја дели рамнината на два дела (области) – внатрешен дел (*внатрешна област*) и надворешен дел (*надворешна област*). Во врска со ова ја имаме следнава дефиниција.

Геометриската фигура (2Д формата) составена од една кружница $k(O, r)$ и нејзината внатрешна област ја нарекуваме *круг*.

Центарот O и радиусот r на кружницата ги нарекуваме *центар* и *радиус* на кругот. Кругот со центар O и радиус r го означуваме со $K(O, r)$. Значи, $K(O, r) = \{A \mid \overline{OA} \leq r\}$.



На цртежот е прикажана кружница $k(O, r)$, на која се земени точките A, B, C и D . Забележуваме дека отсечката AB го содржи центарот на кружницата, а отсечката CD не го содржи центарот на кружницата. Јасно, секоја отсечка чии крајни точки припаѓаат на кружницата или го содржи или не го содржи центарот на кружницата. Во врска со ова ја имаме следнава дефиниција.

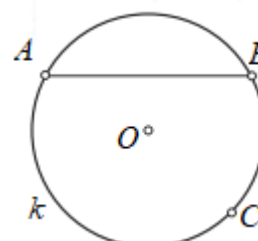


Нека C и D се различни точки на кружницата $k(O, r)$. Отсечката CD ја нарекуваме *тетива* на кружницата $k(O, r)$ и на кругот $K(O, r)$.

Тетивата што минува низ центарот на кружницата (кругот) ја нарекуваме *дијаметар* на кружницата (кругот). За дијаметарот најчесто се користи ознаката d , $d = 2r$.

Пример 2. а) Дадена е кружница $k(O, 2\text{ cm})$. Радиусот на оваа кружница е $r = 2\text{ cm}$, са нејзиниот дијаметар е $d = 2r = 2 \cdot 2 = 4\text{ cm}$.

б) На цртежот е дадена кружница $k(O, r)$, на неа е повлечена тетива AB и е означена точка C . Забележуваме дека тетивата AB



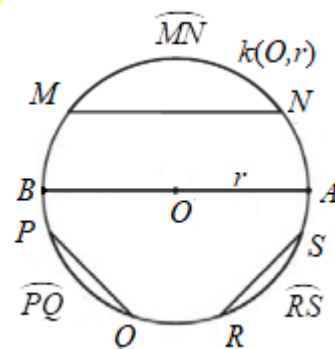
ја дели кружницата на два дела, при што точката C припаѓа на поголемиот дел од кружницата.

Кружен лак $\widehat{AB}$ е делот од кружницата $k(O, r)$ кој се наоѓа меѓу точките A и B , заедно со точките A и B . Притоа велиме дека кружниот лак $\widehat{AB}$ соодветствува на тетивата AB .

Точките A и B на кружницата $k(O, r)$ определуваат два кружни лаци. Точката C припаѓа на поголемиот кружен лак, и во некои случаи поголемиот кружен лак го означуваме со $\widehat{ACB}$.

Пример 3. а) Точките M, N, P, Q, R и S припаѓаат на иста кружница $k(O, r)$. На цртежот се дадени кружните лаци $\widehat{MN}$, $\widehat{PQ}$ и $\widehat{RS}$ (ги разгледуваме помалите од двата лаци определени со две точки). Притоа, важи $\widehat{PQ} = \widehat{RS}$, па затоа и должините на кружните лаци кои им соодветствуваат се еднакви, т.е. $\widehat{RS} = \widehat{PQ}$. Меѓутоа за тетивите MN и PQ важи $\widehat{MN} > \widehat{PQ}$, па затоа важи $\widehat{MN} > \widehat{PQ}$.

б) На цртежот е даден дијаметарот AB . Со него се определени два кружни лаци. Јасно, $\widehat{AB} = \widehat{AB}$.



Од пример 3 можеме да заклучиме дека важи тврдењево.

Во една кружница на поголема тетива и соодветствува поголем кружен лак. Кружните лаци над дијаметарот се еднакви.

Задачи за вежби

18. Дадени се две точки A и B . Нацртај кружница со центар A и радиус $\overline{AB}$, а потоа нацртај кружница со центар B и радиус $\overline{BA}$. Што забележуваш?
19. Нацртај две кружници кои имаат заедничка тетива.
20. На кружница означи три различни точки. Колку тетиви определуваат овие три точки? А колку лаци определуваат трите точки? Образложи!
21. Нацртај две кружници со заеднички центар O и радиуси $r_1 = 2\text{ cm}$ и $r_2 = 3\text{ cm}$. Каде лежи точката A за која важи:
 - а) $\overline{OA} < 2\text{ cm}$,
 - б) $2\text{ cm} < \overline{OA} < 3\text{ cm}$,
 - в) $3\text{ cm} < \overline{OA}$,
 - г) $2\text{ cm} \leq \overline{OA} \leq 3\text{ cm}$,
 - д) $\overline{OA} = 3\text{ cm}$.
22. Нацртај кружница со радиус $r = 2,5\text{ cm}$. Колкава е должината на најголемата тетива која можеш да ја повлечеш во неа?
23. Нацртај кружница $k(O, 2\text{ cm})$. Избери точка A , а потоа нацртај тетива AB таква што $\overline{AB} = 3\text{ cm}$. Колку тетиви постојат со ова својство?

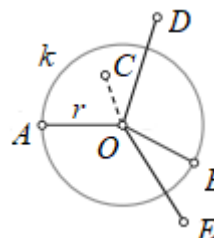
2.6 Заемна положба на кружница и права и на две кружници

Потсети се!

Ако е дадена кружница и точка во истата рамнина, тогаш можни се следниве три случаи:

- точката припаѓа на кружницата,
- точката припаѓа на внатрешната област на кружницата и
- точката припаѓа на надворешната област на кружница.

На цртежот се дадени кружница $k(O, r)$ и точки A, B, C, D и E . Точките A и B припаѓаат на кружницата k , точката C е во внатрешната област на кружницата k , а точките D и E се во надворешната област на кружницата k .



Овде да забележиме дека кога станува збор за круг и точка, тогаш можни се два случаја и тоа:

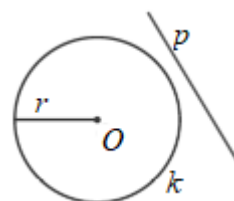
- точката припаѓа на кругот, т.е. лежи на кругот, и
- точката не припаѓа на кругот, т.е. лежи надвор од кругот.

На горниот цртеж точките A, B и C лежат на кругот $K(O, r)$, а точките D и E лежат надвор од кругот $K(O, r)$.

Што се однесува до односот на права и кружница разликуваме три случаи:

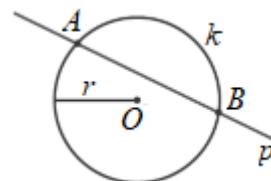
- 1) Правата p и кружницата $k(O, r)$ немаат ниту една заедничка точка, т.е. правата и кружницата не се сечат.

Притоа растојанието од центарот O до правата p е поголемо од радиусот на кружницата r .



- 2) Правата p и кружницата $k(O, r)$ имаат две заеднички точки. Во овој случај велиме дека правата и кружницата се сечат. Правата p ја нарекуваме *секанта* на кружницата k . Јасно, ако A и B се пресечните точки, тогаш отсечката AB е тетива на кружницата k .

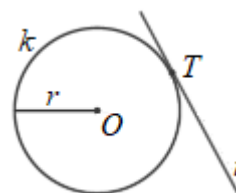
Притоа растојанието од центарот O до правата p е помало од радиусот на кружницата r .



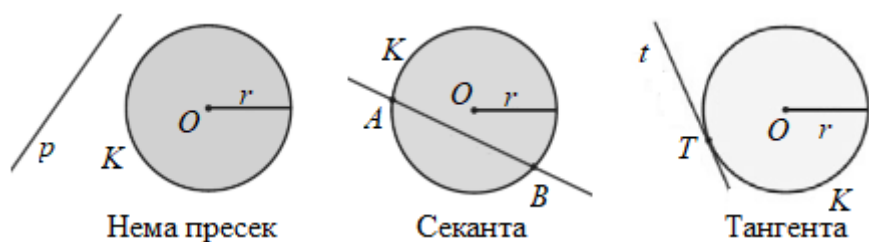
- 3) Правата t и кружницата $k(O, r)$ имаат една заедничка точка.

Во овој случај велиме дека правата и кружницата се допират. Правата t ја нарекуваме *тангентата* (допирка) на кружницата k .

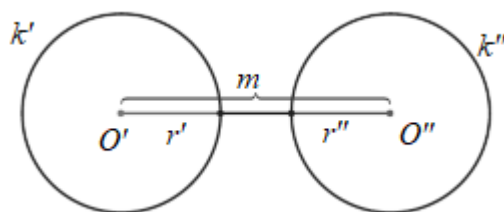
Притоа растојанието од центарот O до правата t е еднакво на радиусот на кружницата r , а радиусот OT е нормален на тангентата t .



Правата и кругот го имаат истиот заемен однос како и правата и кружницата. Притоа пресеците им се разликуваат само во случајот на секантата. Во овој случај пресекот не се само две точки, туку тоа е отсечка, односно тетива.



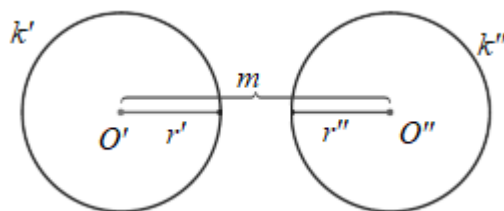
Нека се дадени кружниците $k'(O', r')$ и $k''(O'', r'')$. Растојанието $m = \overline{O'O''}$ го нарекуваме *централно растојание* за кружниците k' и k'' .



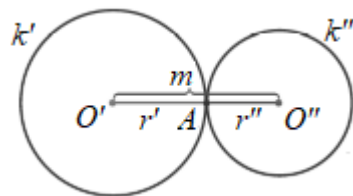
Во следните разгледувања со помош на централното растојание ќе определиме во каков однос се две кружници.

Ќе разгледаме неколку случаи.

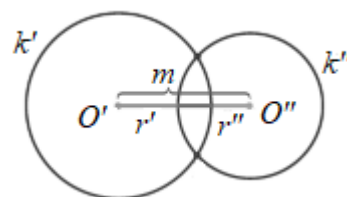
- 1) Кружниците надворешно не се допираат, како на цртежот, т.е. кружниците не се сечат. Тогаш централното растојание m е поголемо од збирот на радиусите. Важи и обратното, т.е. ако $m > r' + r''$, тогаш кружниците надворешно не се допираат, односно не се сечат.



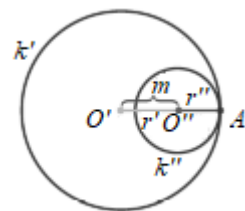
- 2) Кружниците надворешно се допираат, како на цртежот, т.е. пресекот на кружниците е точка. Тогаш централното растојание е еднакво на збирот на радиусите. Важи и обратното, т.е. ако $m = r' + r''$, тогаш кружниците надворешно се допираат и пресекот на кружниците е точка.



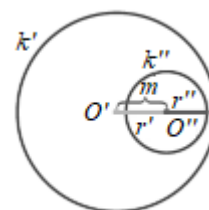
- 3) Кружниците се сечат во две точки, како на цртежот. Тогаш централното растојание е поголемо од секој од радиусите, но е помало од нивниот збир, т.е. $r' < m$, $r'' < m$ и $m < r' + r''$. Важи и обратното, т.е. ако $r' < m$, $r'' < m$ и $m < r' + r''$, тогаш кружниците се сечат во две точки.



- 4) Нека $r' > r''$. Кружниците внатрешно се допираат, како на цртежот, т.е. пресекот на кружниците е точка. Тогаш централното растојание е еднакво на разликата на радиусите. Важи и обратното, т.е. ако $m = r' - r''$, тогаш кружниците внатрешно се допираат и пресекот на кружниците е точка.



- 5) Нека $r' > r''$. Кружниците не се допираат внатрешно, т.е. не се сечат. Тогаш централното растојание е помало од разликата на радиусите. Важи и обратното, т.е. ако $m < r' - r''$, тогаш кружниците внатрешно не се допираат и не се сечат.



Задачи за вежби

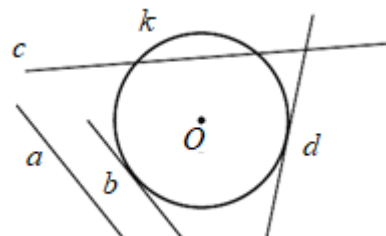
24. Дадена е кружница со радиус $r = 3\text{ cm}$ и точка A , чие растојание до центарот на кружницата е:

- а) 2 cm , б) $2,9\text{ cm}$, в) 30 mm , г) 42 mm .

Каква положба има точката A во однос на кружницата?

25. На цртежот е дадена кружница k и четири прави a, b, c, d . Која од овие прави е:

- а) тангента на k ,
б) секанта на k ,
в) нема заеднички точки со k ?

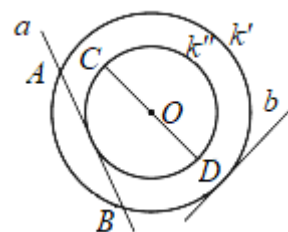


26. Нацртај кружница $k(O, 2\text{ cm})$ и права p што ја сече кружницата. Што е пресекот на k и p , а што е пресекот на кругот $K(O, 2\text{ cm})$ и p .

27. На цртежот се дадени две кружници $k'(O, R)$ и $k''(O, r)$.

Кои од следниве реченици се точни:

- а) Правата a е тангента на k'' и е секанта на k' .
б) Правата b е тангента на k' .
в) Правата b е тангента на k'' .
г) Отсечката CD е тетива на k' .
д) Отсечката CD е дијаметар на k'' .
е) Отсечката AB е тетива на k'' .



28. Нацртај кружница $k(O; 2,5\text{ cm})$ и на неа земи точка T . Со помош на два линијара нацртај ја тангентата на кружницата k во точката T .

29. Во крајните точки на еден дијаметар на кружницата $k(O, 2\text{ cm})$ се повлечени тангенти. Каква заемна положба имаат тие тангенти? Зошто?

30. Дадени се две паралелни прави p и q такви што растојанието меѓу нив е еднакво на 5 cm . Колкав е радиусот на кружница која ги допира правите p и q ?

31. Кружниците $k'(O'; 2\text{ cm})$ и $k''(O''; 4\text{ cm})$ надворешно се допираат. Определи го нивното централно растојание.

32. Нацртај две кружници k' и k'' со радиуси $r' = 2\text{ cm}$, $r'' = 3\text{ cm}$ и централно растојание:

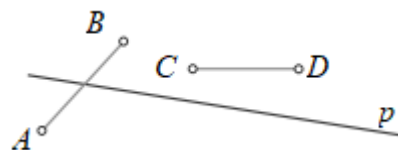
- а) $\overline{O'O''} = 7\text{ cm}$, б) $\overline{O'O''} = 5\text{ cm}$, в) $\overline{O'O''} = 4\text{ cm}$, г) $\overline{O'O''} = 1\text{ cm}$.

33. Каква е заемната положба на кружниците $k'(O', r')$ и $k''(O'', r'')$ за кои важи:

- а) $r' = 5\text{ cm}, r'' = 17\text{ cm}, \overline{O'O''} = 22\text{ cm}$, б) $r' = 10\text{ cm}, r'' = 14\text{ cm}, \overline{O'O''} = 3\text{ cm}$
в) $r' = 6\text{ cm}, r'' = 8\text{ cm}, \overline{O'O''} = 20\text{ cm}$, г) $r' = 10\text{ cm}, r'' = 4\text{ cm}$ и $\overline{O'O''} = 3\text{ cm}$,
д) $r' = 12\text{ cm}, r'' = 8\text{ cm}$ и $\overline{O'O''} = 4\text{ cm}$, ё) $r' = 15\text{ cm}, r'' = 12\text{ cm}$ и $\overline{O'O''} = 0\text{ cm}$.

2.7 Полурамнина. Агол

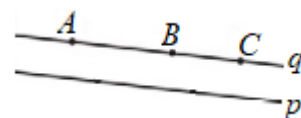
На цртежот се дадени права p и точките A, B, C и D , кои не припаѓаат на правата p , при што се повлечени отсечките AB и CD . Како што гледаме отсечката AB ја сече правата p , а отсечките CD не ја сече правата p . Во врска со претходно кажаното ја имаме следнава дефиниција.



Нека се дадени права a и точки M и N кои не припаѓаат на a . Ако отсечката MN ја сече правата a , тогаш велиме дека точките M и N се наоѓаат (лежат) на *различни страни* на правата a . Ако отсечката MN не ја сече правата a , тогаш велиме дека точките M и N се наоѓаат (лежат) на *иста страна* на правата a .

Пример 1. На горниот цртеж точките A и B лежат на различни страни на правата p , а точките C и D лежат на иста страна на правата p . Како што можеме да видиме, точката B е на иста страна на правата p со точките C и D .

Ако земеме две паралелни прави p и q , тогаш сите точки од правата q се на иста страна од правата p (Зошто?). Значи, од иста страна на правата p има бесконечно многу точки. Во врска со ова ја имаме следнава дефиниција.

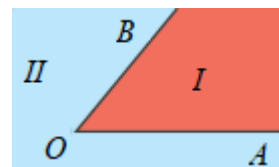


Множеството од сите точки во рамнината што лежат на иста страна од дадена права p , заедно со точките од таа права го нарекуваме полурамнина. Правата p ја нарекуваме *раб* (*гранична права*) на таа полурамнина.



На цртежот се прикажани две полуправи OA и OB со заеднички почеток O . Тие рамнината ја делат на два дела: I и II .

Геометриската фигура (2Д формата) формирана од две полуправи OA и OB со заеднички почеток O и едниот дел од рамнината определен со нив ја нарекуваме *агол*. Полуправите OA и OB ги нарекуваме *краци* на аголот, а точката O ја нарекуваме *теме* на аголот.



Делот од рамнината што му припаѓа на еден агол, без краците се нарекува *внатрешна област* (*област*) на аголот. Внатрешната област на аголот ќе ја означуваме со кружен лак. Точките кои при-



паѓаат на внатрешната област ги нарекуваме *внатрешни точки* на аголот.

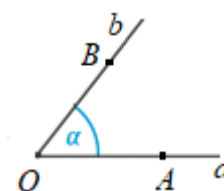
Аглите ги означуваме на повеќе начини. Така аголот прикажан на цртежот може да се означи на следниве начини:

- со големата латинична буква со кој е означено темето и пред него симболот $\angle$, т.е. $\angle O$,

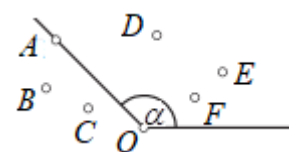
- со мала буква од грчката азбука: α (алфа), β (бета), γ (гама), δ (делта) итн.

- со три големи латинични букви пред кои е знакот $\angle$, т.е. $\angle AOB$,

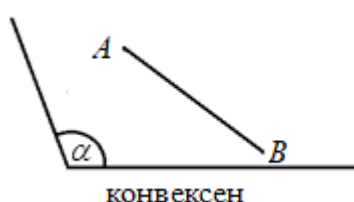
- со именување на полуправите Oa и Ob пред кои е знакот $\angle$, т.е. $\angle aOb$..



Пример 2. На цртежот е прикажан аголот α . На овој агол му припаѓаат точките A, D, E и F . Точките D, E и F се внатрешни точки за аголот α .



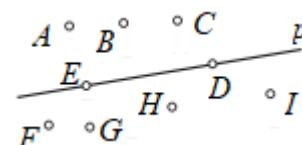
На цртежите се дадени аглите α и β . Забележуваме дека ако било кои две внатрешни точки на аголот α ги поврземе со отсечка, тогаш отсечката не ги сече краците на аголот α . За ваквиот агол велиме дека е *конвексен*. Меѓутоа, за аголот β точките M и N се внатрешни и отсечката MN ги сече неговите краци. За ваквиот агол велиме дека е *неконвексен*.



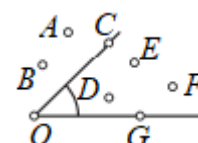
Задачи за вежби

34. а) Кои од означените точки на цртежот се во иста полупрамнина со точката C .

б) Кои од означените точки на цртежот се во иста полупрамнина со точката H .

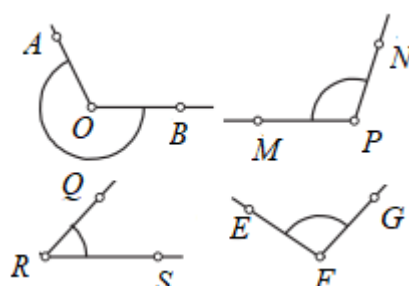


35. Именувај ги темето и краците на аголот прикажан на цртежот. Кои од означените точки припаѓаат на внатрешната област на овој агол?



36. Кој од аглите на цртежот е конвексен, а кој е неконвексен?

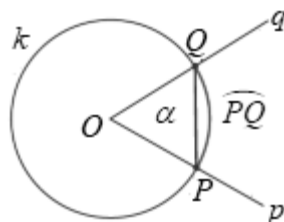
37. Нацртај еден конвексен агол α и еден агол β кој е неконвексен.



2.8 Централен агол. Графичко собирање и одземање на агли

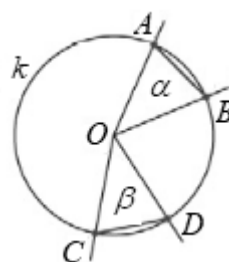
Аголот чиешто теме се наоѓа во центарот на дадена кружница го нарекуваме *централен агол*.

На цртежот е дадена кружница $k(O, r)$ и централен агол $\alpha = \angle POQ$. Краците на $\angle POQ$ ја сечат кружницата k во точките P и Q и со тоа е определен кружниот лак $\widehat{PQ}$ на кружницата k . Велиме дека кружниот лак $\widehat{PQ}$ и централниот агол $\angle POQ = \angle POQ$ се *соодветни* еден на друг.



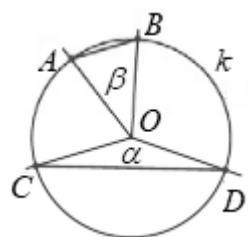
Два централни агли на кружници со еднакви радиуси се *еднакви* ако им се еднакви соодветните кружни лаци.

Пример 1. На цртежот се прикажани два централни агли α и β чии соодветни кружни лаци $\widehat{AB}$ и $\widehat{CD}$ се еднакви, односно $\widehat{AB} = \widehat{CD}$. Значи, $\alpha = \beta$.



Од два централни агли на кружници со еднакви радиуси *поголем* е аголот на кој му соодветствува поголем кружен лак.

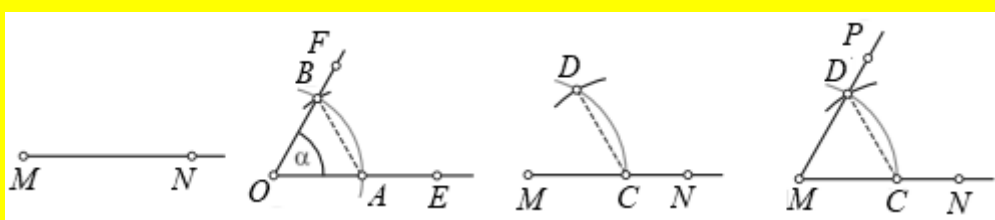
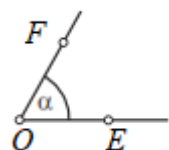
Пример 2. На цртежот се прикажани два централни агли α и β чии соодветни кружни лаци се $\widehat{AB}$ и $\widehat{CD}$. Од $\widehat{CD} > \widehat{AB}$ следува $\alpha > \beta$.



Пример 3. Даден е $\alpha = \angle EOF$. Конструирај агол еднаков на аголот α .

Решение. Конструкцијата ја реализираме на следниов начин.

- 1) Цртаме полуправа MN .
- 2) Со произволен отвор на шестарот на дадениот агол $\alpha = \angle EOF$ цртаме кружница со центар во O која краците на аголот ги сече во точките A и B .
- 3) Со истиот отвор на шестарот цртаме дел од кружницата со центар во точката M .
- 4) Со отворот на шестарот ја „земаме“ тетивата AB (кружниот лак $\widehat{AB}$). Го забодуваме шестарот во точката C и го пресекуваме претходно нацртаниот лак со што ја добиваме точката D .



5) Цртаме полуправа MP со што го добиваме $\angle NMP = \alpha$.

Пример 4. Дади се агли α и β . Графички определи го нивниот збир.

Решение. Конструкцијата ја реализираме со следниве чекори и истата е дадена на цртежот.

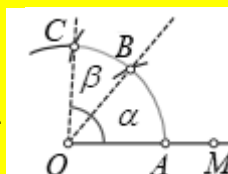


1) Цртаме полуправа OM , а потоа со ист отвор на шестарот конструираме кружни лаци на агли α и β и на полуправата OM .

2) Конструираме $\angle AOB = \alpha$.

3) Конструираме $\angle BOC = \beta$ (види цртеж).

4) Имаме $\angle AOC = \alpha + \beta$, со што бараниот збир е графички определен.



Пример 5. Дадени се агли α и β , $\alpha > \beta$. Графички определи ја разликата $\alpha - \beta$.

Решение. Конструкцијата ја реализираме со следниве чекори и истата е дадена на цртежот.

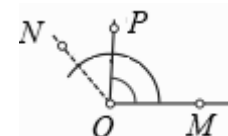


1) Цртаме полуправа OM , а потоа со ист отвор на шестарот конструираме кружни лаци на агли α и β и на полуправата OM .

2) Конструираме $\angle MON = \alpha$.

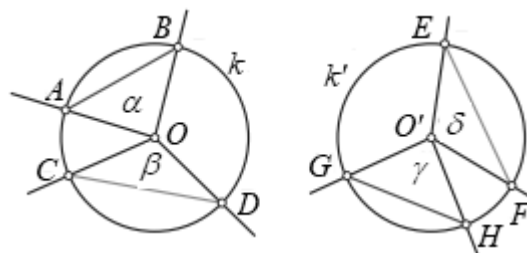
3) Конструираме $\angle NOP = \beta$ (види цртеж).

4) Имаме $\angle MOP = \alpha - \beta$, со што бараната разлика е графички определена.



Задачи за вежби

38. На цртежот се дадени две кружници k и k' со еднакви радиуси. На кружниците се дадени тетиви $\overline{GH} = 2\text{ cm}$, $\overline{AB} = 2\text{ cm}$, $\overline{CD} = 25\text{ mm}$ и $\overline{EF} = 2,5\text{ cm}$. Кои од означените агли се еднакви меѓу себе?



39. Нацртај кружница $k(O, 4\text{ cm})$, а потоа нејзина тетива AB , $\overline{AB} = 5\text{ cm}$. Означи го помалиот централен агол кој соодветствува на тетивата AB .

40. Нацртај остар агол α , а потоа конструирај агол β еднаков на аголот α .

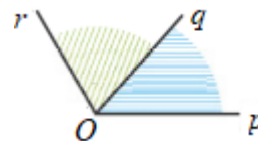
41. Нацртај тап агол γ , а потоа конструирај агол δ еднаков на аголот γ .

42. Нацртај два остри агли α и β , а потоа графички определи го нивниот збир.

43. Нацртај два агли α и β , $\alpha > \beta$, а потоа графички определи ја нивната разлика.

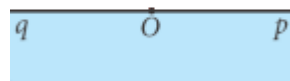
2.9 Соседни агли, видови агли

Аглите $\angle pOq$ и $\angle qOr$ кои имаат заеднички крак Oq , но немаат заедничка внатрешна точка ги нарекуваме *соседни* или *надоврзани* агли.

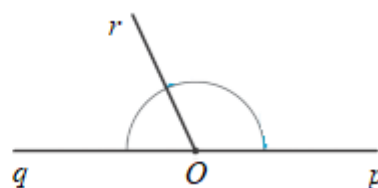
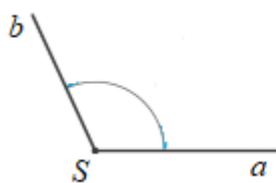


Аголот чии краци Op и Oq формираат права го нарекуваме *рамен агол* $\angle pOq$.

Од дефиницијата за еднаквост на агли следува дека било кои два рамни агли се еднакви. Јасно, рамниот агол е конвексен.



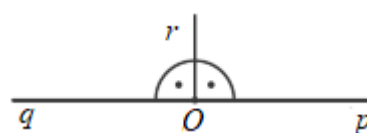
Рамниот агол е поголем од сите конвексни агли кои не се рамни агли. Навистина, нека $\angle aSb$ е произволен конвексен агол кој не е рамен. Ако го пренесеме на рамниот агол така што краците Sa и Op се совпаднаат, тогаш имаме



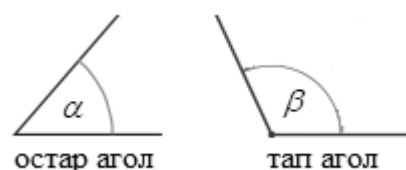
$$\angle pOq = \angle pOr + \angle rOq = \angle aSb + \angle rOq > \angle aSb.$$

Два соседни агли $\angle pOq$ и $\angle qOr$ чиј збир е еднаков на рамниот агол ги нарекуваме *напоредни агли*.

Аголот, кој е еднаков на својот напореден агол го нарекуваме *прав агол*. Правиот агол се означува како што е прикажано на цртежот.



Аголот кој е помал од правиот агол го нарекуваме *остар агол*, а аголот кој е поголем од правиот агол и е помал од рамниот агол го нарекуваме *тап агол*.

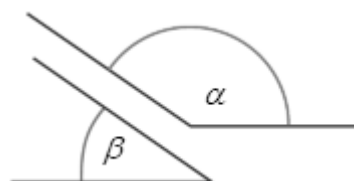


Во врска со рамниот и правиот агол се и следниве дефиниции.

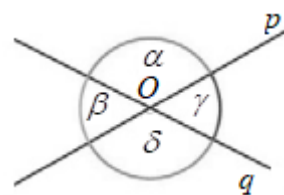
За два агли велиме дека се *суплементни* ако нивниот збир е еднаков на рамен агол.

За два агли велиме дека се *комплементни*, ако нивниот збир е прав агол.

Од претходните дефиниции следува дека секои напоредни агли се и суплементни, но за да суплементните агли се напоредни, тие треба да се соседни. На цртежот се прикажани суплементни агли кои не се напоредни.



Две прави кои се сечат формираат четири агли помали од рамниот агол. На цртежот се прикажани правите p и q кои се сечат во точката O . Притоа аглите α и δ , како и аглите β и γ се такви што по два нивни крака формираат рамен агол. Овие агли ги нарекуваме *накрсни агли*.



Ако φ е збирот на аглите α и γ , тогаш $\alpha = \varphi - \gamma$. Но, φ е рамен агол, кој е еднаков на збирот на аглите γ и δ , па затоа $\delta = \varphi - \gamma$. Според тоа, $\alpha = \varphi - \gamma = \delta$. Аналогно се докажува дека $\beta = \gamma$. Според тоа, точно е следново тврдење.

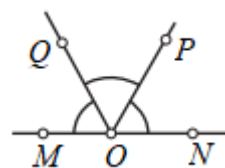
Накрсните агли се еднакви меѓу себе.

Ако еден од аглите кои се добиваат при пресекот на две прави p и q е прав агол, тогаш и другите три агли се прави, како накрсни и суплементни агли. Во овој случај велиме дека правите p и q се *заемно нормални* и пишуваме $p \perp q$.

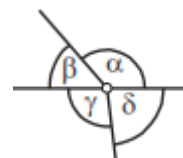
Задачи за вежби

44. Каков агол формираат стрелките на часовникот во:
 - а) 14 часот,
 - б) 15 часот,
 - в) 17 часот,
 - г) 18 часот.
45. Нацртај три полуправи OA, OB, OC така што $\angle AOB$ е прав агол и $\angle BOC$ е остар агол. Од кој вид е $\angle AOC$.
46. Нацртај тап агол $\angle MON$ и остар агол $\angle NOP$, така што $\angle MOP$ да биде рамен агол.
47. а) Нацртај остар агол и неговиот накрсен агол.
 б) Нацртај тап агол и неговиот накрсен агол.

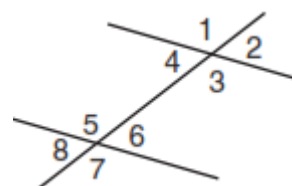
48. Именувај ги соседните агли прикажани на цртежот.



49. Нацртај еден тап агол α , а потоа нацртај го неговиот напореден агол β . Од кој вид е аголот β ?



50. Именувај ги паровите напоредни агли прикажани на цртежот.



51. а) Испиши ги паровите накрсни агли прикажани на цртежот.
 б) Испиши ги паровите напоредни агли прикажани на цртежот.

2.10 Мерење агли. Аритметички операции со агли

Според кажаното во претходната лекција заклучуваме дека, за да споредиме два агли доволно е во нивните темиња, како центри, да нацртаме кружници со еднакви радиуси и потоа да ги споредиме кружните лаци кои двата агли ги отсекуваат. Значи, аглите може да се споредуваат, па затоа тие може и да се мерат.

Да ги разгледаме рамниот агол $\angle AOB$ и соодветниот лак, кој всушност е полукружницата на цртежот. Како што гледаме полукружницата е поделена на 180 еднакви делови. Аголот што е 180-ти дел од рамниот агол го земаме за основна единица за мерење агли. Неговата големина ја нарекуваме *аголен степен* или само *степен*. Означуваме: 1° и читаме

„еден степен“. Значи, рамниот агол има 180° , па затоа правиот агол кој е половина од рамниот агол има 90° .

Инструментот за мерење агли е наречен *агломер* и истиот е прикажан на цртежот. Агломерот има форма на полукруг кој најчесто е направен од тенка провидна пластика. Истиот е поделен на 180 еднакви делови и секој дел означува 1° . На скалата се означени броеви од 0 до 180, означена е основната линија и центарот на кружницата (види го цртежот).

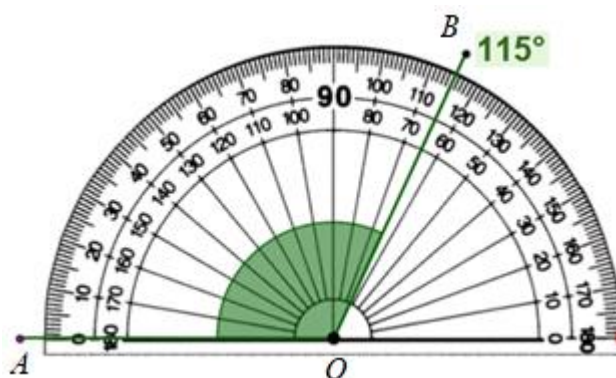
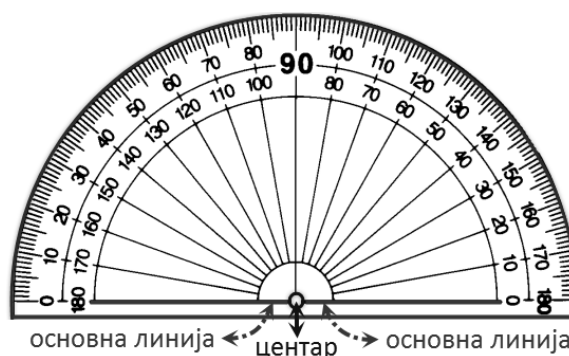
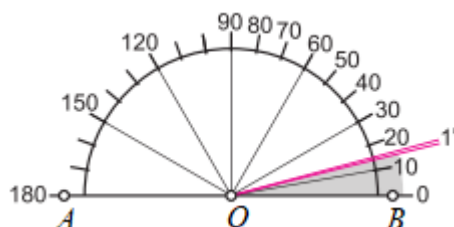
Со користењето на агломерот се запозна во претходните одделенија. Да повториме!

Пример 1. На цртежот е показано како се мери даден агол $\angle AOB$.

Постапката е следна:

1) Го поставуваме агломерот така што неговиот центар ќе се поклопи со темето O на $\angle AOB$, а едниот крак на $\angle AOB$, во случајов кракот OA , ќе се поклопи со основната линија на агломерот.

2) Потоа гледаме со која цртичка од агломерот се поклопил вториот крак на аголот, во случајот кракот OB и читаме колку делови има меѓу двата крака. Во случајов имаме 115 делови, што значи дека $\angle AOB = 115^\circ$.

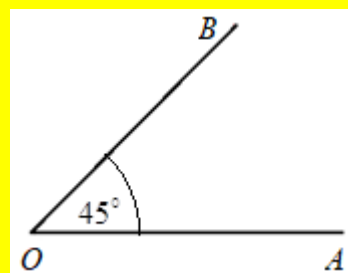
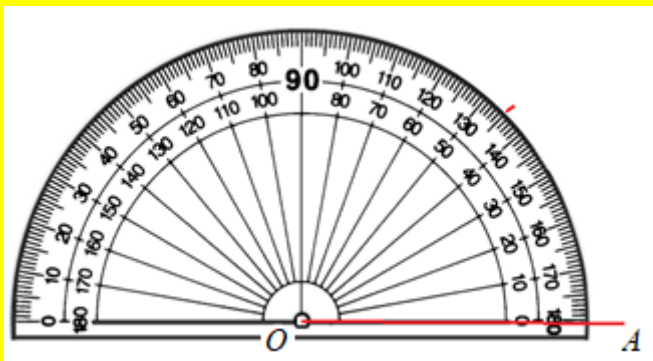


Во следниот пример ќе покажеме како се црта агол за кој е дадена неговата мерка.

Пример 2. Со помош на линијар и агломер нацртај агол со големина 45° .

Решение. Постапката за цртање на дадениот агол е следнава:

- 1) Цртаме полуправа OA .
- 2) Агломерот го поставуваме така што центарот се совпадне со точката O , а основната линија на агломерот со полуправата OA .
- 3) Од полуправата на агломерот одбројуваме 45° и означуваме со цртичка.
- 4) Го отстрануваме агломерот и го цртаме кракот OB , со што го добиваме аголот $\angle AOB = 45^\circ$.



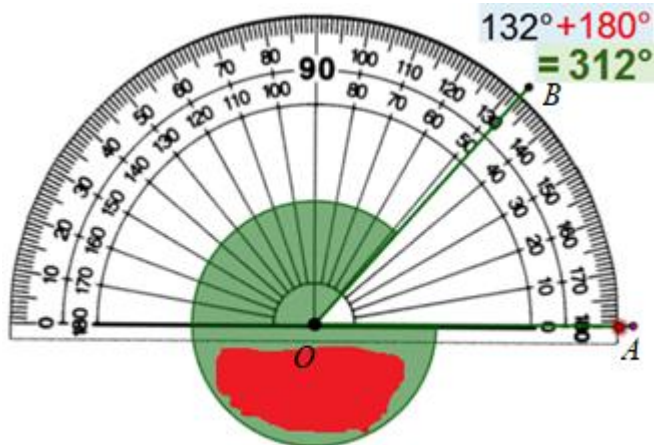
Во пример 1 покажавме како се мери тап агол, а во пример 2 како се црта остар агол. Во следниот пример ќе покажеме како се мери неконвексен агол.

Пример 3. Неконвексниот агол $\angle AOB$ го мери на следниов начин:

- 1) Го поставуваме агломерот така што неговиот центар ќе се поклопи со темето O на $\angle AOB$, а едниот крак на $\angle AOB$, во случајов кракот OA , ќе се поклопи со основната линија на агломерот.

- 2) Потоа гледаме со која цртичка од агломерот се поклопил вториот крак на аголот, во случајот кракот OB

и читаме колку делови има надвор од двата крака. Во случајов имаме 132 делови, што значи дека $\angle AOB = 180^\circ + 132^\circ = 312^\circ$.



За мерење на аглие постојат и единици помали од степен. Тоа се *аглови минути* или кусо само *минути* и *аглови секунди* или кусо само *секунди*. Еден степен има 60 минути, а една минута има 60 секунди. Пишуваме $1^\circ = 60'$ и $1' = 60''$. Според тоа,

$$1^\circ = 60' = 60 \cdot 60'' = 3600''.$$

Пример 4. Дадени се аглие $\alpha = 26^\circ 32'$ и $\beta = 44^\circ 52'$. Пресметај:

- а) $\alpha + \beta$, б) $\beta - \alpha$, в) 2α .

Решение. а) Кога собираме агли во кои покрај степени има и минути и секунди, прво одделно ги собираме степените, минутите и секундите, а потоа ако имаме повеќе од $60''$, односно $60'$ од помалите единици одделуваме цели поголеми единици и собираме со поголемите единици. Имаме:

$$\alpha + \beta = 26^\circ 32' + 44^\circ 52' = 70^\circ 84' = 70^\circ + 60' + 24' = 70^\circ + 1^\circ + 24' = 71^\circ 24'.$$

б) Важи: $\beta - \alpha = 44^\circ 52' - 26^\circ 32' = 18^\circ 20'.$

в) $2\alpha = 2 \cdot 26^\circ 32' = 52^\circ 64' = 52^\circ + 1^\circ + 4' = 53^\circ 4'.$

Пример 5. Дадени се аглите $\alpha = 66^\circ 32' 44''$ и $\beta = 44^\circ 52' 22''$. Пресметај

- а) $\alpha + \beta$, б) $\alpha - \beta$.

Решение. а) Имаме:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 66^\circ 32' 44'' + 44^\circ 52' 22'' = 110^\circ 84' 66'' = 110^\circ + 84' + 1' + 6'' \\ &= 110^\circ + 85' + 6'' = 110^\circ + 1^\circ + 25' + 6'' = 111^\circ 25' 6''. \end{aligned}$$

б) Бидејќи бројот на минутите во β е поголем од бројот на минутите во α од 66° земаме 1° и го претвораме во минути. Добиваме:

$$\alpha - \beta = 66^\circ 32' 44'' - 44^\circ 52' 22'' = 65^\circ 92' 44'' - 44^\circ 52' 22'' = 21^\circ 40' 22''.$$

Во претходната лекција научивме дека комплементни агли се аглите чиј збир е прав агол. Но, правиот агол има 90° , што значи дека комплементни агли се аглите чиј збир е еднаков на 90° . На потполни ист начин заклучуваме дека суплементни се аглите чиј збир е еднаков на 180° и дека збирот на напоредните агли е еднаков на 180° .

Пример 6. а) За аглите $\alpha = 33^\circ$ и $\beta = 57^\circ$ добиваме $\alpha + \beta = 33^\circ + 57^\circ = 90^\circ$, што значи дека тие се комплементни.

б) За аглите $\alpha = 111^\circ$ и $\beta = 69^\circ$ добиваме $\alpha + \beta = 111^\circ + 69^\circ = 180^\circ$, што значи дека тие се суплементни.

Пример 7. а) Пресметај го комплементниот агол на аголот $\alpha = 31^\circ 45'$.

б) Пресметај го суплементниот агол на аголот $\alpha = 81^\circ 37'$.

Решение. а) Ако комплементниот агол го означиме со β , тогаш

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 31^\circ 45' = 89^\circ 60' - 31^\circ 45' = 58^\circ 15'.$$

Ако суплементниот агол го означиме со β , тогаш

$$\beta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 81^\circ 37' = 179^\circ 60' - 81^\circ 37' = 98^\circ 23'.$$

Задачи за вежби

52. Нацртај агол од:

- а) 33° , б) 127° , в) 198° .

53. Дадени се агли $\alpha = 76^\circ 32'$ и $\beta = 44^\circ 52'$. Пресметај:

- а) $\alpha + \beta$, б) $\alpha - \beta$, в) $2\alpha - \beta$.

54. Дадени се агли $\alpha = 71^\circ 32' 43''$ и $\beta = 44^\circ 52' 56''$. Пресметај:

- а) $\alpha + \beta$, б) $\alpha - \beta$.

55. Даден е аголот $\alpha = 21^\circ 12' 13''$. Определи го аголот чиј збир со α е еднаков на:

- а) 90° , б) 180° .

56. Провери дали агли α и β се комплементни ако

- а) $\alpha = 38^\circ$ и $\beta = 52^\circ$, б) $\alpha = 44^\circ$ и $\beta = 56^\circ$

57. Провери дали агли α и β се суплементни ако

- а) $\alpha = 138^\circ$ и $\beta = 52^\circ$, б) $\alpha = 123^\circ$ и $\beta = 57^\circ$

58. Пресметај го комплементниот агол на аголот α ако

- а) $\alpha = 38^\circ 43' 25''$, б) $\alpha = 22^\circ 34' 52''$.

59. Пресметај го суплементниот агол на аголот α ако

- а) $\alpha = 73^\circ 53' 55''$, б) $\alpha = 92^\circ 44' 12''$.

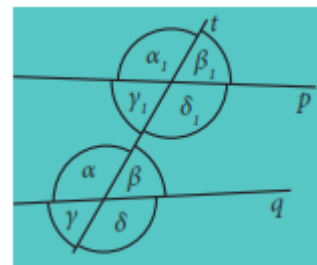
60. Пресметај го напоредниот агол на аголот α ако

- а) $\alpha = 23^\circ 33' 45''$, б) $\alpha = 92^\circ 52' 32''$.

2.11 Агли на трансверзала

Права што сече други две прави ја нарекуваме *трансверзала*. Аглие што трансверзалата ги формира си двете прави ги нарекуваме *агли на трансверзалата* од две прави.

На цртежот t е трансверзала на правите p и q . Осумте агли што се добиени се означени со: α , β , γ , δ , α_1 , β_1 , γ_1 и δ_1 . Од овие агли надворешни се агли: γ , δ , α_1 и β_1 , а внатрешни се агли α , β , γ_1 и δ_1 .



Аглие на трансверзалата ги именуваме по парови како: *согласни*, *наизменични* и *спротивни* агли.

Два агли на трансверзалата, кои немаат заедничко теме, се:

а) *согласни* – ако еден е надворешен, а другиот е внатрешен агол и лежат од иста страна на трансверзалата,

б) *наизменични* – ако и двата се или внатрешни, или надворешни агли и лежат на различни страни на трансверзалата,

в) *спротивни* – ако и двата се или внатрешни, или надворешни агли и лежат од иста страна на трансверзалата.

На горниот цртеж:

- согласни агли се: α и α_1 , β и β_1 , γ и γ_1 , δ и δ_1 ;

- наизменични агли се: α и δ_1 , β и γ_1 , γ и β_1 , δ и α_1 ;

- спротивни агли се: α и γ_1 , β и δ_1 , γ и α_1 , δ и β_1 .

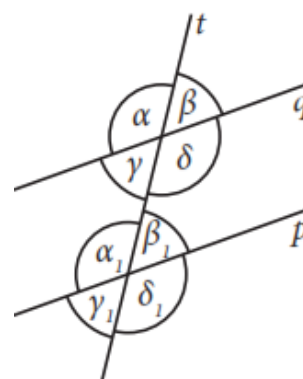
Од посебен интерес се аглите на трансверзалата на паралелните прави, односно врската меѓу паралелните прави и аглите на нивната трансверзала.

На цртежот правите p и q се паралелни и t е нивна трансверзала. Ако ги измериме и споредиме:

а) согласните агли: α и α_1 ,

б) наизменичните агли α и δ_1 ,

в) спротивните агли α и γ_1 .



ќе добиеме: $\alpha = \alpha_1$, т.е. согласните агли се еднакви, $\alpha = \delta_1$, т.е. наизменичните агли се еднакви и $\alpha + \gamma_1 = 180^\circ$, т.е. спротивните агли се суплементни. Претходните заклучоци, добиени со мерење важат и во општ случај, т.е. точно е следново тврдење.

Ако две паралелни прави ги пресечеме со трета, тогаш:

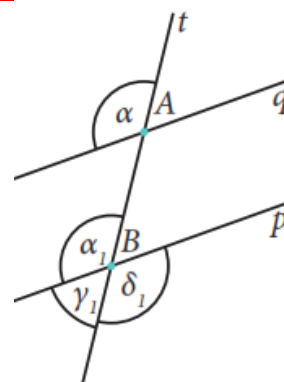
а) секој пар согласни агли се еднакви,

б) секој пар наизменични агли се еднакви,

в) секој пар спротивни агли се суплементни.

За оние што сакаат да знаат повеќе. Нека p и q се паралелни прави и t е трансверзала. Да ги разгледаме согласните агли α и α_1 .

Како што знаеме, при транслација сликата и оригиналот се совпаѓаат. Затоа, ако во правец на трансверзалата t и во насока од точката A кон точката B го транслатираме аголот α , тогаш него-вата слика ќе биде еднаква на аголот α_1 . Меѓутоа, притоа правата t цело време останува на место, а правата q паралелно се по-местува и ќе се совпадне со правата p . Тоа значи дека аголот α се пресликал во аголот α_1 , па затоа $\alpha = \alpha_1$. Аналогно се докажува дека $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$ и $\delta = \delta_1$, што значи дека секој пар согласни агли се еднакви.

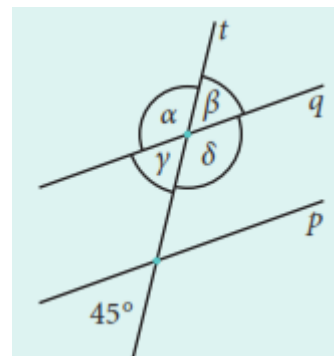


Понатаму, $\alpha = \alpha_1$, како согласни агли и $\alpha_1 = \delta_1$, како накрсни агли, па затоа $\alpha = \delta_1$. Аналогно се докажува дека $\beta = \gamma_1$, $\gamma = \beta_1$ и $\delta = \alpha_1$, што значи дека наименичните агли се еднакви.

Конечно, од $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha_1 + \gamma_1 = 180^\circ$ следува дека $\alpha + \gamma_1 = 180^\circ$, т.е. спротивните агли α и γ_1 се суплементни. Аналогно се докажува и за другите три пара спротивни агли. ■

Пример 1. На цртежот правите p и q се паралелни. Означен е дадениот агол. Определи ги аглите α , β , γ , δ .

Решение. Имаме, $\beta = 45^\circ$ како назименични агли. Понатаму $\alpha + 45^\circ = 180^\circ$, како спротивни агли, од каде добиваме $\alpha = 135^\circ$. Конечно, $\gamma = \beta = 45^\circ$ и $\delta = \alpha = 135^\circ$ како накрсни агли.



Следното тврдење е познато како *признак за паралелни прави*.

Ако на трансверзалата на две прави:

- еден пар наизменични агли се еднакви, или
- еден пар согласни агли се еднакви, или
- еден пар спротивни агли се суплементни,

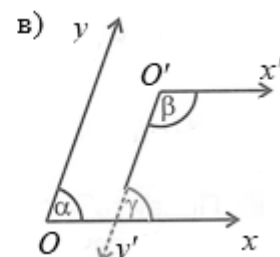
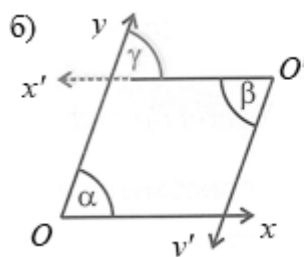
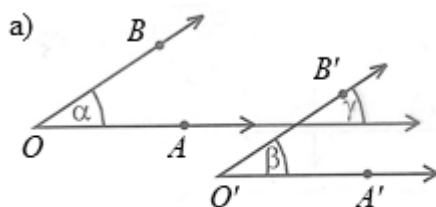
тогаш тие две прави се паралелни.

За два агли $\angle AOB$ и $\angle A'O'B'$ велиме дека се агли со *паралелни краци*, ако нивните краци се по парови паралелни, на пример $OA \parallel OA'$ и $OB \parallel O'B'$.

Со набљудување на аглите на трансверзалата на паралелни прави можеме да воочиме дека аглите со паралелни краци може да се

1) двата остри, 2) двата тапи или 3) еден тап и еден остар,
при што краците може да се со исти или со спротивни насоки.

На цртежот а) имаме два остри агли α и β чии краци се со исти насоки. Имаме, $OA \parallel O'A'$ и $O'B'$ е трансверзала, па затоа $\beta = \gamma$ (согласни агли). Слично, $OB \parallel O'B'$ и OA е трансверзала, па затоа $\alpha = \gamma$ (согласни агли). Значи, $\alpha = \beta$.



На цртежот б) имаме два остри агли α и β чии краци се со спротивни насоки. Имаме, $Oy \parallel O'y'$ и Ox' е трансверзала, па затоа $\beta = \gamma$ (наизменични агли). Слично $Ox \parallel O'x'$, и Oy е трансверзала, па затоа $\alpha = \gamma$ (согласни агли). Значи, $\alpha = \beta$.

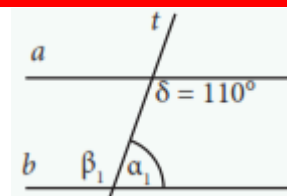
На цртежот в) имаме остар агол α и тап агол β , кај кои два краци се со иста насока и два се со спротивна насока. Имаме, $Oy \parallel O'y'$ и Ox е трансферзала, па затоа $\alpha = \gamma$ (согласни агли). Слично, $Ox \parallel O'x'$ и Oy' е трансферзала, па затоа $\beta + \gamma = 180^\circ$ (спротивни агли). Значи, $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Аналогно се разгледува и случајот кога имаме два тапи агли со краци со исти насоки и краци со спротивни насоки, при што се добиав дека аглите се еднакви. Со тоа го докажавме тврдењето.

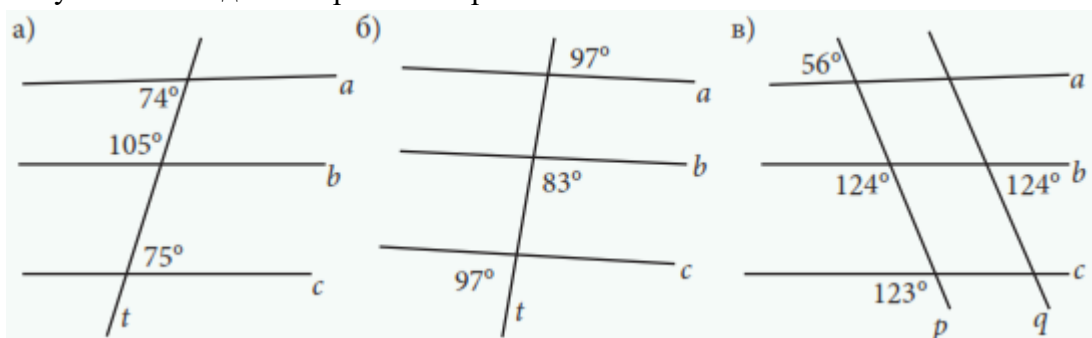
Агли со заемно паралелни краци се или еднакви, или суплементни.

Задачи за вежби

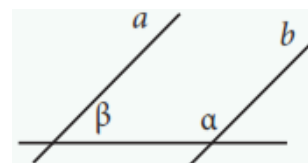
61. На цртежот $a \parallel b$ и $\delta = 110^\circ$. Определи ги аглите α_1 и β_1 .



62. На долните цртежи се нацртани прави кои што се сечат и се означени некои агли меѓу нив. Кои од овие прави се паралелни?



63. На цртежот $a \parallel b$ и аголот α е трипати поголем од аголот β . Колку степени има секој од аглите α и β ?

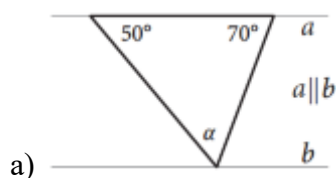


64. Две прави a и b се пресечени со трета права c , и притоа α и β се спротивни агли. Утврди во кој од следниве случаи правите a и b се паралелни:

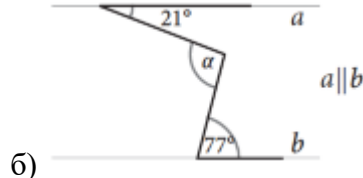
а) $\alpha = 50^\circ$ и $\beta = 50^\circ$,

б) $\alpha = 55^\circ$ и $\beta = 125^\circ$.

65. Определи ја мерката на аголот α на цртежот:

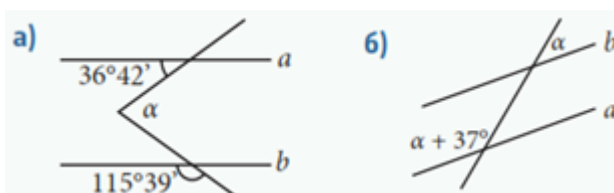


а)



б)

66. На цртежот $a \parallel b$. Определи ја мерката на аголот α .

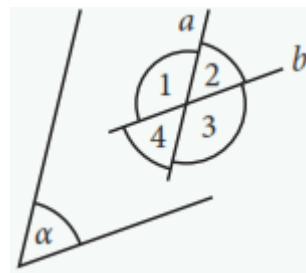


67. Правите a и b се паралелни со краците на аголот α .

Опреди ги агли $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$, ако

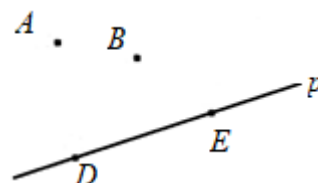
а) $\alpha = 55^\circ$

б) $\alpha = 47^\circ$.



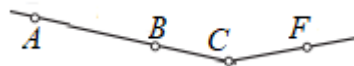
Провери го своето знаење 4

1. На правата p се означени точките D и E , а надвор од неа се означени точките A, B . Колку прави се определени со овие четири точки.

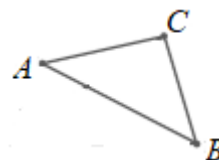


2. За точките A, B и C важи: $\overline{AB} = 8\text{ cm}$, $\overline{BC} = 5\text{ cm}$ и $\overline{CA} = 35\text{ mm}$. Дали точките A, B и C лежат на иста права?

3. Колку отсечки се дадени на цртежот?



4. Дадени неколинеарните точки A, B и C . Графички провери го неравенството $\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$.



5. Каква е заемната положба на кружниците $k'(O', r')$ и $k''(O'', r'')$ за кои важи:

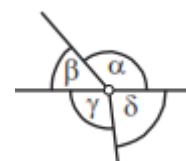
а) $r' = 5\text{ cm}, r'' = 17\text{ cm}, \overline{O'O''} = 24\text{ cm}$,

б) $r' = 10\text{ cm}, r'' = 14\text{ cm}, \overline{O'O''} = 4\text{ cm}$

6. Дадени се агли α и β , $\alpha > \beta$. Графички определи ја разликата $\alpha - \beta$.



7. Именувај ги паровите соседни и паровите напоредни агли прикажани на цртежот.



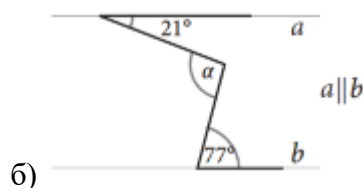
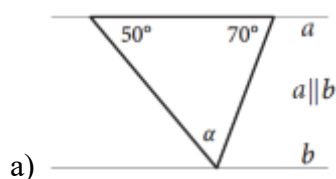
8. Дадени се агли $\alpha = 72^\circ 22' 43''$ и $\beta = 44^\circ 42' 46''$. Пресметај:

а) $\alpha + \beta$,

б) $\alpha - \beta$.

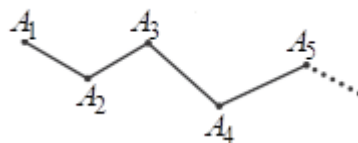
9. Пресметај ги комплементниот и суплементниот агол на аголот α ако $\alpha = 38^\circ 43' 25''$.

10. Опреди ја мерката на аголот α на цртежот:



2.12 Многуаголник

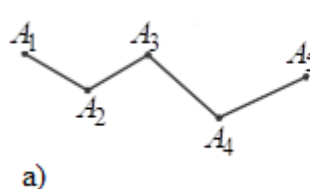
Пример 1. На цртежот, во рамнината, се дадени отсечките A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 , A_4A_5 итн., кај кои почетната точка на A_2A_3 е крајната точка на A_1A_2 , почетната точка на A_3A_4 е крајната точка на A_2A_3 итн. За овие отсечки велиме дека се *надоврзани* и дека формираат искршена линија $A_1A_2A_3A_4A_5\dots$.



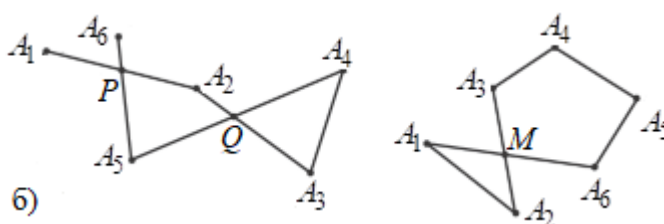
Искршена линија во рамнината ги нарекуваме две или повеќе надоврзани отсечки такви што две соседни отсечки на лежат на иста права.

Ако почетната точка на првата отсечка не се совпаѓа со крајната точка на последната отсечка, тогаш за искршената линија ќе велиме дека е *отворена*. Во спротивно ќе велиме дека искршената линија е *затворена*.

Пример 2. а) На цртежите се прикажани отворена и затворена искршена линија, при што отсечките од кои се составени немаат заеднички внатрешни точки.



б) На цртежите се прикажани отворена и затворена искршена линија. Отворената искршена линија $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ содржи две заеднички внатрешни точки на отсечките од кои е составена – P и Q , а затворената искршена линија $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ има една таква точка – M . Овие точки ги нарекуваме точки на самопресекување на искршените линии.



Затворената искршена линија $A_1A_2A_3\dots A_n$ без точки на самопресекување ја нарекуваме *многуаголна* (полигонална) линија.

Точките $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ги нарекуваме *темиња* на многуаголната искршена линија, а отсечките $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_nA_1$ ги нарекуваме нејзини *страни*.

Во зависност од бројот на темињата искршената линија може да биде триаголна, четириаголна, петаголна итн.



Многуаголната линија ја дели рамнината на *внатрешна* и *надворешна* област.

2Д формата (геометриската фигура) составена од една многуаголна линија и нејзината внатрешна област ја нарекуваме *многуаголник*.

Страните и темињата на многуаголната искршена линија соодветно ги нарекуваме *страни* и *темиња* на многуаголникот. Аголот чии краци содржат две соседни страни на многуаголникот го нарекуваме *агол на многуаголникот*.

Основни елементи на многуаголникот се неговите страни и агли.

На опишаниот начин од триаголната, четириаголната, петаголната итн, линија се добива триаголник, четириаголник, петаголник итн.

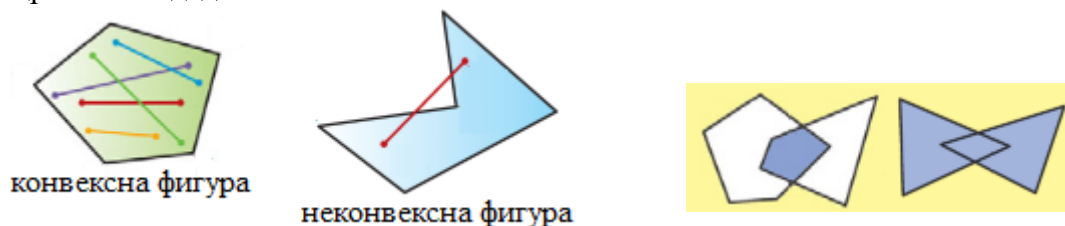


Кога учевме за агол видовме дека имаме конвексни и неконвексни агли. На потполно ист начин дефинираме конвексна и неконвексна 2Д форма (геометриска фигура).

Геометриската фигура (2Д формата) ја нарекуваме *конвексна* ако за секои две точки кои и припаѓаат, фигурата ја содржи и отсечката чии крајни точки се тие две точки.

Геометриската фигура (2Д формата) ја нарекуваме *неконвексна* ако постојат две точки кои и припаѓаат, такви што фигурата не ја содржи целата отсечка чии крајни точки се тие две точки.

На цртежот се дадени конвексен и неконвексен петаголник.



Пресекот на две конвексни фигури е конвексна фигура. Меѓутоа, унијата на две конвексни фигури не мора да биде конвексна фигура, што може да се види од горниот цртеж десно.

Задачи за вежби

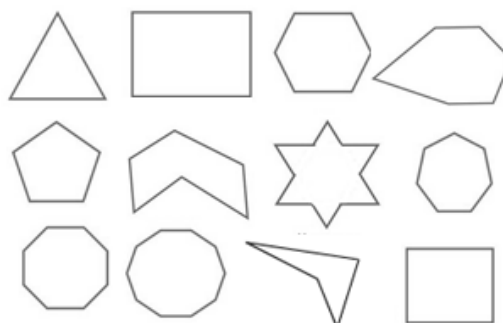
68. Нацртај отворена искршена линија без точки на самопресекување, добиена со надоврзување на шест отсечки.

69. Нацртај затворена искршена линија со три точки на самопресекување, добиена со надоврзување на седум отсечки.

70. Прецртај ги дадените многуаголници. Потоа конвексните обој ги со сина боја, а неконвексните обој ги со црвена боја. Со повлекување на отсечки покажи дека даден многуаголник е неконвексен.

71. Нацртај неконвексен четириаголник, петаголник, шестаголник, седумаголник и осумаголник.

72. Дали постои неконвексен триаголник?

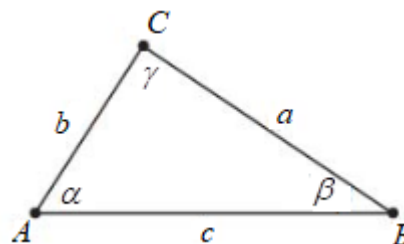


2.13 Триаголник, елементи на триаголник

Во претходните одделенија научи многу за траголникот. Во оваа и следните лекции ќе го повториш наученото и ќе научиш нови работи за триаголникот.

Многуаголникот кој што има три агли го нарекуваме *триаголник*.

На цртежот е даден триаголник ABC , со темиња A, B и C , страни AB, BC и CA и внатрешни агли $\angle ABC, \angle BCA$ и $\angle CAB$. За должините на страните на триаголникот вообичаени се ознаките $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a$ и $\overline{CA} = b$, како и $\angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma$ и $\angle CAB = \alpha$.



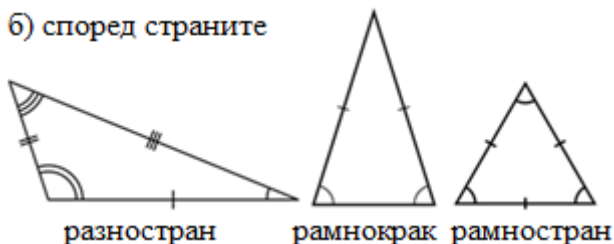
Основни елементи на триаголникот се страните и аглите.

Потсети се! Во зависност од основните елементи на триаголникот имаме две поделби на триаголниците, и тоа:

а) според аглите



б) според страните



Да се посетиме и дека страните кај некои видови триаголници имаат посебни имиња:

- кај правоаголниот триаголник страната наспроти правиот агол ја нарекуваме *хипотенуза*, а другите две страни ги нарекуваме *катети*,
- кај рамнокракиот триаголник еднаквите страни ги нарекуваме *краци*, а третата страна ја нарекуваме *основа*, а темето наспроти основата го нарекуваме *врв*.

Нека е даден триаголникот ABC , со должини на страни $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a$ и $\overline{CA} = b$. Бидејќи точките A, B и C не се колинеарни, од својствата на растојанието меѓу две точки следува неравенството $\overline{AB} < \overline{BC} + \overline{CA}$, односно неравенството $c < a + b$. На потполно ист начин ги добиваме неравенствата $a < b + c$ и $b < c + a$. Според тоа, точно е тврдењето.

Секоја страна на триаголникот е помала од збирот на другите две страни.

Триаголник со страни a, b, c постои, т.е. може да се нацрта само кога $a < b + c$, $b < c + a$ и $c < a + b$.

Забелешка. а) Ако за должините на страните a, b, c на триаголникот важи $a < b < c$, тогаш очигледно е дека важи $a < b + c$ и $b < c + a$, па затоа доволно е да го провериме само неравенството $c < a + b$.

б) Ако за должините на страните a, b, c на триаголникот важи $a < b < c$, тогаш се исполнети неравенствата $b - a < c$, $c - b < a$ и $c - a < b$. Според тоа, секоја страна на триаголникот е поголема од разликата на другите две страни.

Пример 1. Дали со отсечки со должини

а) $55\text{ cm}, 3\text{ dm}, 0,25\text{ m}$,

б) $5\text{ cm}, 9\text{ cm}, 7\text{ cm}$,

може да се нацрта триаголник.

Решение. а) Прво ги претвораме должините на страните во исти мерни единици. Имаме, $3\text{ dm} = 30\text{ cm}$ и $0,25\text{ m} = 25\text{ cm}$. Сега ако ставиме $a = 25\text{ cm}$, $b = 30\text{ cm}$ и $c = 55\text{ cm}$, тогаш важи $a < b < c$. Затоа доволно е да го провериме само неравенството $c < a + b$. Имаме, $a + b = 25\text{ cm} + 30\text{ cm} = 55\text{ cm} = c$, т.е. бараното неравенство не е исполнето, па затоа не е можно да се нацрта триаголник со дадените отсечки.

б) Имаме, $5\text{ cm} < 7\text{ cm} < 9\text{ cm}$ и како $5\text{ cm} + 7\text{ cm} = 12\text{ cm} > 9\text{ cm}$, од горната забелешка следува дека со дадените отсечки може да се нацрта триаголник.

Задачи за вежби

73. Запиши ги сите триаголници кои се дадени на цртежот.

74. Дадени се четири неколинеарни точки. Колку триаголници постојат чии темиња се три од дадените точки?

75. Дали со отсечки со должини

а) $4\text{ cm}, 2,5\text{ cm}, 25\text{ mm}$,

б) $50\text{ mm}, 0,5\text{ dm}, 5\text{ cm}$,

в) $8\text{ cm}, 5\text{ cm}, 25\text{ mm}$,

г) $3\text{ cm}, 0,35\text{ dm}, 33\text{ mm}$,

може да се нацрта триаголник? Во случај на потврден одговор запиши од кој вид е дадениот триаголник според должините на страните?

76. i) Измери ги должините на страните на триаголникот и утврди од кој вид е дадениот триаголник според должините на страните?

ii) Измери ги аглите на триаголникот и утврди од кој вид е дадениот триаголник според видот на аглите?

а)



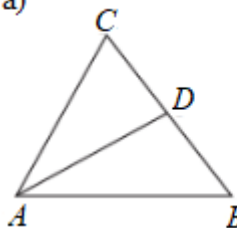
б)



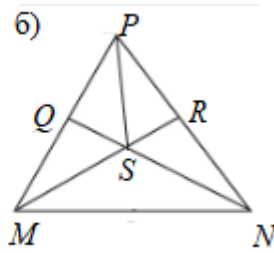
в)



а)

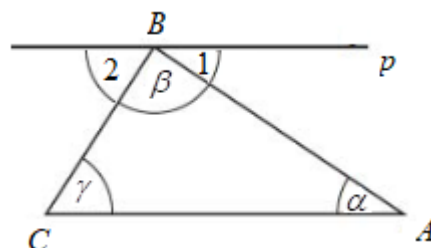


б)



2.14 Збир на агли во триаголник

На цртежот е даден триаголник ABC . Нека p е правата која минува низ темето B и е паралелна со страната AC . Имаме, $\angle 1 + \beta + \angle 2 = 180^\circ$. Понатаму, правите AB и BC се трансверзали на правите p и AC . Оттука следува $\angle 1 = \alpha$ и $\angle 2 = \gamma$, како наизменични агли. Според тоа, $\alpha + \beta + \gamma = \angle 1 + \beta + \angle 2 = 180^\circ$.



Со тоа го докажавме тврдењето, во чија точност мината година се увери со сечење и споредување.

Збирот на внатрешните агли во секој триаголник е еднаков на 180° .

Пример 1. Дали постои триаголник чии внатрешни агли се: 65° , 72° и 50° .

Решение. Збирот на дадените агли е $65^\circ + 72^\circ + 50^\circ = 187^\circ$ и е поголем од 180° . Значи, не постои триаголник чии внатрешни агли се 65° , 72° и 50° .

Пример 2. Врз основа на податоците на цртежот пресметај ги аглие α , β и γ .

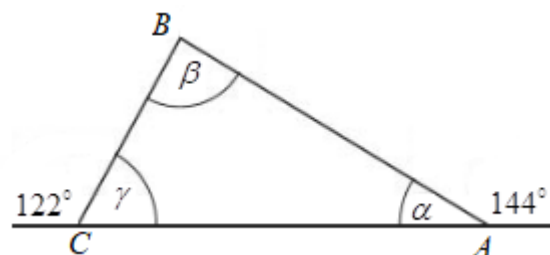
Решение. Имаме,

$$\gamma + 122^\circ = 180^\circ \text{ и } \alpha + 144^\circ = 180^\circ,$$

па затоа $\gamma = 58^\circ$ и $\alpha = 36^\circ$. Според тоа,

$$36^\circ + \beta + 58^\circ = 180^\circ,$$

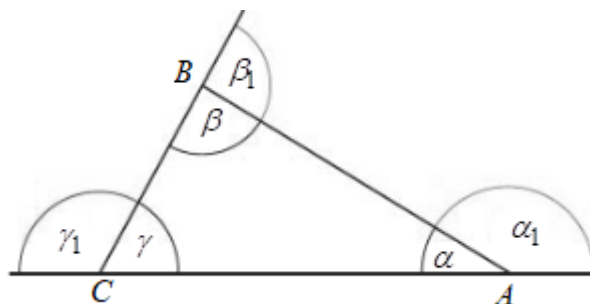
односно $\beta + 94^\circ = 180^\circ$. Значи, $\beta = 86^\circ$.



Да го разгледаме цртежот. Секој од трите внатрешни агли на триаголникот има свој придружен надворешен агол. Аглие α и α_1 се суплементни, па затоа $\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$. Од друга страна докажавме дека $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Според тоа,

$$\alpha + \alpha_1 = \alpha + \beta + \gamma,$$

од каде добиваме $\alpha_1 = \beta + \gamma$. Аналогно се докажува дека $\beta_1 = \alpha + \gamma$ и $\gamma_1 = \alpha + \beta$. Со тоа го докажавме тврдењето.



Секој надворешен агол во триаголникот е еднаков на збирот на двата внатрешни несоседни со него агли.

Пример 3. Два агли на триаголникот ABC се $\alpha = 35^\circ$ и $\beta = 72^\circ$.

Опреди ги надворешните агли на овој триаголник.

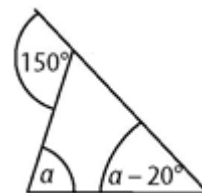
Решение. Имаме $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (35^\circ + 72^\circ) = 73^\circ$. Според тоа,

$$\alpha_1 = \beta + \gamma = 72^\circ + 73^\circ = 145^\circ, \beta_1 = \alpha + \gamma = 35^\circ + 73^\circ = 108^\circ, \gamma_1 = \alpha + \beta = 35^\circ + 72^\circ = 107^\circ.$$

Пример 4. Пресметај ги аглите на триаголникот прикажан на цртежот.

Решение. Надворешниот агол на триаголникот е еднаков на збирот на двата несоседни агли со него, па затоа $\alpha + \alpha - 20^\circ = 150^\circ$. Значи, $2\alpha = 170^\circ$, т.е. $\alpha = 85^\circ$. Конечно, аглите на триаголникот се

$$\alpha = 85^\circ, \alpha - 20^\circ = 65^\circ \text{ и } 180^\circ - (85^\circ + 65^\circ) = 30^\circ.$$



За збирот на надворешните агли на триаголникот добиваме

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= (\beta + \gamma) + (\alpha + \gamma) + (\alpha + \beta) = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma \\ &= 2(\alpha + \beta + \gamma) = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ. \end{aligned}$$

Со тоа го докажавме тврдењето.

Збирот на надворешните агли кај секој триаголник е еднаков на 360° .

Задачи за вежби

77. Дали постои триаголник чии внатрешни агли се: $46^\circ 17'$, $72^\circ 33'$ и 61° ?

78. Дали постои триаголник чии внатрешни агли се:

- а) поголеми од 60° , б) $60^\circ, 90^\circ, 30^\circ$,
- в) $55^\circ, 70^\circ, 55^\circ$, г) $110^\circ, 40^\circ, 30^\circ$,
- д) $64^\circ, 90^\circ, 27^\circ$.

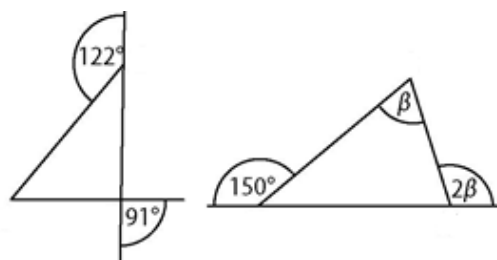
Во случај на потврден одговор запиши од кој вид според аглите е триаголникот?

79. Два внатрешни агли на триаголникот се еднакви на 45° и 65° . Опреди ги третиот внатрешен агол и сите надворешни агли на овој триаголник. На кој вид според аглите, а на кој според страните припаѓа овој триаголник?

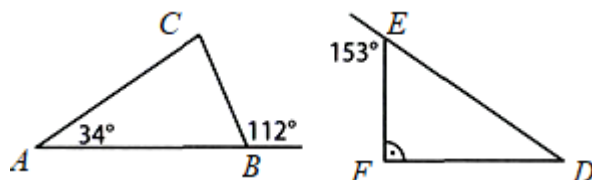
80. Во триаголникот ABC важи $\angle BAC = 45^\circ$ и $\angle ABC = 62^\circ$. Опреди го $\angle ACB$.

81. Пресметај ги аглите на триаголниците прикажани на цртежите.

82. Пресметај ги аглите на триаголникот ABC ако еден внатрешен агол е $\beta = 50^\circ$ и еден надворешен агол е $\gamma_1 = 80^\circ$.



83. Врз основа на податоците од цртежите пресметај ги внатрешните агли на триаголниците ABC и DEF .



2.15 Симетрала на отсечка

Нека е дадена отсечка AB и нека S е нејзина средина. Низ точката S повлекуваме права s нормална на AB . Правата s е оска на симетрија на отсечката AB , бидејќи при осна симетрија со оска s точката A се пресликува во точката B . Оваа права се нарекува *симетрала на отсечката AB* .

Симетралата на отсечката има едно важно својство.

За произволна точка M на симетрала s на отсечката AB важи $\overline{MA} = \overline{MB}$, т.е. секоја точка на симетралата е еднакво оддалечена од крајните точки на отсечката.

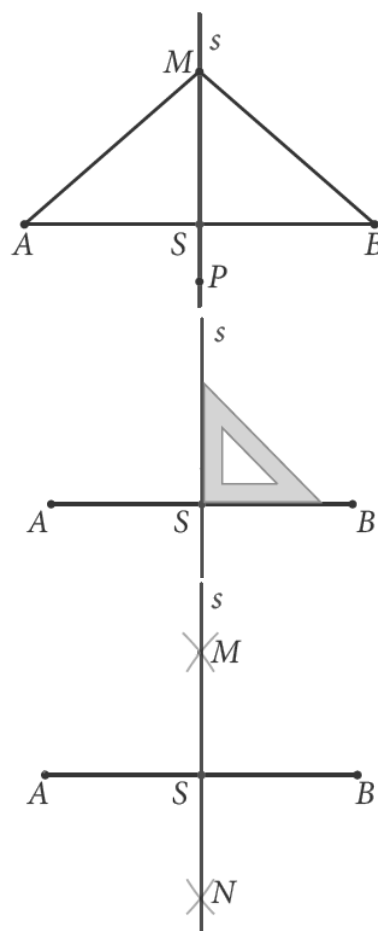
Обратно, ако P е која било точка еднакво оддалечена од крајните точки на отсечката AB , тогаш P припаѓа на симетралата на отсечката P .

Значи, за да ја нацртаме симетралата на отсечката AB со мерење ја наоѓаме средината S на AB , а потоа користејќи го триаголникот, како што е прикажано на цртежот, ја повлекуваме правата s .

Меѓутоа симетралата на отсечката AB , само со линијар и шестар, може да ја конструираме и на следниов начин.

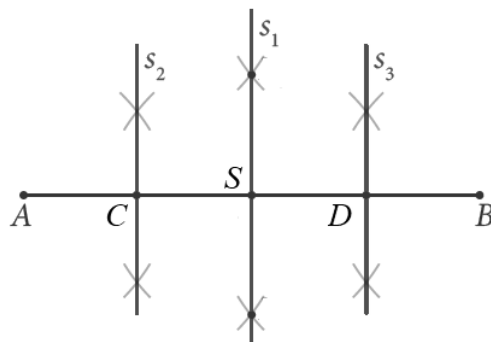
1) Конструираме две еднакви кружници $k(A, r)$ и $k'(B, r)$ кои се сечат во точките M и N (доволно е само кружни лаци).

2) Точките M и N се еднакво оддалечени од точките A и B , па затоа припаѓаат на симетралата s на AB . Значи, со повлекување на правата MN ние сме ја конструирале симетралата s на AB .



Пример 1. Дадена е отсечката AB . Подели ја оваа отсечка на четири еднакви делови.

Решение. Знаеме дека симетралата на отсечката AB ја дели AB на два еднакви дела. Ја конструираме симетралата s_1 на отсечката AB и нека таа ја сече отсечката во точката S . Сега, ги конструираме симетралите s_2 и s_3 соодветно на

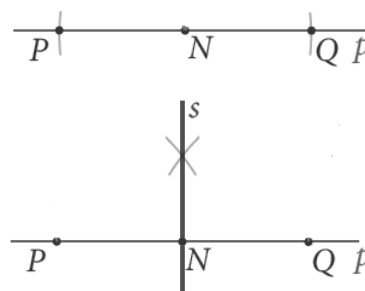


отсечките AS и SB и нека тие ја сечат отсечката AB во точките C и D . Имаме, $\overline{SA} = \overline{SB}$ и како $\overline{AC} = \overline{CS}$ и $\overline{SD} = \overline{DB}$, заклучуваме дека $\overline{AC} = \overline{CS} = \overline{SD} = \overline{DB}$. Значи, точките C, S, D ја делат отсечката AB на чети-ри еднакви делови.

Во продолжение ќе покажеме како со конструкција на симетрала на отсечка може да се повлече права која минува низ дадена точка и е нормална на дадена права. Ќе разгледаме два случаи:

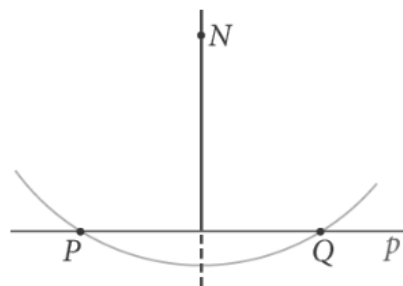
- а) точката лежи на правата и
- б) точката не лежи на правата.

а) Нека е дадена права p и точка N која припаѓа на p .
Конструираме кружница со центар N и произволен радиус, која ја сече правата p во точките P и Q . Сега, $\overline{PN} = \overline{NQ}$, што значи дека симетралата s на PQ е бараната нормала s .

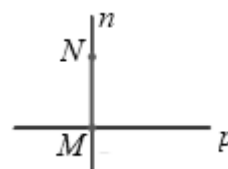


б) Нека е дадена права p и точка N која не припаѓа на p .

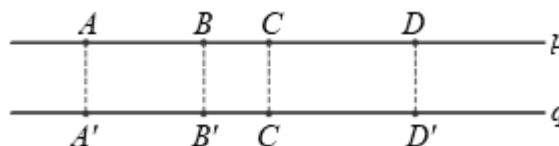
Конструираме кружница со центар N и произволен радиус, која ја сече правата p во точките P и Q . Сега, $\overline{PN} = \overline{NQ}$, што значи дека N лежи на симетралата на отсечката PQ и тоа е бараната нормала на p која минува низ N .



Нека точката N не припаѓа на правата p и нека правата n минува низ точката N и е нормална на правата p . Ако правата n ја сече правата p во точката M , тогаш велиме дека должината на отсечката MN е *растојанието* од точката N до правата p .



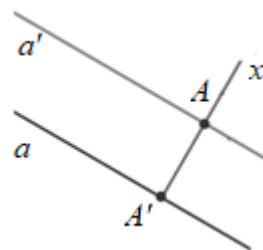
Нека p и q се две паралелни прави. Тогаш сите точки на едната права се еднакво оддалечени од другата права.



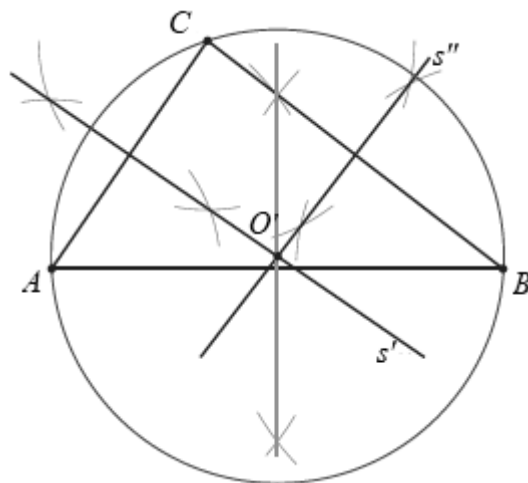
Растојанието на било која точка од правата p до правата q го нарекуваме *растојание* меѓу паралелните прави p и q .

Ќе покажеме како низ дадена точка A која не лежи на дадена права a , само со линијар и шестар, можеме да конструираме права a' паралелна на a .

Од точката A , на претходно опишаниот начин, конструираме права x нормална на правата a , при што A' е пресечната точка на правите a и x . Потоа во точката A конструираме права a' нормална на правата x . Конечно, правите a и a' се нормални на една иста права x , па затоа тие се паралелни.

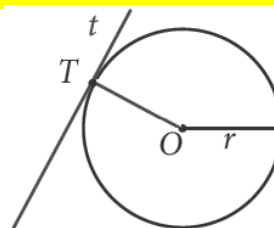


Од минатата учебна година знаеш дека за секој триаголник постои кружница која минува низ неговите темиња. Навистина, нека е даден триаголник ABC . Повлекуваме симетралаи s' и s'' на страните AC и BC и нека тие се сечат во точката O . Од својствата на симетралата на отсечка следува $\overline{AO} = \overline{CO}$ и $\overline{BO} = \overline{CO}$. Тоа значи дека $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = R$, т.е. дека точката O е еднакво оддалечена од темињата на триаголникот ABC , од каде следува дека тие лежат на кружницата $k(O, r)$, која ја нарекуваме *описана кружница* околу триаголникот ABC .



Пример 2. Дадена е кружница $k(O, r)$ и на неа точка T . Само со користење на линијар и шестар конструирај тангентата на кружницата во точката T .

Решение. Тангентата t на кружницата во точката T е нормална на радиусот на кружницата OT . Според тоа, доволно е да ја повлечеме правата OT и во точката T да конструираме нормала на правата OT .



Задачи за вежби

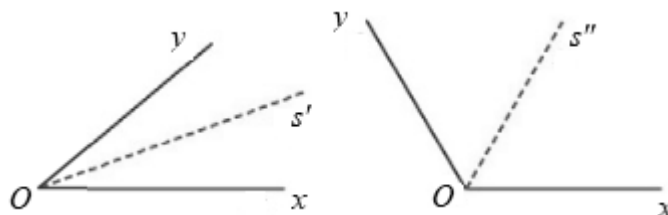
84. Точката C лежи на симетралата s на отсечката AB . Ако $\overline{CB} = 2,5 \text{ cm}$, колку е $\overline{CA}$?
85. Определи го центарот на кружницата кој е случајно избришан.
Упатство. Растојанието од центарот O до точките на кружницата е еднакво на радиусот на кружницата. Значи, центарот на кружницата припаѓа на симетралата на произволна тетива AB на кружницата.
86. Дадена е отсечка AB . Со користење само на линијар и шестар подели ја отсечката AB на осум еднакви делови.
87. Конструирај ги симетралите на страните AB и BC на правоаголник $ABCD$.
88. Нацртај отсечка AB и избери точка T надвор од правата AB . Потоа конструирај права n која минува низ точката T и е нормална на симетралата на отсечката AB . Каков е односот на правата AB и правата n ?
89. Нацртај права t и на неа означи точка M . Конструирај кружница со радиус $r = 3 \text{ cm}$ која ја допира правата t во точката M .

90. Опиши кружница околу рамнокрак триаголник ABC со основа $\overline{AB} = 4\text{ cm}$ и краци $\overline{AC} = \overline{BC} = 3\text{ cm}$. Каде се наоѓа нејзиниот центар?

2.17 Симетрала на агол

Потсети се!

Оската на симетрија на аголот $\angle xOy$ ја нарекуваме *симетрала* на тој агол. Симетралата на аголот го дели аголот на два еднакви дела, т.е. го полови тој агол.



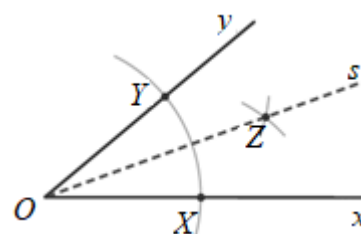
Симетралата на агол има едно важно својство.

Секоја точка од симетралата на даден агол е еднакво оддалечена од неговите краци. Обратно, секоја точка која е еднакво оддалечена од краците на даден агол, лежи на симетралата на тој агол.

Во продолжение ќе покажеме, без да докажуваме како само со примена на линијар и шестар се конструира симетрала на даден агол.

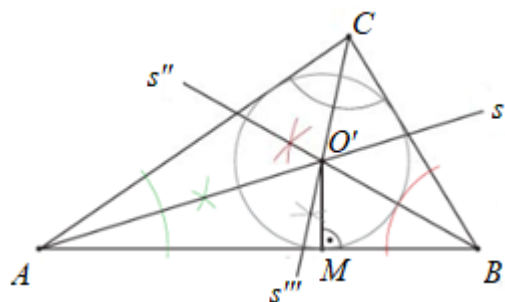
1) Нека е даден агол $\angle xOy$. Прво конструираме кружница $k(O, r)$ и ги означуваме нејзините пресечни точки X и Y со краците Ox и Oy , соодветно.

2) Конструираме симетрала на отсечката XY , т.е. конструираме кружници $k'(X, r')$ и $k''(Y, r')$ кои се сечат во точката Z .



3) Правата s определена со точките O и Z е симетралата на $\angle xOy$. Имено, полуправите Ox и Oy се пресликуваат една во друга со осната симетрија во оска на симетрија s .

Од минатата учебна година знаеш дека за секој триаголник постои кружница која ги допира неговите страни. Навистина, нека е даден триаголник ABC . Повлекуваме симетриали s' и s'' на аглиите $\angle BAC$ и $\angle ABC$, и нека тие се сечат во точката O' . Од својствата на симетралата на агол следува дека точката O' е еднакво оддалечена од AB и AC , и е еднакво оддалечена од AB и CB . Тоа значи дека O' е еднакво оддалечена од страните на триаголникот. Од O' повлекуваме нормала на AB која ја сече AB во точката M . Јасно, кружницата $k(O', O'M)$ ги допира страните на триаголникот ABC и истата ја нарекуваме *впишана кружница* во триаголникот ABC .



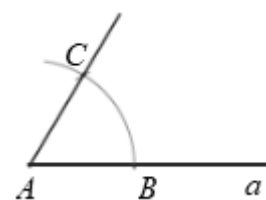
Да забележиме дека центарот на впишаната кружница секогаш лежи во внатрешноста на триаголникот.

Во продолжение ќе покажеме како со помош на конструкција на нормала на дадена права и симетрала на агол можеме да конструираме некои карактеристични агли.

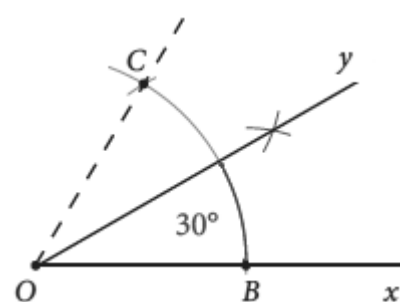
Пример 1. Конструирај агли од 60° , 30° и 15° .

Решение. Кога треба да конструираме агол од 60° прво помислуваме дека аглите кај рамностранот триаголник се еднакви на 60° . Затоа, доволно е да конструираме рамностран триаголник и да земеме еден негов агол.

Конструираме полуправа Aa . Потоа конструираме кружница $k(A, r)$, чиј радиус е произволен и нека B е пресечната точка на полуправата Aa е кружницата $k(A, r)$. Конструираме кружница $k'(B, r)$ и нека C е едната пресечна точка на кружниците $k(A, r)$ и $k'(B, r)$. Јасно, $\triangle ABC$ е рамностран и затоа $\angle BAC = 60^\circ$.



Бидејќи $60^\circ : 2 = 30^\circ$ за да конструираме агол од 30° доволно е да конструираме агол од 60° и да повлечеме негова симетрала. На цртежот имаме $\angle BOC = 60^\circ$ и полуправата Oy е негова симетрала. Оттука следува дека $\angle xOy = 30^\circ$.



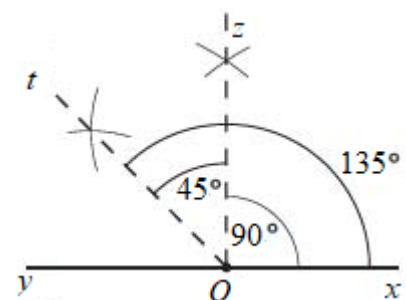
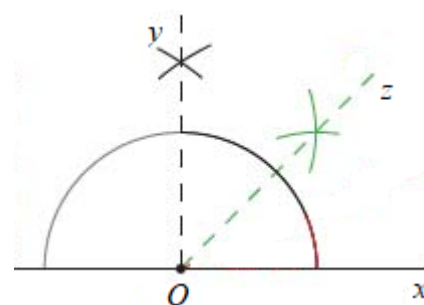
Сега, бидејќи $30^\circ : 2 = 15^\circ$ за да конструираме агол од 15° треба да конструираме симетрала на $\angle xOy = 30^\circ$. Доврши!

Пример 2. Конструирај агли од 90° , 45° и 135° .

Решение. За да конструираме агол од 90° доволно е на полуправата Ox во точката O да конструираме нормала. Така, $\angle xOy = 90^\circ$. Сега, ако искористиме дека $90^\circ : 2 = 45^\circ$, за да конструираме агол од 45° треба да ја конструираме симетралата Oz на правиот агол $\angle xOy$.

За да конструираме агол од 135° ќе искористиме дека $135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$. Според тоа, прво цртаме рамен агол xOy . Потоа ја цртаме неговата симетрала Oz и на крајот ја цртаме симетралата Ot на $\angle zOy$. Сега имаме

$$\angle xOt = \angle xOz + \angle zOt = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ.$$

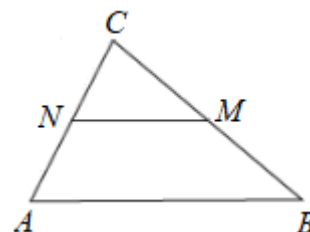


Задачи за вежби

91. Аголот зафатен со симетралата и едниот крак на аголот е: а) 46° , б) $54^\circ 32'$
Пресметај го аголот во кој е повлечена симетралата.
92. Даден агол подели го само со линијар и шестар на четири еднакви делови.
93. Нацртај прав агол $\angle aSb$ и определи права s така што аголот $\angle aSc$ ќе биде еднаков на $\frac{3}{4}$ од $\angle aSb$.
94. Нацртај напоредни агли и конструирај ги нивните симетрали. Во каква заемна положба се нацртаните симетрали?
95. Нацртај $\angle aOb$ и на кракот Oa зема произволна точка A . Конструирај права која минува низ точката A и е нормална на симетралата на $\angle aOb$.
96. Конструирај агол од: а) 150° , б) 75° , в) $22,5^\circ$, г) $67,5^\circ$.
97. Даден е остриот агол α . Конструирај го аголот:
а) $90^\circ + \alpha$, б) $45^\circ + \alpha$, в) $30^\circ + \alpha$, г) $60^\circ + \alpha$.
98. Нацртај рамностран триаголник ABC со страна $\overline{AB} = 4\text{ cm}$. Потоа повлечи ги симетралите на аглите и симетралите на страните и впиши и опиши кружница на овој триаголник. Што забележуваш?

2.17 Средна линија на триаголник

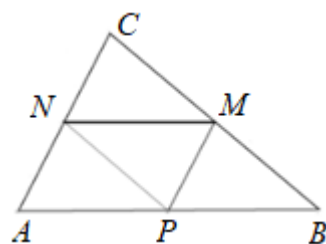
Нацртај триаголник ABC и со M и N означи ги средините на страните BC и AC , соодветно. Ако ја нацрташ отсечката MN , ти всушност си нацртал средна линија на триаголникот ABC .



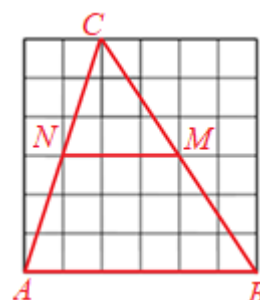
Средна линија на триаголник е отсечка, чии крајни точки се средини на две страни на триаголникот.

Колку средни линии има еден триаголникот?

Триаголникот ABC има три страни BC , AC и AB , што значи дека имаме три точки M , N и P кои се соодветно средини на страните. Според тоа, можеме да ги повлечеме средните линии MN , NP и PM , што значи дека триаголникот има три средни линии.



На цртежот триаголникот е нацртан во квадратна мрежа. Забележуваме дека должината на страната AB е шест страни на квадратчињата, а должината на средната линија MN е три страни на квадратчињата и дека $AB \parallel NM$. Ова важи за секој триаголник и за сите негови средни линии. Имено, точно е следново тврдење.



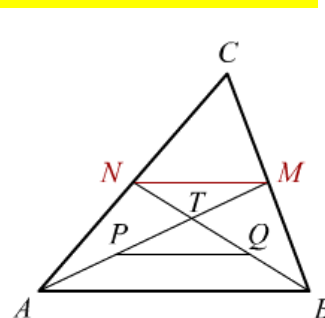
Средната линија на триаголникот е паралелна со страната со која нема заеднички точки и е еднаква на половината од неа, т.е. $NM \parallel AB$ и $\overline{NM} = \frac{1}{2} \overline{AB}$.

Пример 1. Должините на средните линии на триаголникот ABC се еднакви на 3 cm , 4 cm и 5 cm . Пресметај ги неговите страни.

Решение. Страните на триаголникот се два пати подолги од соодветните средни линии. Значи, должините на страните на триаголникот се 6 cm , 8 cm и 10 cm .

Пример 2. Нека M и N се средините на страните BC и AC на триаголникот ABC и T е пресекот на AM и BN . Точките P и Q се соодветно средини на отсечките AT и BT . Докажи дека $\overline{PQ} = \overline{MN}$ и $PQ \parallel MN$.

Решение. Точките M и N се средини на страните BC и AC на триаголникот ABC , што значи дека MN е средна линија соодветна на страната AB . Значи, $NM \parallel AB$ и $\overline{NM} = \frac{1}{2} \overline{AB}$. Точките P и Q се средини на страните AT и BT на триаголникот ABT , па затоа PQ е средна линија на триаголникот ABT соодветна на страната AB . Значи, $PQ \parallel AB$ и $\overline{PQ} = \frac{1}{2} \overline{AB}$. Конечно, $PQ \parallel AB \parallel NM$ и $\overline{PQ} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \overline{NM}$, што и требаше да се докаже.

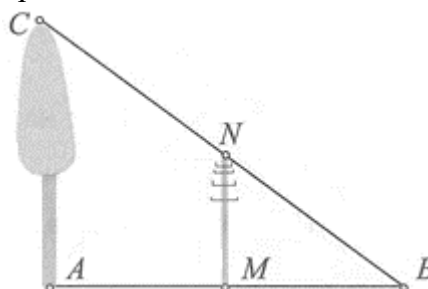


Задачи за вежби

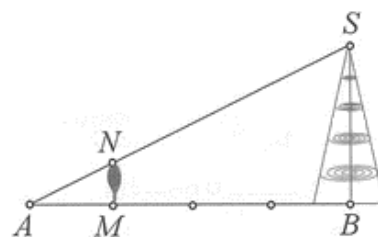
99. Должините на странките на еден триаголник се 14 cm , 16 cm и 77 cm . Пресметај ги должините на неговите средни линии.

100. Должините на средните линии на триаголникот ABC се еднакви на 4 cm , 6 cm и 7 cm . Пресметај ги должините на неговите страни.

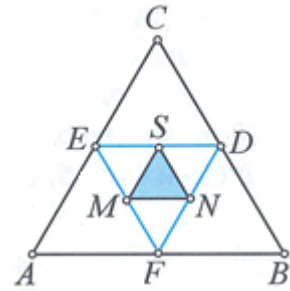
101. Сенките на тополата и бандерата достигнуваат до точката B , а бандерата чија височина е $7,75\text{ m}$ е точно во средината на сенката на тополата. Колку е висока тополата? Одговорот да се образложи!



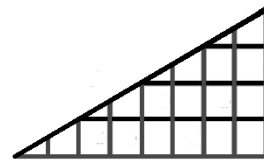
102. Колку е висок столбот на цртежот ако важи $\overline{AB} = 4\overline{AM}$, а дрвото MN е високо $5,5\text{ cm}$? Одговорот да се образложи!



103. На цртежот темињата на триаголникот DEF се средини на страните на рамностраниот триаголник ABC и темињата на триаголникот MNS се средини на триаголникот DEF . Ако периметарот на триаголникот DEF е еднаков на 36 cm , определи ги периметрите на триаголниците MNS и ABC .



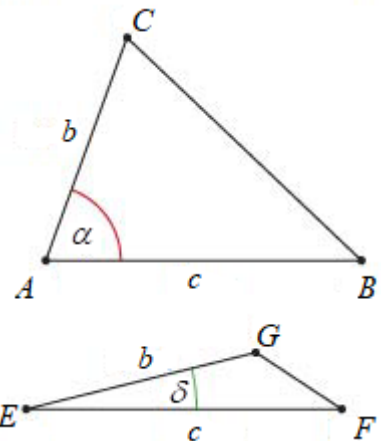
104. 2Д формата прикажана на цртежот е правоаголен триаголник. Како да се расече на два дела, за да од добиените делови може да се состави квадрат?



2.18 Основни конструкции на триаголник

Како што знаеме, триаголникот има шест основни елементи, три страни и три агли. Колку елементи треба да ни се познати за триаголникот да е напълно определен. На пример, ако ги знаеме должините на две страни на триаголникот, тогаш во зависност од аголот кој го зафаќаат имаме различни триаголници. На цртежот триаголниците ABC и EFG имаат по две еднакви страни, меѓутоа аглите меѓу нив се различни, што значи дека имаме два различни триаголника.

Меѓутоа, ако за триаголникот се познати три негови основни елементи, тогаш тој е еднозначно определен. Конструкцијата на триаголник со дадени три основни елементи се нарекува *основна конструкција*.

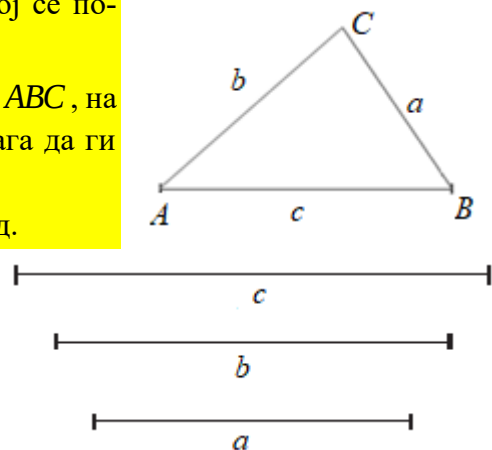


Пример 1. Конструирај триаголник ABC за кој се познати трите страни a, b и c .

Решение. Прво правиме скица на триаголникот ABC , на кој ги означуваме дадените елементи. Тоа ни помага да ги откриеме чекорите на конструкцијата.

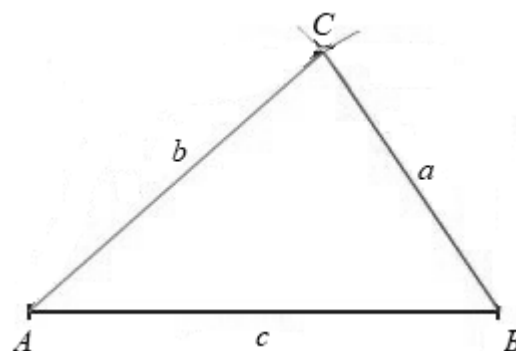
Конструкцијата ја вршиме по следниов редослед.

1. Прво цртаме отсечка AB таква што $\overline{AB} = c$.
2. Точката C е на растојание a од точката B , па затоа лежи на кружницата $k(B, a)$. Точката C е на растојание b од точката A , па затоа лежи на кружницата $k(A, b)$.



3. Ги цртаме кружниците $k(B, a)$ и $k(B, a)$ и во нивниот пресек го наоѓаме темето C (Овие кружници имаат две пресечни точки и ќе ја земеме едната од нив).

При услов $a < b < c$ задачата секогаш има решение, ако $c < a + b$ (најдолгата отсечка е помала од збирот на другите две).



Врз основа на претходниот пример можеме да го изведеме горното тврдење:

Ако се дадени должините на сите три страни на триаголникот, тогаш еднозначно се определени сите елементи на тој триаголник (ССС).

Пример 2. Конструирај триаголник ABC , ако му се дадени две страни b и c и аголот α меѓу нив.

Рџешение. Прво ја цртаме скицата и ги означуваме дадените податоци. Како што можеме да видиме, ако прво ја нацртаме отсечката AB таква што $\overline{AB} = c$, тогаш над неа можеме да го нацртаме аголот α , на чиј втор крак лежи темето C , кое од темето A е оддалечено b .

Сега конструкијата можеме да ја реализираме со следниве чекори:

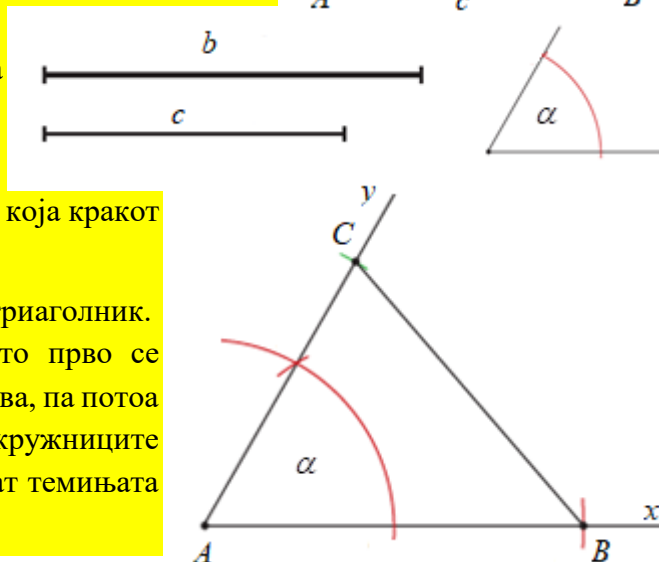
1) Цртаме полуправа Ax , па на неа ја нанесуваме отсечката AB , $\overline{AB} = c$.

2) Го цртаме $\angle xAy = \alpha$.

3) Конструираме кружница $k(A, b)$ која кракот Ay го сече во точката C .

4) Триаголникот ABC е бараниот триаголник.

Забелешка. Во практиката најчесто прво се конструира аголот α без да се пренесува, па потоа на неговите краци со помош на кружниците $k(A, b)$ и $k(A, c)$ редоследно се наоѓаат темињата C и B .



Врз основа на претходниот пример можеме да го изведеме горното тврдење:

Ако се дадени должините на две страни на триаголникот и аголот меѓу нив, тогаш еднозначно се определени сите елементи на тој триаголник (САС).

Пример 3. Конструирај триаголник ABC , ако му се дадени страната c и аглиите α и β над неа.

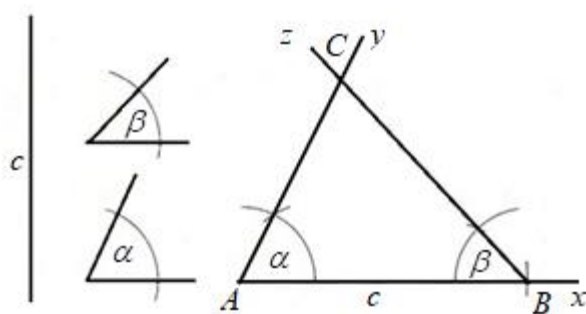
Решение. Како во претходните два случаи, ако направиме скица, гледаме дека ја имаме следнава конструкција:

1) Цртаме полуправа Ax , па на неа ја нанесуваме отсечката AB , $\overline{AB} = c$.

2) Над отсечката AB ги цртаме $\angle BAy = \alpha$ и $\angle ABz = \beta$.

3) Во пресекот на краците Ay и Bz го определуваме темето C .

4) Триаголникот ABC е бараниот триаголник.



Врз основа на претходниот пример можеме да го изведеме горното тврдење:

Ако се дадени должината на една страна на триаголникот и аголите кои налегнуваат на неа, тогаш еднозначно се определени сите елементи на тој триаголник (АСА).

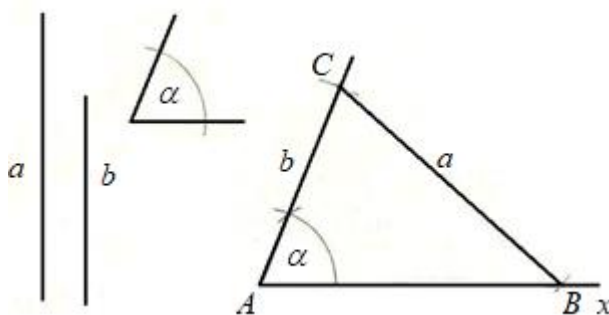
За оние што сакаат да знаат повеќе.

Пример 4. Конструирај триаголник ABC , ако му се дадени две негови страни и аголот спроти поголемата страна.

Решение. Нека се дадени страните a и b ($a > b$) и аголот спроти α спроти поголемата страна a .

1) Цртаме полуправа Ax , па на неа го пренесуваме аголот α со теме во точката A .

2) Од точката A на вториот крак на аголот α , кој е различен од полуправата Ax ја пренесуваме помалата дадена страна b . Така ја добиваме точката C , $\overline{AC} = b$.



3) Конструираме кружница $k(C, a)$ и во пресек со полуправата Ax ја добиваме точката B .

4) Триаголникот ABC е бараниот триаголник.

Врз основа на претходниот пример можеме да го изведеме горното тврдење:

Ако се дадени две страни на триаголникот и аголот спроти поголемата страна, тогаш еднозначно се определени сите елементи на тој триаголник (ССА).

Задачи за вежби

105. Конструирај триаголник ABC , ако е $\overline{AB} = 5\text{ cm}$, $\overline{BC} = 4\text{ cm}$ и $\angle ABC = 60^\circ$.

106. Конструирај триаголник ABC , ако е $\overline{AB} = 6\text{ cm}$, $\angle ABC = 60^\circ$ и $\angle BAC = 40^\circ$.

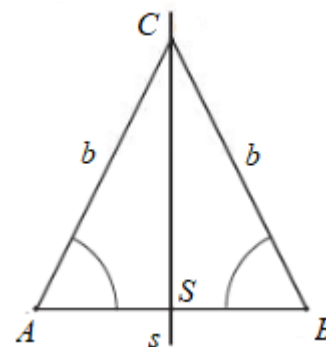
107. Конструирај триаголник ABC , ако е $\overline{AB} = 5\text{ cm}$, $\overline{BC} = 4\text{ cm}$ и $\overline{AC} = 6\text{ cm}$.
108. Конструирај правоаголен триаголник ABC со катета $\overline{AC} = 5\text{ cm}$ и $\angle ABC = 30^\circ$.
109. Конструирај правоаголен триаголник со катети 3 cm и 4 cm .
110. Конструирај рамнокрак триаголник ABC , ако е $\overline{AC} = \overline{BC} = 4\text{ cm}$ и $\angle ACB = 30^\circ$.
111. Конструирај триаголник ABC , ако е $\overline{AB} = 5\text{ cm}$, $\overline{BC} = 4\text{ cm}$ и $\angle ABC = 120^\circ$.
112. Конструирај рамностран триаголник ABC , ако е $\overline{AB} = 5\text{ cm}$.
113. Конструирај триаголник ABC периметар 15 cm и $\angle ABC = 60^\circ$ и $\angle BAC = 40^\circ$.

2.19 Однос меѓу страните и агли на триаголникот

Нацртај произволен правоаголен триаголник ABC со прав агол при темето C . Прогности која е најдолгата страна на овој триаголник. Сигурно увиде дека тоа е хипотенузата AB . Ваква оценка можеш да направиш за било кој правоаголен триаголник. Но, дали можеш да кажеш која е најголемата страна на триаголник во кој се внатрешни агли $59^\circ, 60^\circ, 61^\circ$? Одговорот на прашањето е ДА! Тоа ќе можеш откако ќе научиш за односот меѓу страните и агли на триаголникот.

На цртежот е даден рамнокракиот триаголник ABC . Имаме, $\overline{AC} = \overline{BC} = b$, т.е. точката C е еднакво оддалечена од точките A и B . Од својството на симетралата на отсечка следува дека C припаѓа на симетралата s на отсечката AB . При осна симетрија во однос на правата s точката A се пресликува во точката B , отсечката AC во отсечката BC , отсечката AS во отсечката BS , па затоа $\angle BAC$ се пресликува во $\angle ABC$, од каде добиваме $\angle BAC = \angle ABC$.

Со тоа докажавме дека:

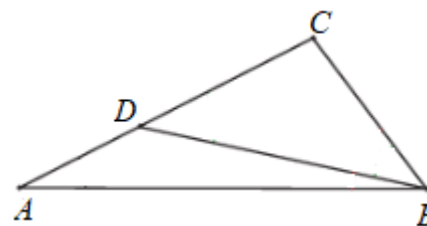


Тврдење 1. Наспроти еднакви страни во триаголникот лежат еднакви агли.

На цртежот е даден триаголник ABC таков што $\overline{AC} > \overline{BC}$. Нека D е точката на страната AC таква што $\overline{CD} = \overline{CB}$. Сега од претходното тврдење добиваме дека $\angle CDB = \angle CBD$. Понатаму ако искористиме дека надворешниот агол на триаголникот е еднаков на збирот на двата несоседни внатрешни агли, добиваме

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD > \angle CBD = \angle CDB = \angle DAB + \angle DBA > \angle DAB = \angle CAB.$$

Со тоа докажавме дека:

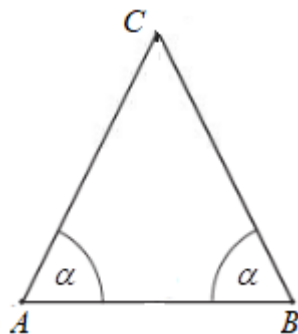


Тврдење 2. Наспроти поголема страна во триаголникот лежи поголем внатрешен агол.

Ќе докажеме дека се исполнети и обратните тврдења.

Нека за триаголникот ABC важи $\angle BAC = \angle ABC = \alpha$. Не е можно $\overline{AC} > \overline{BC}$, бидејќи тогаш од тврдењето 2 ќе важи $\alpha = \angle ABC > \angle BAC = \alpha$. Од исти причини не е можно да е $\overline{BC} > \overline{AC}$. Значи, мора да важи $\overline{AC} = \overline{BC}$.

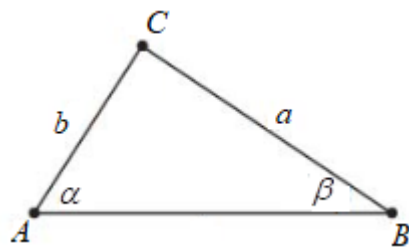
Со тоа докажавме дека:



Тврдење 3. Наспроти еднакви агли во триаголникот лежат еднакви страни.

Нека за триаголникот ABC важи $\alpha > \beta$. Не е можно да важи $a = b$, бидејќи тогаш од тврдењето 1 ќе следува $\alpha = \beta$, што противречи на претпоставката дека $\alpha > \beta$. Не е можно да важи $b > a$, бидејќи тогаш од тврдењето 2 ќе важи $\beta > \alpha$, а по претпоставка важи $\alpha > \beta$. Значи, останува да е $a > b$.

Со тоа докажавме дека:



Тврдење 4. Наспроти поголем агол во триаголникот лежи поголема страна.

Пример 1. Нека должините на страните на триаголникот ABC се $a = 4\text{ cm}$, $b = 9\text{ cm}$ и $c = 6\text{ cm}$. Подреди ги неговите агли по големина.

Решение. Имаме $a < c < b$, па од тврдењето 2 следува дека $\alpha < \gamma < \beta$.

Пример 2. Нека два агли на триаголникот ABC се $\alpha = 58^\circ$, $\beta = 62^\circ$. Подреди ги неговите страни по големина.

Решение. Имаме $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (58^\circ + 62^\circ) = 60^\circ$. Според тоа, $\alpha < \gamma < \beta$, па од тврдењето 4 следува дека $a < c < b$.

Од тврдењето 1 следува следново тврдење:

Аглите при основата на рамнокракиот триаголник се еднакви.

Ако еден триаголник има два еднакви агли, тогаш тој е рамнокрак.

Пример 3. Во рамнокракиот триаголник аголот при врвот е еднаков на 50° . Определи ја големината на аголот при основата.

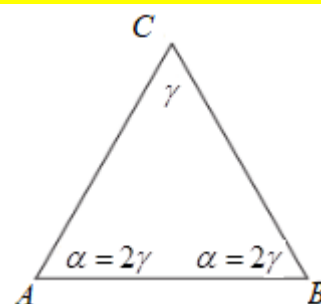
Решение. Ако аголот при основата го означиме со α , тогаш од претходното тврдење следува $2\alpha + 50^\circ = 180^\circ$. Значи, $2\alpha = 130^\circ$, односно $\alpha = 65^\circ$.

Пример 4. Во рамнокракиот триаголник аголот при основата е двапати поголем од аголот при врвот. Определи ги аглите на овој триаголник.

Решение. Нека α е аголот при основата и γ е аголот при врвот. Имаме $2\alpha + \gamma = 180^\circ$ и од $\alpha = 2\gamma$ следува

$$2 \cdot 2\gamma + \gamma = 180^\circ,$$

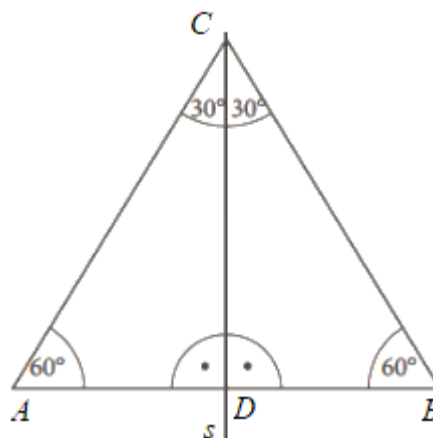
од каде следува $5\gamma = 180^\circ$, т.е. $\gamma = 36^\circ$. Сега, $\alpha = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$, што значи дека аглите на триаголникот се $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$.



Значи, лесно можеме да одговориме на прашањето: „Која страна во правоаголниот триаголник е најголема?“ Имено, точно е следново тврдење:

Во правоаголниот триаголник најголема негова страна е хипотенузата.

Да го разгледаме правоаголниот триаголник ADC со агли 30° и 60° . Ако истиот го пресликаме со осна симетрија со оска $s \equiv AD$, добиваме рамностран триаголник ABC . Според тоа, $\overline{AC} = \overline{AB} = 2 \cdot \overline{AD}$, т.е. точно е следново тврдење.



Во правоаголен триаголник со остри агли 30° и 60° , хипотенузата е двапати подолга од катетата која се наоѓа наспроти аголот од 30° .

Задачи за вежби

114. Нека должините на страните на триаголникот ABC се:

- а) $a = 14 \text{ cm}$, $b = 9 \text{ cm}$ и $c = 12 \text{ cm}$,
- б) $a = 4 \text{ dm}$, $b = 29 \text{ cm}$ и $c = 0,3 \text{ m}$,
- в) $a = 24 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ dm}$ и $c = 0,3 \text{ m}$.

Подреди ги неговите агли по големина.

115. Нека два агли на триаголникот ABC се:

- а) $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 44^\circ$,
- б) $\alpha = 58^\circ$, $\beta = 68^\circ$,
- в) $\alpha = 58^\circ$, $\beta = 58^\circ$.

Подреди ги неговите страни по големина.

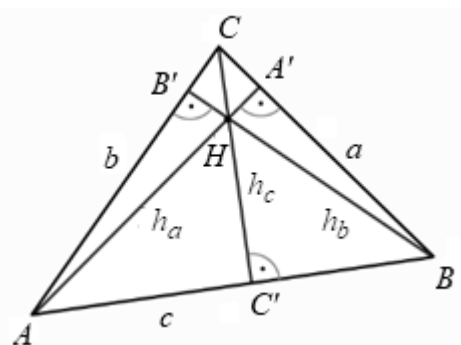
116. Во рамнокракиот триаголник аголот при врвот е еднаков на 40° . Определи ја големината на аголот при основата.

117. Во рамнокракиот триаголник аголот при основата е четири пати поголем од аголот при врвот. Определи ги аглите на овој триаголник.
118. Дали може аголот при основата на рамнокракиот триаголник да биде:
- а) 48° , б) 88° , в) 91° .
119. Во рамнокрак триаголник еден агол е еднаков на 112° . Што е поголемо, основата или кракот?

2.20 Висини и тежишни линии на триаголник

Нацртај триаголник ABC и од темето A повлечи нормала на правата BC . Подножјето на нормалата означи го со A' . Со тоа нацрта висина на триаголникот ABC .

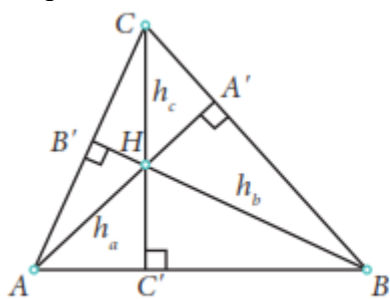
Висина на триаголник е отсечка чии крајни точки се теме на триаголникот и подножјето на нормалата повлечена од тоа теме на правата која ја содржи спротивната страна на темето.



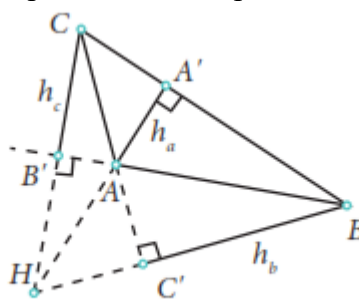
На цртежот се нацртани висините повлечени од трите темиња A, B, C и истите се означени со h_a, h_b, h_c , соодветно. Како што можеме да забележиме, на цртежот висините на триаголникот се сечат во една точка. Ова важи за секој триаголник, т.е. точно е следното тврдење.

Правите определени со висините на триаголникот се сечат во една точка. Таа точка ја нарекуваме **ортоцентар** на триаголникот.

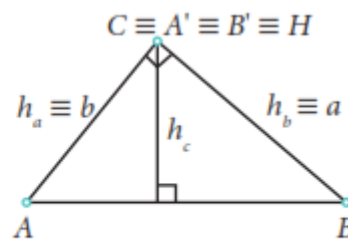
На долните цртежи е даден пресекот на висините, т.е. положбата на ортоцентарот кај остроаголниот, тапоаголниот и правоаголниот триаголник.



остроаголен триаголник



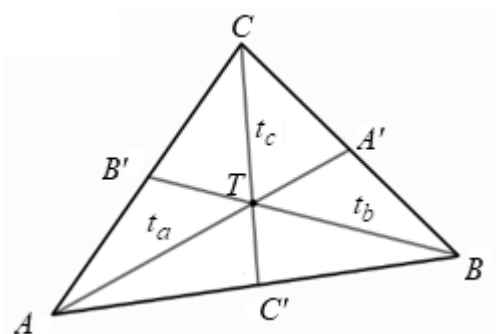
тапоаголен триаголник



правоаголен триаголник

Тежишна линија на триаголник е отсечка, чии крајни точки се теме на триаголникот и средината на спротивната страна.

На цртежот се нацртани тежишните линии повлечени од трите темиња A, B, C и истите се означени со t_a, t_b, t_c , соодветно. Како што можеме да забележиме, на цртежот тежишните линии на триаголникот се сечат во една точка. Ова важи за секој триаголник, т.е. точно е следното тврдење.



Тежишните линии на триаголникот се сечат во една точка. Таа точка ја нарекуваме *тежиштите* на триаголникот и истата секоја од тежишните линии гледано од темето ја дели во однос 2:1.

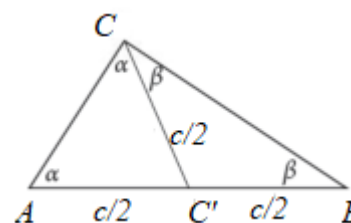
Пример 1. Ако тежишната линија на еден триаголник е еднаква на половина на страната кон која е повлечена, тогаш тој триаголник е правоаголен. Докажи!

Решение. Нека CC' е тежишната линија која ги задоволува условите на задачата. Тогаш триаголниците ACC' и BCC' се рамнокраки, па затоа важи

$$\angle CAC' = \angle C'AC = \alpha \text{ и } \angle CBC' = \angle C'BC = \beta.$$

Значи, $\alpha + \beta + \beta + \alpha = 180^\circ$, од каде добиваме $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Сега, $\angle C = \alpha + \beta = 90^\circ$, т.е. триаголникот е правоаголен.



На крајот уште да споменеме дека од односот меѓу страните и аглиите на триаголникот следува уште едно важно својство на рамнокракиот триаголник.

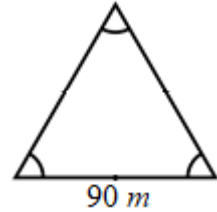
Симетралата на аголот при врвот на рамнокракиот триаголник е и висина и тежишна линија.

Задачи за вежби

120. Нацртај триаголник ABC со страни $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 4 \text{ cm}$, $\overline{CA} = 3 \text{ cm}$. Определи го ортоцентарот на триаголникот. Колку е оддалечен ортоцентарот од темето на тапиот агол?
121. Која од трите висини на рамнокракиот триаголник може да има поголема должина од должината на основата?
122. Во рамнокрак правоаголен триаголник ABC тежишната линија t_c повлечена кон хипотенузата е долга 4 cm . Определи ги должината на висината и хипотенузата.
123. Во рамностран триаголник ABC повлечена е висина $h_a = 3 \text{ cm}$.
 - а) Определи ја должината на тежишната линија t_a .
 - б) Збирот на радиусите на опишаната и впишаната кружница $R + r$.
 - в) Колку пати R е поголем од r ?

124. Нацртај рамнокрак тапоаголен триаголник определи ги центрите на опишаната и впишаната кружница, тежиштето и ортоцентарот. На која права припаѓаат овие четири точки, кои се познати како *значајни точки на триаголникот*?

125. Парцела во форма на рамностран триаголник со должина на страна 90 m е поделена на три еднакви дела. Како е извршена поделбата?



2.21 Четириаголник. Видови четириаголници

Во претходните одделенија се запозна со некои четириаголници, како што се квадрат и правоаголник. Сега ќе ги прошириш своите занења за четириаголниците.

Многуаголник што има четири агли го нарекуваме *четириаголник*.

На цртежот е даден четириаголникот $ABCD$.

а) Темиња на четириаголникот се точките A, B, C и D .

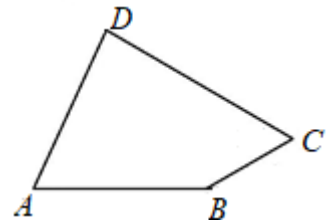
б) Страни на четириаголникот се отсечките AB, BC, CD и DA .

в) Агли на четириаголникот се $\angle A, \angle B, \angle C$ и $\angle D$.

г) Соседни темиња на темето A се B и D .

д) Соседни страни на страната AB се BC и AD

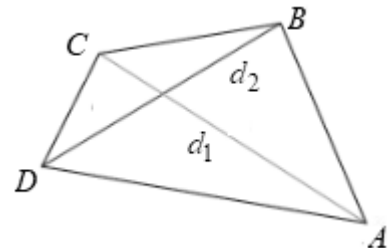
ѓ) Соседни агли на $\angle A$ се $\angle B$ и $\angle D$.



Забележуваме дека четириаголникот има темиња кои не се соседни, за кои велиме дека се *спротивни темиња*. Во четириаголникот $ABCD$ спротивни темиња се A и C , односно B и D . Исто така четириаголникот има страни и агли кои не се соседни, за кои велиме дека се *спротивни страни* и *спротивни агли*, соодветно. Во четириаголникот $ABCD$ спротивни страни се AB и CD , односно BC и AD , а спротивни агли се $\angle A$ и $\angle C$, односно $\angle B$ и $\angle D$.

Отсечките чии крајни точки се спротивните темиња на четириаголникот ги нарекуваме *дијагонали* на четириаголникот.

Четириаголникот има две дијагонали. На цртежот тоа се отсечките AC и BD , кои се означени со d_1 и d_2 .



Секој четириаголник има два пара спротивни темиња, два пара спротивни страни, два пара спротивни агли и две дијагонали.

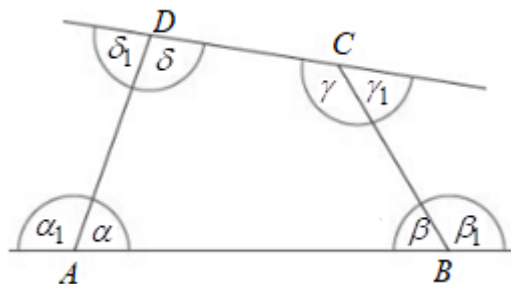
Страните и аглите се основни елементи на четириаголникот.

На цртежот аголот α е напореден со аголот α_1 , аголот β е напореден со аголот β_1 итн.

За аглите α, β, γ и δ велиме дека се внатрешни агли на четириаголникот $ABCD$.

За аглите $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и δ_1 велиме дека се надворешни агли на четириаголникот $ABCD$.

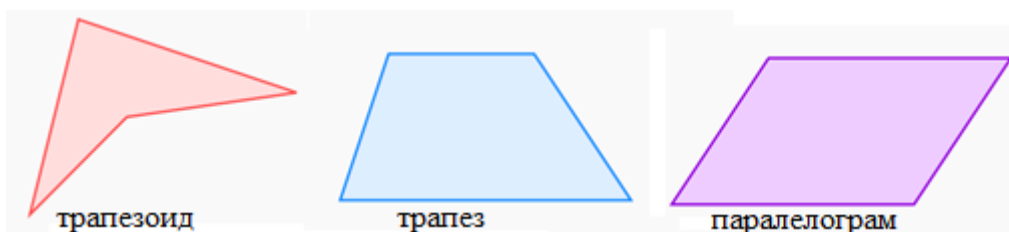
Како што рековме, кај секој четириаголник $ABCD$ спротивни страни се AB и CD , односно BC и AD . Спротивните страни на четириаголникот може да се паралелни или да не се паралелни. Според бројот на паровите паралелни страни имаме три вида четириаголници.



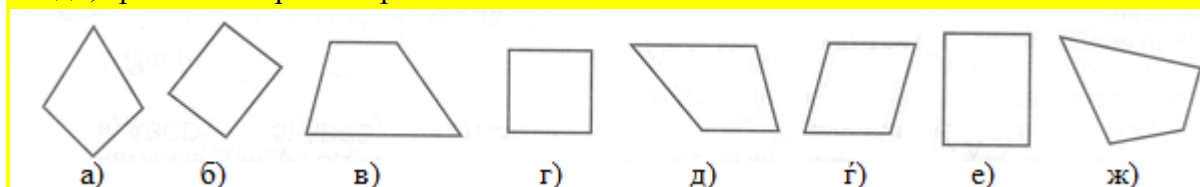
Четириаголникот кој нема паралелни страни го нарекуваме *трапезоид*.

Четириаголникот што има само еден пар паралелни страни го нарекуваме *трапез*.

Четириаголникот што има два пара паралелни страни го нарекуваме *паралелограм*.



Пример 1. На цртежот се прикажани осум четириаголници. Кои од нив се трапезоиди, трапези и паралелограми.



Решение. Трапезоиди се четириаголниците: а) и ж). Трапези се четириаголниците: в) и д). Паралелограми се четириаголниците б), г), ё) и е).

Задачи за вежби

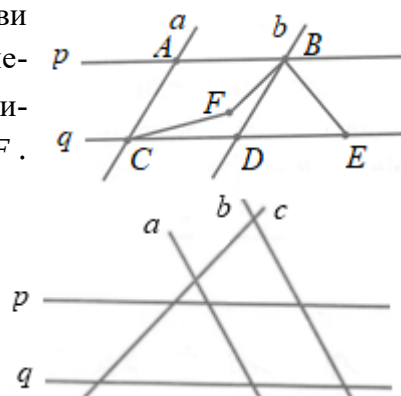
126. На цртежот се дадени два пара паралелни прави

$a \parallel b, p \parallel q$ што се сечат и се нацртани неколку четириаголници. Определи го видот на секој од четириаголниците: $ACDB, ACEB, CDBF, CFBA, CEBF$.

127. На цртежот се дадени два пара паралелни прави

$a \parallel b, p \parallel q$ што се сечат и права c . Нацртај ваков цртеж изначи ги пресечните точки. Со

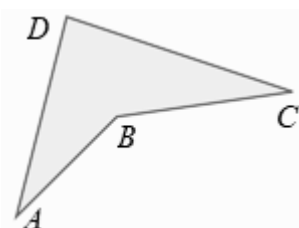
букви запиши барем еден паралелограм и ба-



- рем еден трапез. Дали можеш да запишеш трапезоид? Зошто?
128. Нацртај паралелограм $ABCD$, а потоа на неговите страни избери точка M така што $ABMD$ ќе биде трапез.
129. Нацртај трапез $ABCD$, а потоа на неговите страни избери точка M така што три темиња на трапезот и точката M ќе бидат темиња на
- а) паралелограм, б) трапезоид.

2.22 Збир на агли во четириаголник

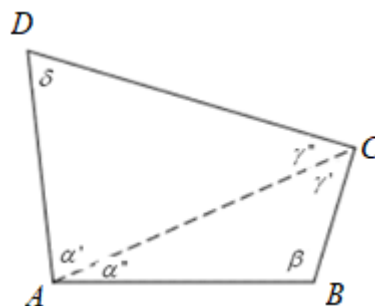
На цртежот е даден четириаголник $ABCD$. Измери ги внатрешните агли на четириаголникот и пресметај го нивниот збир. Дали доби дека збирот е еднаков 360° ? Нацртај друг четириаголник и провери дали збирот на неговите внатрешни агли е 360° .



Претодните примери не наведуваат на претпоставката дека збирот на внатрешните агли на четириаголникот е 360° . Ајде да видиме дали сме во право!

На цртежот е даден четириаголникот $ABCD$ кој со дијагоналата AC е поделен на триаголниците ABC и ACD . Со α , β , γ и δ се означени внатрешните агли на овој четириаголник. При ознаките на цртежот имаме

$$\alpha = \alpha' + \alpha'' \text{ и } \gamma = \gamma' + \gamma''.$$



За збирите на внатрешните агли на триаголниците ABC и ACD имаме

$$\alpha'' + \beta + \gamma' = 180^\circ \text{ и } \alpha' + \gamma'' + \delta = 180^\circ.$$

Значи, збирот на внатрешните агли на четириаголникот е

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = (\alpha' + \alpha'') + \beta + (\gamma' + \gamma'') + \delta = (\alpha' + \gamma'' + \delta) + (\alpha'' + \beta + \gamma') = 360^\circ.$$

Со тоа го докажавме следново тврдење.

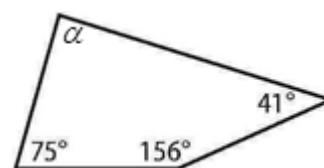
Збирот на внатрешните агли во секој четириаголник е еднаков на 360° .

Пример 1. Дали постои четириаголник чии внатрешни агли се: 95° , 92° , 94° и 80° .

Решение. Збирот на дадените агли е $95^\circ + 92^\circ + 94^\circ + 80^\circ = 361^\circ$ и е поголем од 360° . Значи, не постои триаголник чии внатрешни агли се 95° , 92° , 94° и 80° .

Пример 2. Пресметај го аголот α на четириаголникот даден на цртежот.

Решение. Имаме, $\alpha + 75^\circ + 41^\circ + 156^\circ = 360^\circ$, од каде добиваме $\alpha + 272^\circ = 360^\circ$, т.е. $\alpha = 88^\circ$.



Да го разгледаме цртежот. Секој од четирите внатрешни агли на четириаголникот има свој придружен надворешен агол. Аглите α и α_1 се суплементни, па затоа $\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$. Слично, $\beta + \beta_1 = 180^\circ$, $\gamma + \gamma_1 = 180^\circ$ и $\delta + \delta_1 = 180^\circ$. Ако ги собереме добиените равенства и искористиме дека збирот на аглите на четириаголникот е еднаков на 360° , добиваме

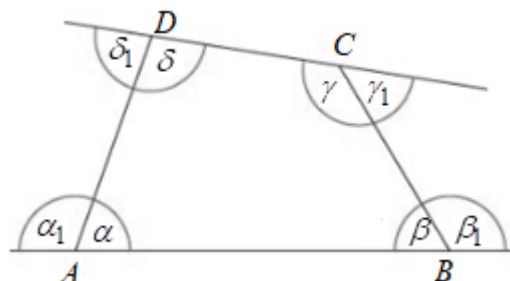
$$\alpha + \alpha_1 + \beta + \beta_1 + \gamma + \gamma_1 + \delta + \delta_1 = 4 \cdot 180^\circ$$

$$(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1) + (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 720^\circ,$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 + 360^\circ = 720^\circ,$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 360^\circ.$$

Според тоа, точно е следново тврдење.



Збирот на надворешните агли кај секој четириаголник е еднаков на 360° .

Пример 3. Пресметај ги сите агли на четириаголникот $ABCD$ ако $\alpha = 85^\circ$, $\beta = 115^\circ$ и $\gamma_1 = 144^\circ$.

Решение. Имаме

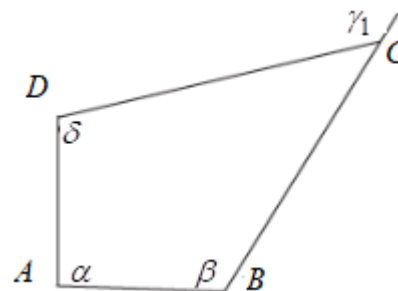
$$\alpha_1 = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ,$$

$$\beta_1 = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ,$$

$$\gamma = 180^\circ - \gamma_1 = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ,$$

$$\delta = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = 360^\circ - 236^\circ = 124^\circ,$$

$$\delta_1 = 180^\circ - \delta = 180^\circ - 124^\circ = 56^\circ.$$



Кога учевме за аглите на трансверзала ги разгледавме аглите со паралелни краци. Друг пар агли кој често се среќава како во задачи, така и во практиката се аглите со заемно нормални краци.

На цртежот а) аглите α и β се агли со заемно нормални краци, т.е. $\angle A = \angle C = 90^\circ$. Од четириаголникот $OABC$ добиваме

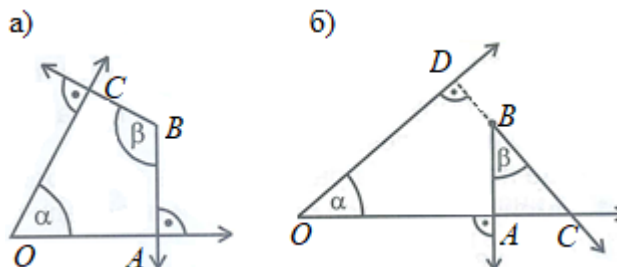
$$\alpha + \angle A + \beta + \angle C = 360^\circ,$$

$$\alpha + 90^\circ + \beta + 90^\circ = 360^\circ,$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

Во случајот б) кракот BC да го продолжиме до пресекот D со вториот крак на аголот α . Тогаш од а) следува дека $\beta + \angle ABD = \angle ABD + \alpha$, па затоа $\beta = \alpha$.

Со тоа го докажавме следново тврдење.



Агли со заемно нормални краци се или еднакви или се суплементни.

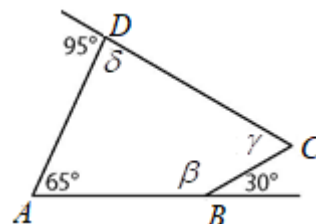
Задачи за вежби

130. Во четириаголникот $ABCD$ познати се аглите $\alpha = 86^\circ$, $\beta = 44^\circ$ и $\gamma_1 = 122^\circ$.
Опреди го аголот δ .

131. Дијагоналата BD на четириаголникот $ABCD$ го дели $\angle ABC$ на агли од 44° и 46° , а $\angle ADC$ на агли 64° и 36° . Пресметај ги аглите на овој четириаголник.
(Внимавај, треба да разгледаш два случаја!)

132. Дали четириаголник може да има четири внатрешни остри агли? Одговорот да се образложи!

133. Пресметај ги аглите β, δ и γ на четириаголникот $ABCD$ прикажан на цртежот.



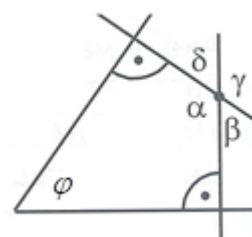
134. Внатрешните агли на четириаголникот $ABCD$ се разликуваат за 10° . Опреди ги аглите на овој четириаголник.

135. Надворешните агли на четириаголникот $ABCD$ се разликуваат за 8° . Опреди го збирот на најмалиот и најголемиот надворешен агол.

136. Во еден четириаголник трите надворешни агли се еднакви на 77° . Опреди ги внатрешните агли на овој четириаголник.

137. Низ една точка на аголот φ , како на цртежот се повлечени нормали на краците на тој агол, при што се добиени аглите $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Опреди колку степени имаат аглите $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ако

- а) $\varphi = 66^\circ$, б) $\varphi = 41^\circ$.



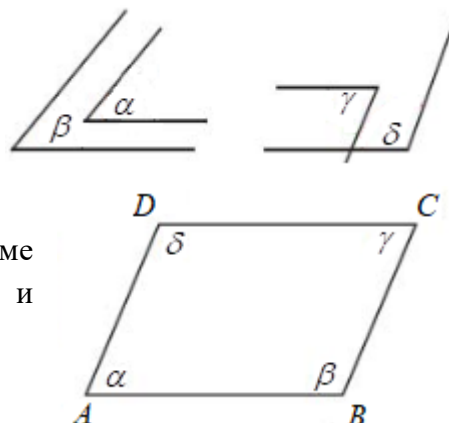
2.23 Паралелограм. Својства на паралелограмот

Потсети се!

Кога учевме за аглите на трансвералата на паралелни прави видовме дека аглите со паралелни краци се или еднакви или се суплементни.

Понатаму, четириаголникот кој има два пара паралелни страни го нарекуваме паралелограм.

На цртежот е даден паралелограм $ABCD$. Имаме $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, од каде следува $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ и $\alpha + \beta = 180^\circ$. Според тоа, точно е тврдењето.



Спротивните агли на паралелограмот се еднакви.
Соседните агли на паралелограмот се суплементни.

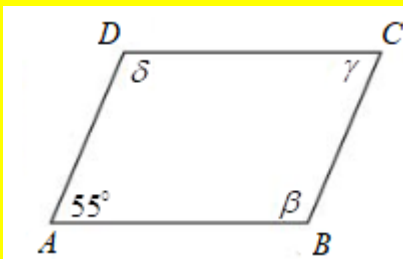
Пример 1. а) Еден внатрешен агол на паралелограмот е еднаков на 55° . Определи ги аглите на овој паралелограм.

б) Еден внатрешен агол на паралелограмот е три пати поголем од другиот. Определи ги аглите на овој паралелограм.

Решение. а) При ознаки како на цртежот имаме $\alpha = 55^\circ$. Тогаш $\gamma = \alpha = 55^\circ$ и $\beta = \delta = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$.

б) Нека помалиот агол на паралелограмот го означиме со α . Тогаш $\beta = 3\alpha$ (направи цртеж). Сега, $\alpha + \beta = 180^\circ$, па затоа $\alpha + 3\alpha = 180^\circ$, од каде добиваме $\alpha = 45^\circ$.

Понатаму, како во примерот под а) добиваме $\gamma = \alpha = 45^\circ$ и $\beta = \delta = 135^\circ$.

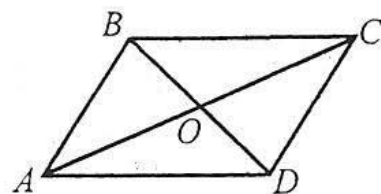


Покрај горните две својства, паралелограмот има и други својства кои ќе ги користиме без притоа истите да ги докажуваме. Тие својства се:

Спротивните страни на паралелограмот $ABCD$ се еднакви, т.е. $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{BC} = \overline{AD}$.
Дијагоналите на паралелограмот се преполовуваат, т.е. една со друга се сечат во нивните средини.

Пример 2. За паралелограмот $ABCD$ на цртежот важи $\overline{AO} = 26\text{ mm}$ и $\overline{BO} = 18\text{ mm}$. Колкави се неговите дијагонали?

Решение. Имаме,
 $\overline{AC} = 2\overline{AO} = 2 \cdot 26 = 52\text{ mm}$ и $\overline{BD} = 2\overline{BO} = 2 \cdot 18 = 36\text{ mm}$.



Покрај наведените својства на паралелограмот, важат и тврдења, некои од кои се обратни на искажаните тврдења, а некои се непосредно поврзани со истите. Всушност тоа се услови при кои еден четириаголник е паралелограм и се познати како *признаци за паралелограм*. Тие тврдења се:

I. Ако секои два соседни агли на еден четириаголник се суплементни, тогаш тој четириаголник е паралелограм

II. Ако секои два спротивни агли на еден четириаголник се еднакви, тогаш тој четириаголник е паралелограм.

III. Ако две спротивни страни на еден четириаголник се паралелни и еднакви, тогаш тој четириаголник е паралелограм.

IV. Ако секои две спротивни страни на еден четириаголник се еднакви, тогаш тој четириаголник е паралелограм.

V. Ако дијагоналите на еден четириаголник се половат, тогаш тој четириаголник е паралелограм.

Пример 3. Два спротивни агли на еден четириаголник се еднакви на 58° , а третиот агол е еднаков на 122° . Докажи дека овој четириаголник е паралелограм.

Решение. Спротивниот агол на аголот од 122° е еднаков на

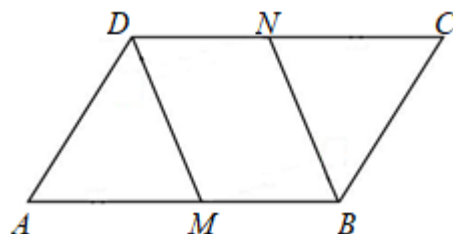
$$360^\circ - (122^\circ + 58^\circ + 58^\circ) = 122^\circ.$$

Сега, од признакот II следува дека четириаголникот е паралелограм.

Пример 4. Даден е паралелограм $ABCD$. Точките M и N се, редоследно, средини на страните AB и CD . Докажи дека четириаголникот $MBNC$ е паралелограм.

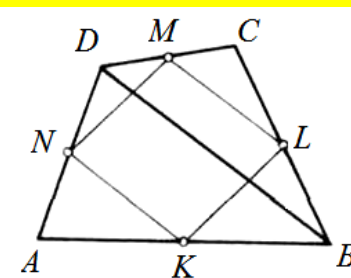
Решение. Бидејќи M и N се средини на спротивни страни на паралелограм добиваме $\overline{BM} = \overline{ND}$. Понатаму, страните AB и CD се паралелни, па затоа $BM \parallel NM$.

Конечно, од прознакот III следува дека $MBNC$ е паралелограм.



Пример 5*. Нека K, L, M, N се соодветно средините на страните AB, BC, CD, DA на конвексниот четириаголник $ABCD$. Докажи дека четириаголникот $KLMN$ е паралелограм.

Решение. Нека $ABCD$ е произволен конвексен четириаголник и нека K, L, M, N се соодветно средините на страните AB, BC, CD, DA . Ја повлекуваме дијагоналата BD на дадениот четириаголник. Тогаш отсечката ML е средна линија за триаголникот BCD , соодветна на страната BD , па затоа $ML \parallel BD$ и $\overline{ML} = \frac{1}{2} \overline{BD}$. Понатаму, KN е средна линија

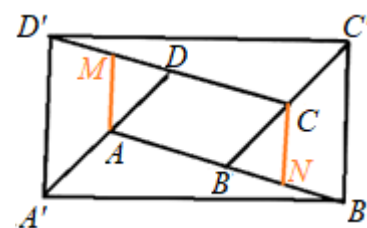


за триаголникот ABD соодветна на страната BD , па затоа $KN \parallel BD$ и $\overline{KN} = \frac{1}{2} \overline{BD}$.

Според тоа, $\overline{ML} = \overline{KN}$ и $ML \parallel KN$, па од признакот III следува дека четириаголникот $KLMN$ е паралелограм.

Пример 6*. Ако во паралелограмот $ABCD$ се продолжат страната AB преку темето B така што $\overline{AB'} = 2\overline{AB}$, страната BC преку темето C така што $\overline{BC'} = 2\overline{BC}$, страната CD преку темето D така што $\overline{CD'} = 2\overline{CD}$ и страната DA преку темето A така што $\overline{DA'} = 2\overline{DA}$, тогаш четириаголникот $A'B'C'D'$ е паралелограм. Докажи!

Решение. Нека M и N се средините на DD' и BB' , соодветно. Тогаш $\overline{CM} = \overline{AN}$ и како $CM \parallel AN$ заклучуваме дека четириаголникот $ANCM$ е паралелограм. Затоа $AM \parallel NC$ и $\overline{AM} = \overline{CN}$. Сега, AM е средна линија во триаголникот $A'DD'$, па затоа $AM \parallel A'D'$ и $2\overline{AM} = \overline{A'D'}$. Од исти причини важи $NC \parallel B'C'$ и $2\overline{NC} = \overline{B'C'}$.

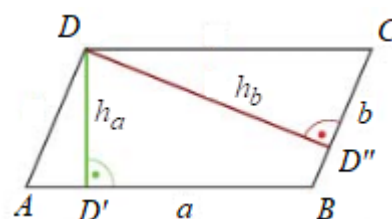


Значи, $A'D' \parallel AM \parallel NC \parallel B'C'$ и $\overline{A'D'} = 2\overline{AM} = 2\overline{NC} = \overline{B'C'}$, што значи дека четириаголникот $A'B'C'D'$ е паралелограм.

Покрај темињата, страните и аглите за паралелограмот значајни елементи се и неговите висини.

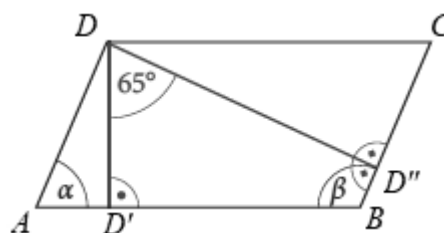
Висина на паралелограмот е најкраткото растојание меѓу спротивни страни.

Значи, паралелограмот има две висини. На цртежот се обележени висините h_a и h_b повлечени од темето D , при што точките D' и D'' се нивни подножни точки.



Пример 7. Висините повлечени од еден од тапите агли на паралелограмот формираат агол од 65° . Определи и внатрешните агли на овој паралелограм.

Решение. Ако од D ги повлечеме висините и D' и D'' се нивни подножни точки, тогаш во четириаголникот $DD'D''$ важи $\angle D'DD'' = 65^\circ$. Затоа $\beta = 360^\circ - (65^\circ + 2 \cdot 90^\circ) = 115^\circ$. Значи, $\alpha = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$.

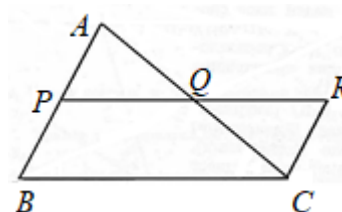


За оние што сакаат да знаат повеќе

Во претходните лекции зборувавме за средната линија на триаголникот, како и дека висините на триаголникот се сечат во една точка, а истото важи и за тежишните линии. Во продолжение, користејќи ги признаците за паралелограм, ќе ги докажеме тврдењата за средната линија и висините.

Задача. Ако P и Q се соодветно средините на страните AB и AC на триаголникот ABC , тогаш $\overline{PQ} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ и $PQ \parallel BC$. Докажи!

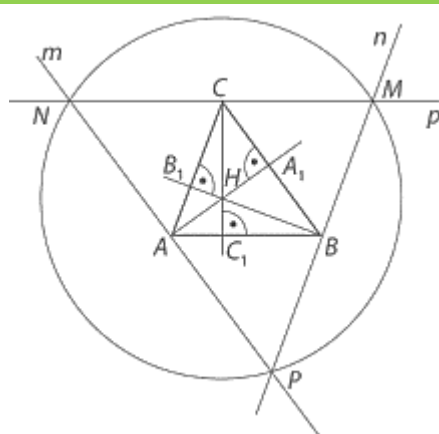
Доказ. Нека точката R лежи на продолжението на отсечката PQ преку точката Q и е таква што $\overline{QR} = \overline{PQ}$. Според условот имаме $\overline{AQ} = \overline{CQ}$, што значи дека точката Q е заедничка средина на дијагоналите на четириаголникот



$APCR$. Сега, од признакот V следува дека четириаголникот $APCR$ е паралелограм. Понатаму, од својствата на паралелограмот следува дека $AP \parallel RC$ и $\overline{AP} = \overline{RC}$. Но, според условот имаме $\overline{AP} = \overline{BP}$, па затоа $\overline{RC} = \overline{BP}$ и уште $BP \parallel RC$. Сега, од признакот III следува дека четириаголникот $PBCR$ е паралелограм. Затоа од својствата на паралелограмот следува $\overline{BC} = \overline{PR}$ и $BC \parallel PR$. Но, Q е средина на PR , па затоа $\overline{PQ} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ и $PQ \parallel BC$.

Задача. Правите определени со висините се сечат во една точка. Докажи!

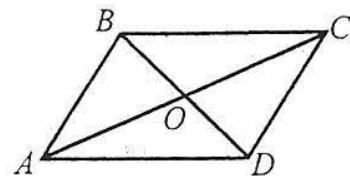
Доказ. Нека е даден триаголникот ABC , во кој се повлечени висините AA_1, BB_1, CC_1 . Низ точката A повлекуваме права $m \parallel BC$, низ точката B права $n \parallel AC$ и низ точката C права $p \parallel AB$. Од $m \parallel BC$ и $AA_1 \perp BC$ следува $m \perp AA_1$. Слично, важи $n \perp BB_1$ и $p \perp CC_1$.



Нека M, N, P се пресечните точки на правите m, n, p . Имаме, $m \parallel BC$ и $p \parallel AB$, па затоа четириаголникот $ABCN$ е паралелограм. Слично, од $m \parallel BC$ и $n \parallel AC$ следува дека четириаголникот $BCAP$ е паралелограм. Според тоа, $\overline{AN} = \overline{BC} = \overline{AP}$. Тоа значи, дека точката A е средина на отсечката PN и како $m \perp AA_1$ добиваме дека AA_1 е симетрала на страната PN на триаголникот MNP . Слично, BB_1 е симетрала на страната MP и CC_1 е симетрала на страната AB . Тоа значи дека правите AA_1, BB_1 и CC_1 се сечат во центарот H на опишаната кружница на триаголникот MNP , што и требаше да се докаже.

Задачи за вежби

138. Еден внатрешен агол на паралелограмот е еднаков на 75° . Определи ги аглите на овој паралелограм.
139. Еден внатрешен агол на паралелограмот е пет пати поголем од другиот. Определи ги аглите на овој паралелограм.
140. За паралелограмот $ABCD$ на цртежот важи $\overline{AO} = 2,9 \text{ cm}$ и $\overline{BO} = 8,8 \text{ cm}$.

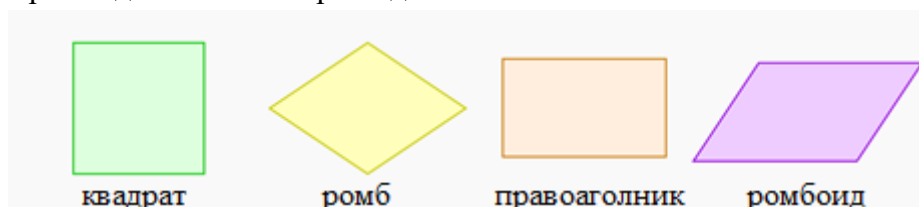


- Колкави се неговите дијагонали?
141. Два спротивни агли на еден четириаголник се еднакви на 68° , а третиот агол е еднаков на 112° . Докажи дека овој четириаголник е паралелограм.
 142. Даден е паралелограм $ABCD$. Точките M и N се, редоследно, на страните AB и CD и се такви што $\overline{AM} : \overline{MB} = \overline{CN} : \overline{ND} = 2:1$. Докажи дека четириаголникот $MBNC$ е паралелограм.

143. Висините повлечени од еден од тапите агли на паралелограмот формираат агол од 78° . Определи и внатрешните агли на овој паралелограм.

2.24 Видови паралелограми

Како што знаеме кај паралелограмот страните се две по две паралелни, од што следува дека спротивните страни се еднакви. Меѓутоа, соседните страни може да се еднакви и да се различни. Ова е едно од својствата за поделба паралелограмите. Друго својство е дали паралелограмот има или нема прави агли. Во зависност од овие два својства разликуваме четири видови паралелограми и тоа: квадрат, ромб, правоаголник и ромбоид. Со некои од овие паралелограми се среќаваше и во претходните оделенија, но сепак накратко е ги разгледаме сите четири вида.



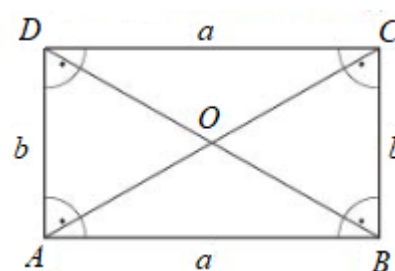
Паралелограмот кој нема ниту прави агли, ниту еднакви соседни страни го нарекуваме *ромбоид*.

Сите својства искажани за паралелограмите важат и за ромбоидот.

Паралелограмот на кој сите агли му се прави го нарекуваме *правоаголник*.

За правоаголникот е точно следново тврдење.

Во правоаголникот дијагоналите се еднакви.

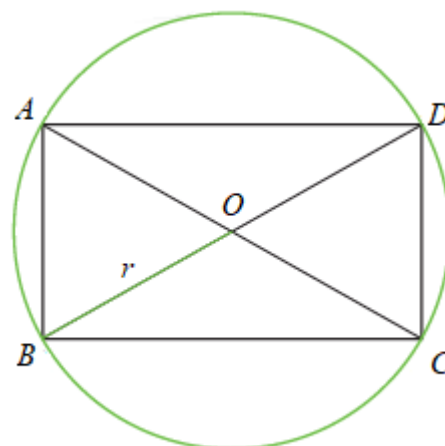


Важи и обратното тврдење, кое е познато како признак за правоаголник.

Ако дијагоналите на еден паралелограм се еднакви, тогаш тој е правоаголник.

Нека O е пресечната на дијагоналите на правоаголникот. Бидејќи дијагоналите на паралелограмот се половат, а кај правоаголникот тие се еднакви заклучуваме дека $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$.

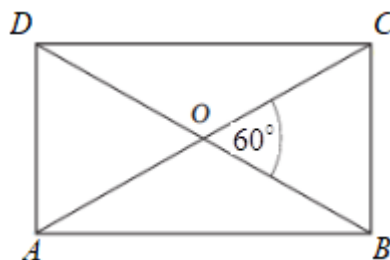
Според тоа, точно е следново тврдење.



Околу правоаголникот може да се опише кружница. Центарот на кружницата е во пресекот на дијагоналите на правоаголникот.

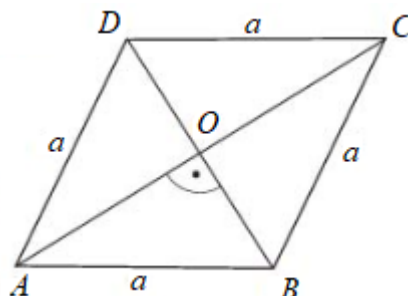
Пример 1. Дијагоналите на правоаголникот $ABCD$ се сечат под агол од 60° . Определи го $\angle BAC$.

Решение. Триаголникот BCO е рамностран. Значи, $\angle BCO = 60^\circ$. Сега, од правоаголниот триаголник ACB следува $\angle BAC = 30^\circ$.



Паралелограмот на кој сите страни му се еднакви го нарекуваме *ромб*.

Од $\overline{AD} = \overline{AB}$ и $\overline{CD} = \overline{CB}$ следува дека точките A и C припаѓаат на симетралата на дијагоналата BD . Значи, AC е симетрала на BD . Оттука следува тврдењето.

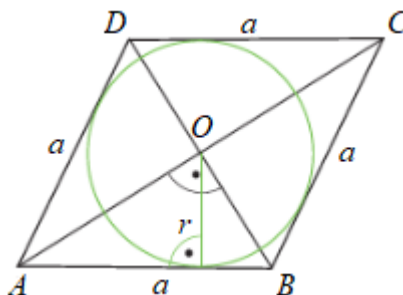


Дијагоналите на ромбот се заемно нормални.

Триаголниците ABD и CBD се рамнокраки. Сега од својствата на рамнокракиот триаголник следува тврдењето.

Дијагоналите на ромбот се симетрали на аглите на ромбот.

Од претходното тврдење следува дека пресекот на дијагоналите O е еднакво оддалечен од страните на ромбот. Според тоа, точно е следново тврдење.



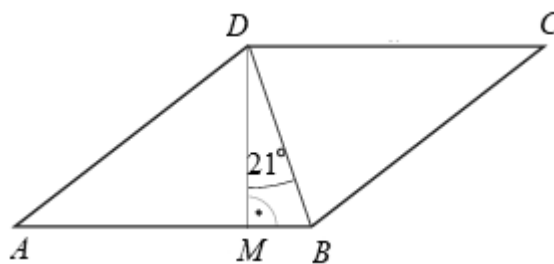
Во ромбот може да се впиши кружница.

Пример 2. Висината и дијагоналата на ромбот повлечени од исто теме формираат агол од 21° . Определи ги внатрешните агли на ромбот.

Решение. Од триаголникот BDM добиваме $\angle MBD = 90^\circ - 21^\circ = 69^\circ$. Бидејќи кај ромбот дијагоналите се симетрали на внатрешните агли заклучуваме дека

$$\beta = 2 \cdot \angle MBD = 2 \cdot 69^\circ = 138^\circ.$$

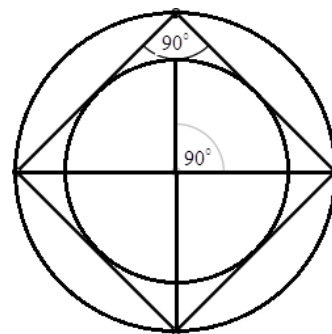
Според тоа, $\delta = \beta = 138^\circ$ и $\alpha = \gamma = 42^\circ$.



Квадрат е паралелограм чии страни се меѓусебно еднакви, а аглите се прави.

Од претходните разгледувања следува дека квадратот е ромб со прави агли. Тоа значи дека квадратот ги има следниве својства:

- сите страни му се еднакви,
- сите агли му се прави,
- дијагоналите му се еднакви,
- дијагоналите се заемно нормални,
- дијагоналите се симетрала на аглите,
- околу квадратот може да се опише кружница,
- во квадратот може да се впише кружница.

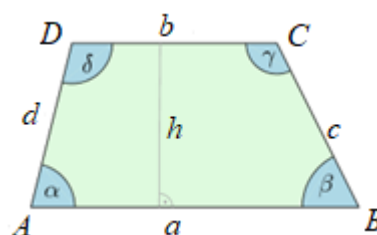


Задачи за вежби

144. Во четириаголникот $ABCD$ важи $\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$. Дали четириаголникот $ABCD$ е паралелограм?
145. На кој вид паралелограми припаѓа четириаголникот $ABCD$ чии страни се со должини $\overline{AB} = \overline{CD} = 4\text{ cm}$, $\overline{BC} = \overline{AD} = 3\text{ cm}$ и барем еден агол е прав.
146. На кој вид паралелограми припаѓа четириаголникот $ABCD$ чии страни се со должини $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{BC} = \overline{AD} = 3\text{ cm}$ и барем еден агол е прав.
147. Дијагоналите на правоаголникот $ABCD$ се сечат под агол од 50° . Определи го $\angle BAC$.
148. Определи ги внатрешните агли на ромбот $ABCD$, ако симетралата на $\angle BAC$ ја сече дијагоналата BD под агол 68° .
149. Висината и дијагоналата на ромбот повлечени од исто теме формираат агол од 25° . Определи ги внатрешните агли на ромбот.
150. Дадена е кружница во која AB и CD се дијаметри. Докажи дека четириаголникот $ACBD$ е правоаголник.
151. Даден е квадрат $ABCD$. Средините на страните се точките M, N, P, Q . Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ е квадрат.

2.25 Трапез, видови трапези. Делтоид

Од дефиницијата на трапезот следува дека трапез е четириаголник кај кој две страни се паралелни, а другите две не се паралелни. Паралелните страни ги нарекуваме *основи*, а другите две страни ги нарекуваме *краци* на трапезот. На цртежот е прикажан трапез $ABCD$ чии основи се $\overline{AB} = a$ и $\overline{CD} = b$, а краци се $\overline{BC} = c$ и $\overline{AD} = d$.



На цртежот се означени аглите на трапезот $ABCD$. Правите AD и BC се трансверзали на правите AB и CD . Затоа аглите α и δ се спротивни, и аглите β и γ се спротивни, што значи $\alpha + \delta = 180^\circ$ и $\beta + \gamma = 180^\circ$. Значи, докажавме дека:

Внатрешните агли што лежат на ист крак на трапезот се суплементни.

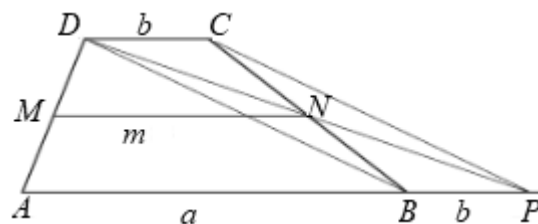
Пример 1. Два внатрешни агли на трапезот се еднакви на 83° и 65° . Определи ги другите два агли.

Решение. Бидејќи $83^\circ + 65^\circ = 148^\circ$ заклучуваме дека дадените агли не лежат на ист крак на трапезот. Тоа значи дека другите два агли се суплементните агли на дадените агли. Според тоа, другите два агли се $180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$ и $180^\circ - 83^\circ = 97^\circ$.

Отсечката чии крајни точки се средините на краците на трапезот ја нарекуваме средна линија на трапезот. Најчесто се означува со m .

Средната линија на трапезот е паралелна со неговите основи и е еднаква на нивниот полузбир.

Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе). На цртежот M и N се средини на краците AD и BC , а MN е средната линија. Нека P е точка на продолжението на долната основа таква што $\overline{BP} = b$. Четириаголникот $BPCD$ има еднакви и паралелни спротивни страни, што значи дека е паралелограм. Според тоа, неговите дијагонали се поделени на половина. Тоа значи дека дијагоналата PD минува низ точката N , од каде следува дека MN е средна линија на триаголникот APD . Затоа $MN \parallel AB$ и $m = \frac{a+b}{2}$.



Пример 2. а) Пресметај ја средната линија на трапез со основи $a = 8 \text{ cm}$ и $b = 4 \text{ cm}$.
б) Определи ја другата основа на трапезот за кој $a = 18 \text{ cm}$ и $m = 11 \text{ cm}$.

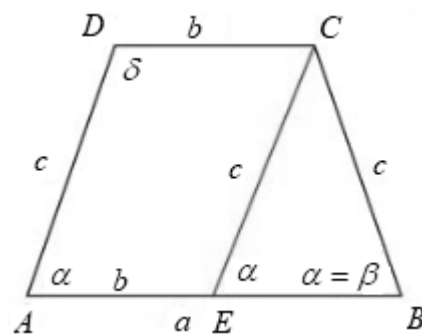
Решение. а) Имаме: $m = \frac{a+b}{2} = \frac{8+4}{2} = 6 \text{ cm}$.

б) Имаме: $a + b = 2m$, од каде добиваме $b = 2m - a = 2 \cdot 11 - 18 = 4 \text{ cm}$.

За трапезот чии краци се еднакви велиме дека е рамнокрак трапез.

Аглите што лежат на иста основа на рамнокракиот трапез се еднакви.

Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе). Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез. Повлекуваме отсечка $CE \parallel AD$. Тогаш четириаголникот $AECD$ има два пара паралелни страни, па затоа тој е паралелограм, т.е. $\overline{AD} = \overline{EC} = c$. Значи, триаголникот EBC е рамнокрак, па затоа $\alpha = \beta$. Според тоа, аглите при долната основа се еднакви, па како аглите што лежат на ист крак се суплементни заклучуваме дека и аглите на горната основа се еднакви.



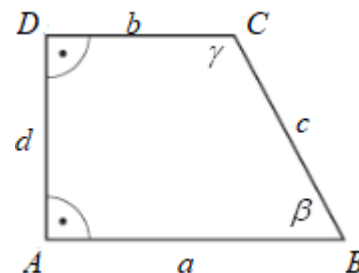
Пример 3. Определи ги внатрешните агли на рамнокрак трапез, ако едниот негов внатрешен агол е 83° .

Решение. Нека $\alpha = 83^\circ$. Тогаш $\delta = \alpha = 83^\circ$. Сега, од $\alpha + \delta = 180^\circ$ и $\gamma = \delta$ следува $\delta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 83^\circ = 97^\circ$ и $\gamma = 97^\circ$.

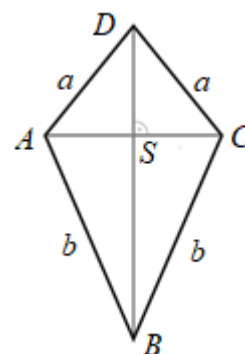
Правоаголен трапез е трапез кој има точно два прави агли.

Пример 4. Тапиот агол на правоаголен трапез е четири пати поголем од остриот агол. Определи ги овие агли.

Решение. Имаме, $\delta = \alpha = 90^\circ$, а $\gamma = 4\beta$. Од $\gamma + \beta = 180^\circ$ добиваме $4\beta + \beta = 180^\circ$, од каде добиваме $5\beta = 180^\circ$, т.е. $\beta = 36^\circ$. Значи, $\gamma = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$.



Како што знаеме, трапезоид е четириаголник кој нема паралелни страни. Но дали трапезоидот може да има еднакви страни. Да нацртаме отсечка AC и од двете страни на отсечката да конструираме рамнокраки триаголници ABC и ACD, но со различни краци. Со тоа добивме четириаголник кој има два пара еднакви соседни страни.



Четириаголникот кој има два пара соседни еднакви страни го нарекуваме *делтоид*.

Бидејќи $\angle DAC = \angle DCA$ и $\angle BAC = \angle BCA$, добиваме

$$\angle BAD = \angle BAC + \angle DAC = \angle BCA + \angle DCA = \angle BCD.$$

Со тоа докажавме дека:

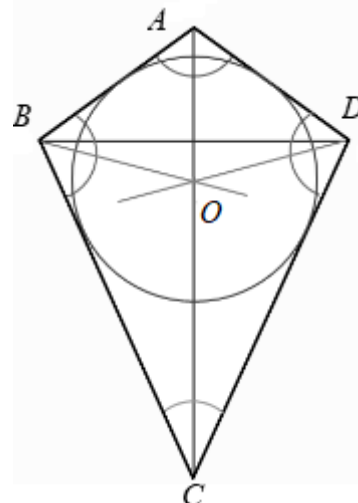
Аглите на делтоидот формирани од нееднаквите страни се еднакви меѓу себе.

За делтоидот ABCD важи $\overline{AD} = \overline{AB}$ и $\overline{CB} = \overline{CD}$. Од својството на симетралата на отсечка следува дека темињата A и C припаѓаат на симетралата на дијагоналата BD.

Оттука следуваат тврдењата:

Дијагоналите на делтоидот се заемно нормални.
Делтоидот е осносиметрична 2Д форма.

Во делтоидот ABCD се нацртани оската на симетрија и симетралите на еднаквите агли. Бидејќи оската на симетрија е и симетрала на нееднаквите агли, точката O е ед-



накво оддалечена од страните AB и AD , односно од страните BC и CD . Но, O е еднакво оддалечена од AB и BC , што значи дека таа е еднакво оддалечена од сите страни на делтоидот. Оттука следува тврдењето.

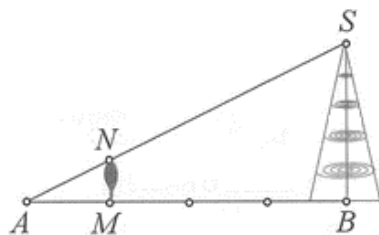
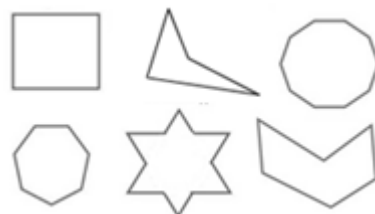
Во секој делтоид миоже да се впише кружница..

Задачи за вежби

152. Два внатрешни агли на трапезот се еднакви на 63° и 77° . Определи ги другите два агли.
153. Пресметај ја средната линија на трапез со основи $a = 21\text{ cm}$ и $b = 8\text{ cm}$.
154. Определи ја другата основа на трапезот за кој $a = 24\text{ cm}$ и $m = 16\text{ cm}$.
155. Определи ги внатрешните агли на рамнокрак трапез, ако едниот негов внатрешен агол е 102° .
156. Збирот на два внатрешни агли на рамнокрак трапез е 210° . Определи ги другите два агли.

Провери го своето знаење 5

1. Прецртај ги дадените многуаголници. Потоа конвексните обој ги со сина боја, а неконвексните обој ги со црвена боја. Со повлекување на отсечки покажи дека даден многуаголник е неконвексен.
2. Дали со отсечки со должини 7 cm , 5 cm , 25 mm може да се нацрта триаголник?
3. Пресметај ги агли на триаголникот ABC ако еден внатрешен агол е $\beta = 50^\circ$ и еден надворешен агол е $\gamma_1 = 85^\circ$.
4. Опиши кружница околу рамнокрак триаголник ABC со основа $\overline{AB} = 5\text{ cm}$ и краци $\overline{AC} = \overline{BC} = 4\text{ cm}$. Каде се наоѓа нејзиниот центар?
5. Даден е остриот агол α . Конструирај го аголот $75^\circ + \alpha$.
6. Колку е висок столбот на цртежот ако важи $\overline{AB} = 4\overline{AM}$, а дрвото MN е високо $3,5\text{ cm}$? Одговорот да се образложи!
7. Нека должините на страните на триаголникот ABC се $a = 11\text{ cm}$, $b = 19\text{ cm}$ и $c = 12\text{ cm}$. Подреди ги неговите агли по големина.

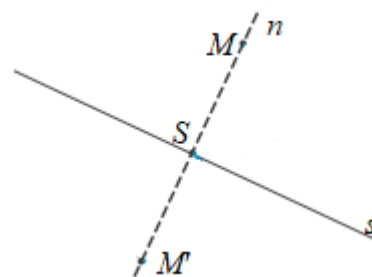


8. Конструирај триаголник ABC со страни $\overline{AB} = 6\text{ cm}$, $\overline{BC} = 4\text{ cm}$, $\overline{CA} = 3\text{ cm}$.
Опреди го ортоцентарот на триаголникот. Колку е оддалечен ортоцентарот од темето на тапиот агол?
9. Во четириаголникот $ABCD$ познати се аглие $\alpha = 76^\circ$, $\beta = 44^\circ$ и $\gamma_1 = 122^\circ$.
Опреди го аголот δ .
10. Еден внатрешен агол на паралелограмот е осум пати поголем од другиот.
Опреди ги аглие на овој паралелограм.
11. Висината и дијагоналата на ромбот повлечени од исто теме формираат агол од 32° . Опреди ги внатрешните агли на ромбот.
12. Пресметај ја средната линија на трапез со основи $a = 21\text{ cm}$ и $b = 8\text{ cm}$.

2.26 Осна симетрија

Со осната симетрија се запозна во претходните одделенија и научи да определуваш положба на точка, права и многуаголник со осна симетрија во координатен систем. При тоа оската (правата) на симетрија беше паралелна со координатните оски. Во продолжение ќе повториме за осната симетрија, но ќе научиме и нови работи за ова пресликување во рамнината.

Нека е дадена права s и M е произволна точка. Низ точката M цртаме права n нормална на правата s . Правата n ја сече правата s во точка S . Потоа на правата n определуваме точка M' таква што $\overline{OM'} = \overline{OM}$, $M' \neq M$.



За вакви две точки M и M' велиме дека се *осносиметрични* во однос на правата s , а правата s ја нарекуваме *оска на симетрија*.

Пресликувањето кое на секоја точка M и ја придружува нејзината осносиметрична слика M' во однос на дадена права s го нарекуваме *осна симетрија* во однос на правата s . Да забележиме дека осната симетрија е определена ако се знае оската или пак две точки кои се пресликуваат една во друга.

Точни се следниве тврдења:

а) При осна симетрија отсечка се пресликува во отсечка еднаква со неа.

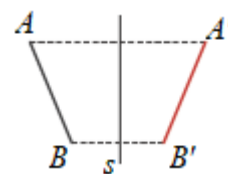
б) Слика на права p при осна симетрија со оска s е права p' и

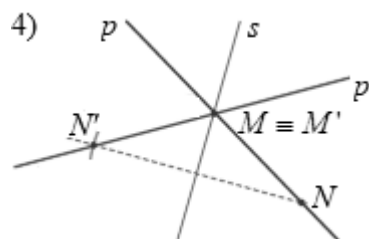
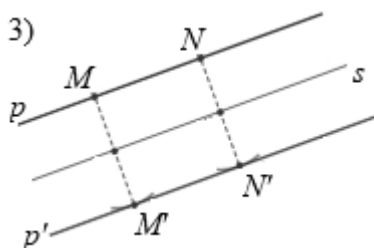
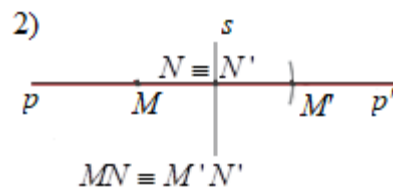
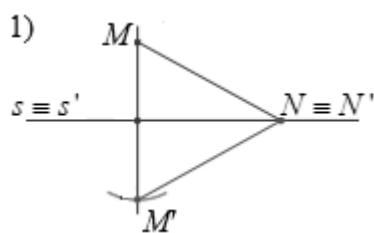
1) s се пресликува во самата себа;

2) ако $p \perp s$, тогаш $p' \equiv p$;

3) ако $p \parallel s$, тогаш $p' \parallel s$ и

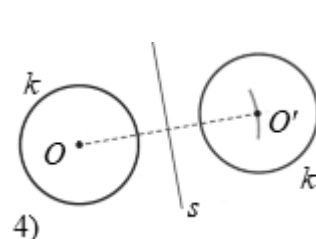
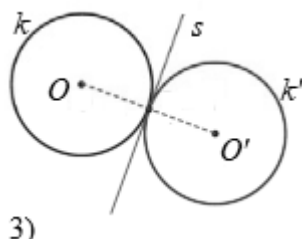
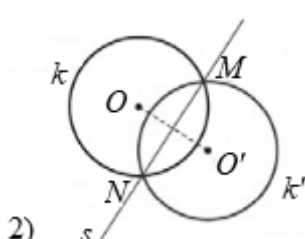
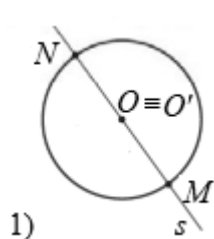
4) ако $p \parallel s$, тогаш s е симетрала на еден од аглие определени со p и p' .



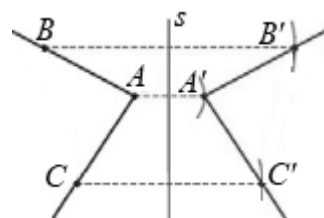


в) Слика на кружница $k(O, r)$ при осна симетрија со оска s е кружница $k'(O', r)$ таква, што центарот O се пресликува во центарот O' . Разликуваме четири случаи:

- 1) Центарот на O кружницата лежи на оската s .
- 2) Оската s и кружницата имаат две заеднички точки.
- 3) Оската и кружницата имаат една заедничка точка.
- 4) Оската и кружницата немаат заеднички точки.



в) Сликата на агол при осна симетрија е агол, еднаков со дадениот агол. На цртежот е прикажан еден од можните случаи на положбата на аголот и оската на симетрија. Обиди се да нацрташ и други случаи.



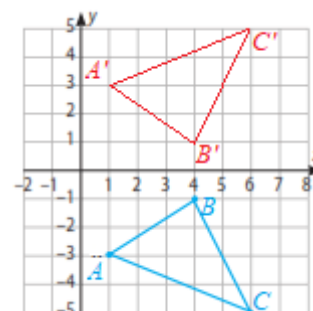
Бидејќи агол се пресликува во еднаков агол и отсечка се пресликува во еднаква отсечка, добиваме дека многуаголник се пресликува во еднаков многуаголник или уште велиме во складен многуаголник.

Минатата година научи да црташ слика на многуаголник при осна симетрија каде оската на симетрија е некоја од координатните оски или права паралелна со некоја од координатните оски. Да разгледаме два примера.

Пример 1. На цртежот е даден триаголникот ABC чија слика при осна симетрија со x – оската како оска на симетрија е триаголникот $A'B'C'$. Како што можеме да видиме координатите на темињата на триаголникот се:

$$A(1, -3), B(4, -1), C(6, -5).$$

Понатаму, координатите на сликата $A'BC'$ се:



$$A'(1, 3), B'(4, 1), C'(6, 5).$$

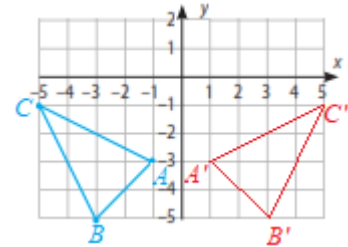
Забележуваме дека во случајот првата координата не се менува, а втората координата го менува знакот. Ова, при осна симетрија во однос на x -оската важи во општ случај. Зошто?

Пример 2. На цртежот е даден триаголникот ABC чија слика при осна симетрија со y -оската како оска на симетрија е триаголникот $A'B'C'$. Како што можеме да видиме координатите на темињата на триаголникот се:

$$A(-1, -3), B(-3, -5), C(-5, -1).$$

Понатаму, координатите на сликата $A'BC'$ се:

$$A'(1, -3), B'(3, -5), C'(5, -1).$$

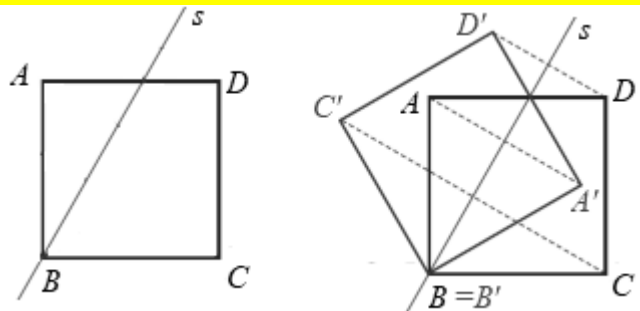


Забележуваме дека во случајот втората координата не се менува, а првата координата го менува знакот. Ова, при осна симетрија во однос на y -оската важи во општ случај. Зошто?

Начинот на добивање на слика на многуаголник при осна симетрија е потполно ист и ако немаме координатен систем. Да разгледаме еден пример.

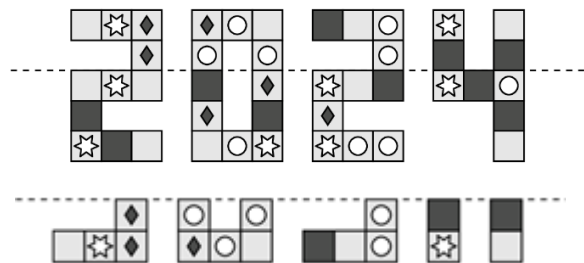
Пример 3. На левиот цртеж се дадени квадрат $ABCD$ и права s . Нацртај ја сликата на квадратот $ABCD$ при осна симетрија со оска на симетрија s .

Решение. Ги цртаме сликите на темињата на квадратот при дадената осна симетрија. Потоа имајќи предвид дека отсечка се пресликува во отсечка, ги поврзуваме сликите со што го добиваме квадратот $A'B'C'D'$, кој е слика на квадратот $ABCD$ при дадената осна симетрија.



Пример 4*. Адмир по испрекинатите линии го превиткал прикажаниот цртеж, кој е нацртан на просирна хартија. Кое од малите квадратчиња се пресликало во самото себе?

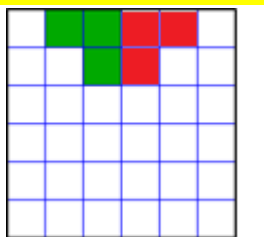
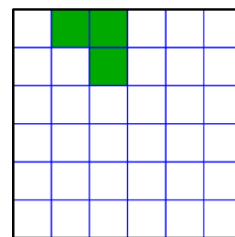
Решение. По превиткувањето на цртежот горниот дел изгледал како што е прикажано. Како што гледаме единствено квадратчето со ромбот во левиот агол на нулата се пресликува во самото себе.



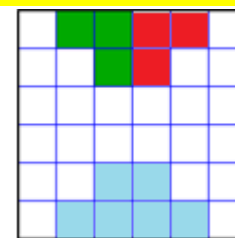
До истиот заклучок доаѓаме и ако земеме предвид дека при превиткувањето ние всушност го пресликуваме горниот дел со осна симетрија каде оската е испрекинатата линија.

Пример 5. Кој е најмалиот број на квадратчиња што треба да се обои на цртежот десно за да се добие фигура со четири оски на симетрија?

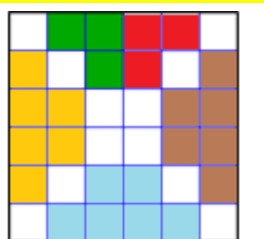
Решение. Бидејќи квадратот има четири оски на симетрија (Зошто?), ние треба да обоиме најмал број квадратчиња така што обоените квадратчиња ќе бидат симетрични во однос на оските на симетрија на квадратот.



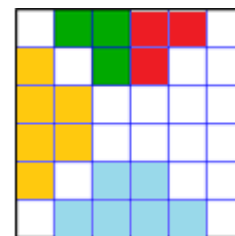
Прво да ја земеме оската на симетрија на квадратот која поминува низ средините на горната и долната страна. Ако го обоиме најмалиот можен број квадрати така што добиваме осносиметричен лик го добиваме цртежот десно, на кој имаме 3 нови обоени квадратчиња.



Сега да ја земеме оската на симетрија која поминува низ средините на вертикалните страни на квадратот. Ако го обоиме најмалиот можен број квадрати така што да добиеме осносиметричен лик, го добиваме цртежот лево, на кој имаме 6 нови обоени квадратчиња.



Понатаму, да ја земеме оската на симетрија која поминува низ долното лево и горното десно теме на квадратот. Ако го обоиме најмалиот можен број квадрати со што добиваме осносиметричен лик, го добиваме цртежот десно, на кој имаме 6 нови обоени квадратчиња.



На крајот, да ја земеме оската на симетрија која поминува низ горното лево и долното десно теме на квадратот. Ако го обоиме најмалиот можен број квадрати со што добиваме осносиметричен лик го добиваме цртежот десно, на кој имаме 6 нови обоени квадратчиња.

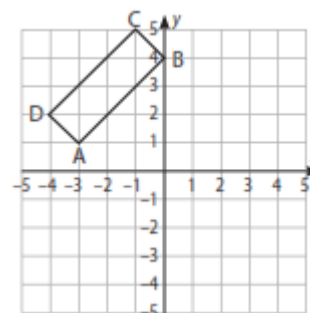
Конечно, треба да обоиме $3 + 6 + 6 + 6 = 21$ квадратче.

Задачи за вежби

157. Одреди ја сликата на правоаголникот $ABCD$ при осна симетрија каде оската на симетрија е:

- а) x – оската,
- б) y – оската.

Потоа запиши ги координатите на темињата на правоаголникот $ABCD$ и добиените слики.



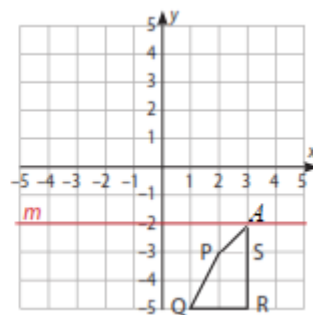
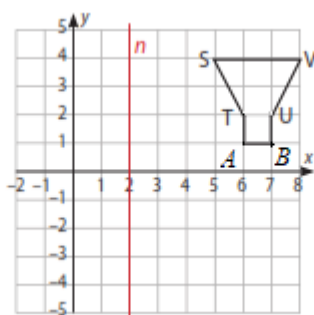
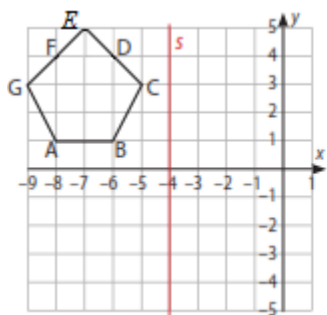
158. Кој од следниве сообраќајни знаци има најмногу оски на симетрија?

- A)
- B)
- C)
- D)
- E)

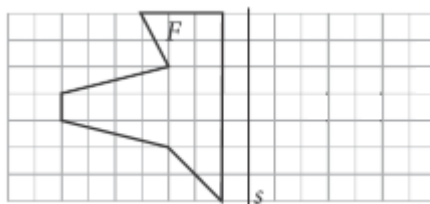
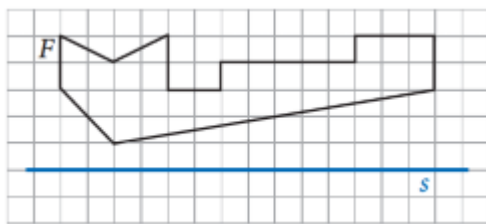
159. Кој од следниве сообраќајни знаци има најмногу оски на симетрија?

- A)
- B)
- C)
- D)
- E)

160. Определи ги симетричните слики на дадените многуаголници во однос на дадените оски.



161. Определи ја сликата на фигурата F при дадената осна симетрија.



162. Нацртај конвексен петаголник $ABCDE$ и права s , а потоа определи ја сликата на петаголникот при осна симетрија во однос на правата s .

163. Гордан превиткал парче хартија и користејќи дупчалка, на свитканото парче хартија, направил една дупка. Потоа хартијата ја одвиткал и таа изгледала како што е прикажано на цртежот десно. Како Гордан го превиткал парчето хартија?



164. Ана превиткала едно парче хартија двапати, а потоа на свитканата хартија направила една дупка. Кога ја одвиткала хартијата, парчето хартија изгледало како на цртежот десно. Како Ана го превиткала парчето хартија?



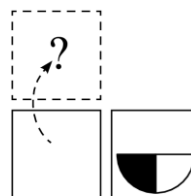
165. Андон превиткал едно парче хартија двапати, а потоа на свитканата хартија направил една дупка. Кога ја одвиткал хартијата, парчето хартија изгледало како на цртежот десно. Како Андон го превиткал парчето хартија?



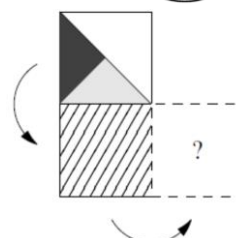
166. Ангел црта симетрични слики на дадената фигура на цртежот десно, во однос на двете нацртани оски на симетрија. Како ќе изгледаат цртежот на кој се гледаат само добиените симетрични фигури?



167. Кога фигурата нацртана во долниот лев квадрат ќе се преврти на десно, се добива фигурата која е прикажана на долниот десен квадрат (цртеж десно). Што ќе се види ако фигурата се преврти нагоре?



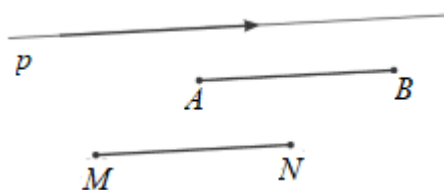
168. Павел ја превртува фигурата, така што долната страна на фигурата станува горна страна, а потоа фигурата ја превртува така што десната страна станува лева страна (види цртеж десно). Што на крајот ќе види Павел?



2.27 Транслација

Со транслацијата се запозна во претходните одделенија, при што научи како со транслација да наоѓаш слика на дадена 2Д фигура во координатен систем. Сега, ќе го повторим наученото и ќе ги проширим своите знаења за транслацијата.

Нека се дадени отсечка MN и права p , која оп-ределува правец на движење и на неа нека е избрана една од можните две насоки за движење. Да земеме произволна точка A . Поместувањето на точката A во правец на правата p и во избраната насока на неа

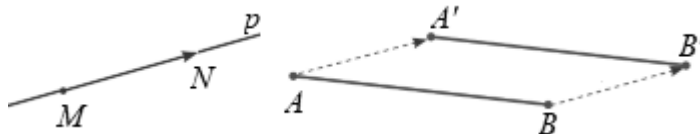


така што се добива точка B , при што е исполнето равенството $\overline{AB} = \overline{MN}$, го нарекуваме *транслација*.

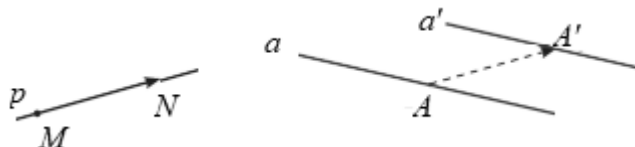
Од претходно кажаното следува дека транслацијата е определена со *правец*, *насока* на поместување и со *расстојанието* меѓу сликата и оригиналот.

Точни се следниве тврдења:

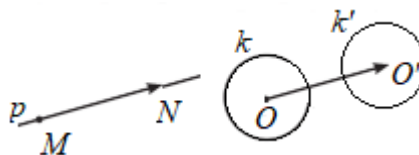
а) При транслација отсечка се пресликува во отсечка еднаква со неа.



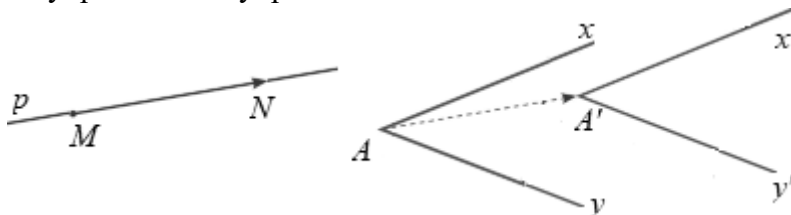
б) При транслација слика на права a е права a' која се добива ако транслтираме произволна точка $A \in a$, со што добиваме точка A' и потоа во точката A' конструираме права a' паралелна на a .



в) При транслација слика на кружница $k(O, r)$ е кружница k' која се добива ако го транслтираме центарот O со што го добиваме центарот O' на $k'(O', r)$.



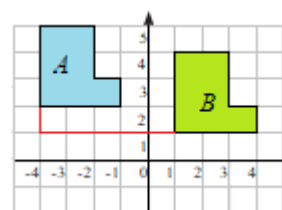
г) При транслација агол се пресликува во нему еднаков агол со паралелни краци. Притоа доволно е да го пресликаме темето на аголот, а потоа да повлечеме паралелни истонасочени полуправи со полуправите на дадениот агол.



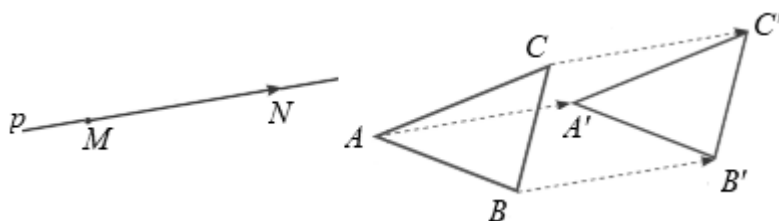
Бидејќи агол се пресликува во еднаков агол со паралелни краци и отсечка се пресликува во еднаква отсечка, добиваме дека многуаголник се пресликува во еднаков многуаголник. Притоа двата многуаголници имаат соодветни паралелни страни.

Минатата година научи да црташ слика на многуаголник при трансляција во координатен систем, така што трансляцијата ја реализираше паралелно со некоја од координатните оски. Да разгледаме еден пример.

Пример 1. На цртежот во координатен систем се прикажани две форми A и B . Со црвена искршена линија е прикажано како со трансляции: прво за 1 единица во правец на y -оката и тоа во негативна насока, а потоа за 5 единици во правец на x -оската и тоа во позитивна насока од формата A може да се добие формата B .

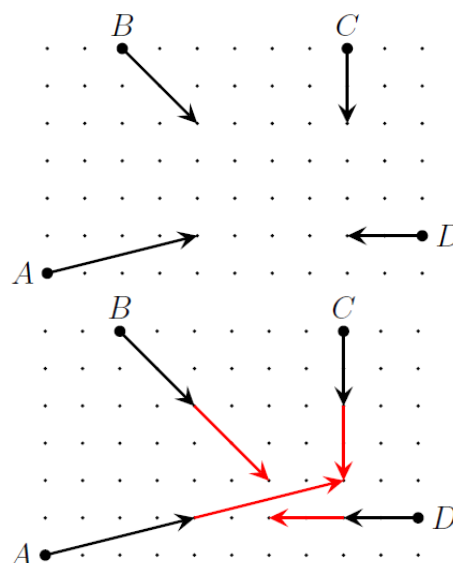


Пример 2. На цртежот е прикажана трансляција на триаголник. Истата е добиена со транслатирање на трите темиња и поврзување на добиените слики.



Пример 3. Дијаграмот на цртежот десно ги покажува почетните положби, насоките на движења и должините за кои четири автомобили A, B, C, D се поместуваат за пет секунди. Ако автомобилите продолжат да се движат во истите насоки и со истите брзини, кои два автомобили ќе се судрат?

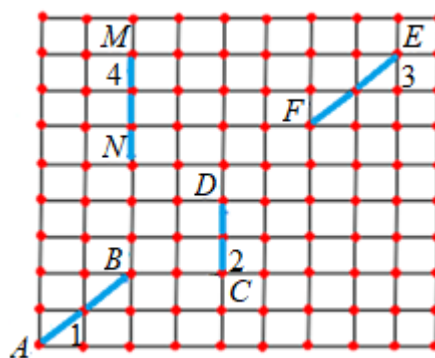
Решение. Во следните 5 секунди, секој автомобил ќе се помести во истиот правец и насока и за исто растојание како и пред тоа. Положбите на автомобилите се добиваат ако секој уште еднаш се транслатира на истиот начин. Така се добива состојбата прикажана на цртежот десно. Значи, ќе се судрат автомобилите A и C .



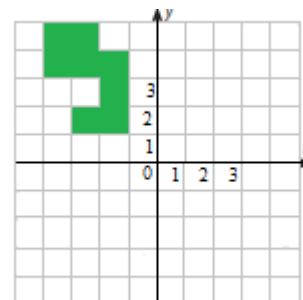
Задачи за вежби

169. Нацртај отсечка MN и права p , на која е избереш насока. Нацртај разностран правоаголен триаголник и опиши околу него кружница. Пресликај ги триаголникот и кружницата со трансляција определена со MN и p . Каков е заемниот однос на добиените слики.
170. Нацртај отсечка MN и права p , на која е избереш насока. Нацртај рамнокрак триаголник и потоа истиот пресликај го со трансляцијата определена со MN и p .

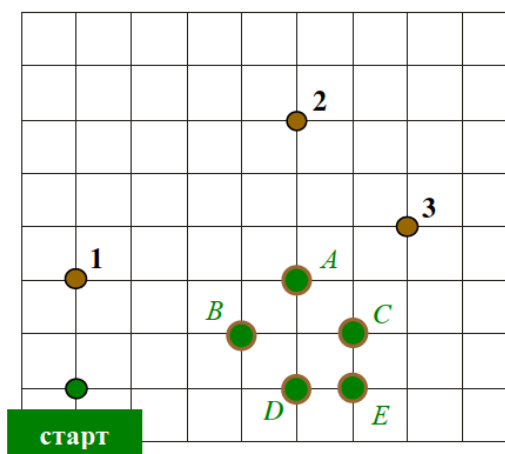
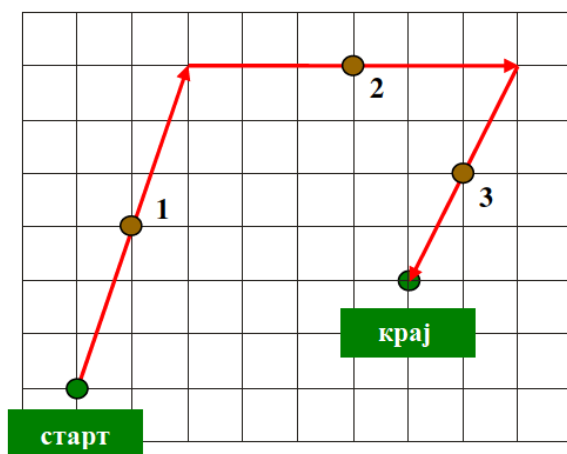
171. Во забавен парк четири електрични коли кои се означени со броевите 1, 2, 3 и 4 се движеле вкупно 10 секунди по прави линии, секоја со своја постојана брзина. Тие тргнале едновременно и на почетокот се наоѓале во точките A, C, E, M за да по 5 секунди соодветно се најдат во точките B, D, F, M . Кои коли ќе се судрат на крајот од десеттата секунда?



172. На цртежот е дадена фигура во координатен систем. Прво транслатирај ја дадената фигура за 6 единици во правец на x -оската во позитивна насока, потоа транслатирај ја во правец на y -оската во негативна насока за 6 единици и на крајот најди нејзина слика при осна симетрија со оска на симетрија y -оската.



173. Кенгурите Хип и Хоп играат игра. Тие прескокнуваат преку камења, при што прескокнатиот камен е средина на растојанието изминато при скокот. На цртежот лево е прикажано како Хоп скокал прескокнувајќи ги камењата 1, 2 и 3 во дадениот редослед. Хип треба да ги прескокне истите три камења 1, 2 и 3 во дадениот редослед, но скокањето го почнал од друга позиција. Која од точките A, B, C, D и E ќе биде точка во која тој ќе стаса?



Упатство. Секој скок замени го со две транслации од местото на скокање до каменот и уште една таква.

2.28 Ротација

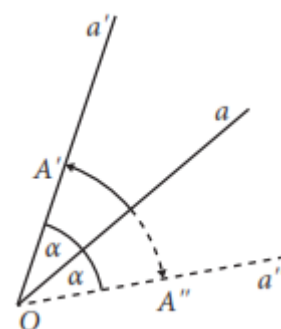
Со ротацијата се сретна минатата учебна година. Сега ќе повториш за ротацијата и ќе ги прошириш своите знаења за ова движење.

Ротација во рамнината околу точка O за агол α е геометриско пресликување кое секоја точка A во рамнината ја пресликува во точка A' така што $\overline{OA} = \overline{OA'}$ и $\angle AOA' = \alpha$.

Точката O се пресликува во самата себе.

Точката O ја нарекуваме *центар на ротација*, а аголот α го нарекуваме *агол на ротација*.

Аголот на ротација можеме да го нанесеме на два начина, како што е прикажано на цртежот. Имено, ако го нанесеме во насока на движењето на стрелките на часовникот, тогаш ја добиваме точката A' . Но, ако го нанесеме спротивно од насоката на движењето на стрелките на часовникот, тогаш добиваме точка A'' која исто така ги задоволува двата услови $\overline{OA} = \overline{OA''}$ и $\angle AOA'' = \alpha$. Тоа значи дека при ротацијата мораме да ја нагласиме и насоката на ротација. Така, ние разликуваме две насоки на ротација: позитивна и негативна.



Позитивна насока на ротација ја сметаме насоката спротивна од насоката на движење на стрелките на часовникот. На позитивната насока соодветствува агол $\alpha > 0$.

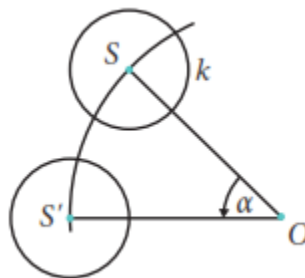
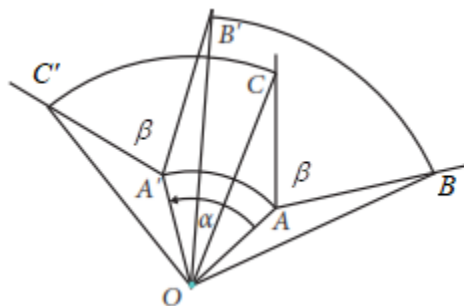
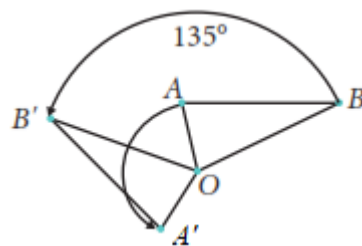
Негативна насока на ротација ја сметаме насоката во насока на движење на стрелките на часовникот. На негативната насока соодветствува агол $\alpha < 0$.

За ротацијата се исполнети следните својства:

а) При секоја ротација отсечка се пресликува во отсечка еднаква со неа.

б) Слика на права p при ротација е права p' и притоа аголот меѓу правите p и p' е еднаков на аголот на ротација α .

в) Сликата на агол β при ротација е агол, еднаков на аголот β .

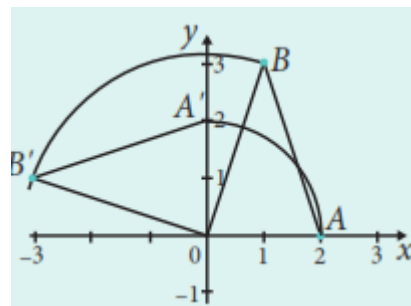


г) Слика на кружница $k(S, r)$ при ротација е еднаква кружница $k'(S', r)$. Притоа центарот на k се пресликува во центарот на k' . Освен тоа, ако $S \equiv O$, тогаш k се пресликува во k .

д) Многуаголник при ротација се пресликува во еднаков многуаголник или уште велиме во складен многуаголник.

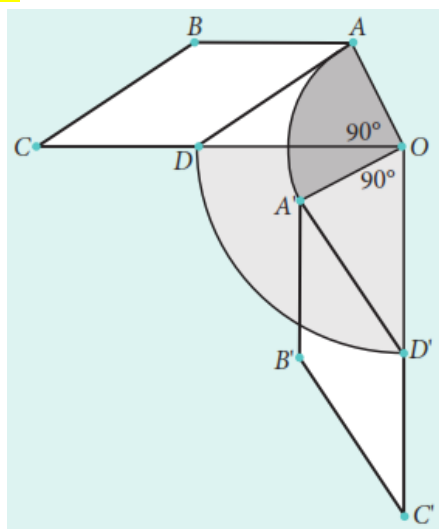
Пример 1. Во правоаголен координатен систем xOy се дадени точките $A(2, 0)$ и $B(1, 3)$. Ротирај ја отсечката AB околу точката O за агол од 90° .

Решение. Со ротација за агол од 90° околу точката O отсечката AB се пресликува во отсечка $A'B'$ каде $A'(0, 2)$ и $B'(-3, 1)$. Ротацијата е прикажана на цртежот.



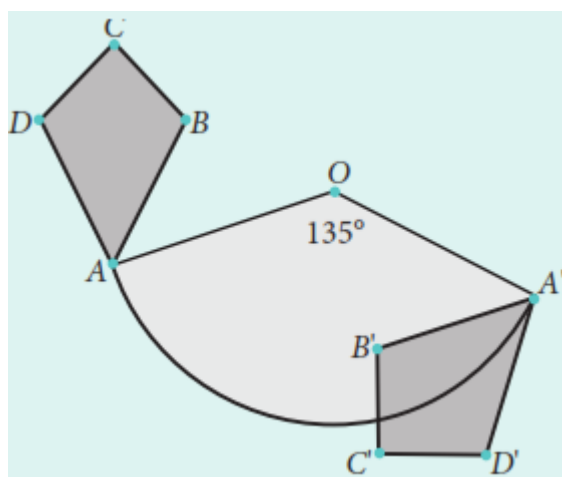
Пример 2. Нацртај ромб $ABCD$ и точка O на полуправата CD . Ротирај го ромбот околу точката O за агол од 90° .

Решение. На цртежот се дадени ромбот $ABCD$ и центарот на ротација O . Сликата при оваа ротација е ромб $A'B'C'D'$ кој се добива така што темињата A, B, C, D се пресликуваат во темињата A', B', C', D' . На цртежот е прикажано како се пресликуваат темињата A и D во темињата A' и D' . Аналогно постапи и при пресликувањето на темињата B и C во темињата B' и C' .



Пример 3. Нацртај делтоид $ABCD$ и точка O . Ротирај го делтоидот околу точката O за агол од 135° .

Решение. При ротацијата се добива делтоид $A'B'C'D'$ каде темињата на A, B, C, D соодветно се пресликуваат во темињата A', B', C', D' . На цртежот е прикажано како темето A се пресликува во темето A' . На ист начин се пресликуваат и другите три темиња.



Задачи за вежби

174. Определи ги координатите на точката која се добива кога точката $(1, 1)$ ќе ја ротираш околу координатниот почеток за агол:

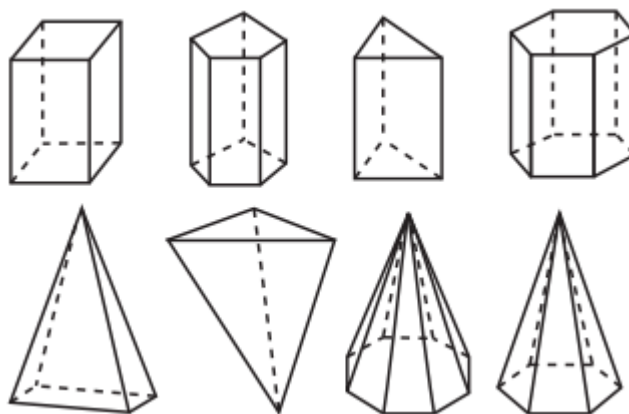
- а) 90° , б) -90° , в) 180° .

175. Нацртај триаголник ABC и точка O . Потоа ротирај го триаголникот за агол од 180° .

176. Нацртај квадрат $ABCD$ со должина на страна 5 cm , а потоа ротирај го за агол 45° околу пресекот на неговите дијагонали.
177. Ротирај ја точката $A(2, -2)$ околу точката $B(2, 2)$ за агол -90° . Кои се координатите на добиената точка?
178. Во координатен систем се дадени точките $A(2, 1)$, $B(4, 2)$, $C(6, 4)$, $D(3, 5)$. Определи ја сликата на триаголникот BCD при ротација околу точката A за агол од 90° .

2.29 Скица на 3Д форма гледана од напред, од горе и од страна

Минатата година учеше како да скицираш 3Д форма. Притоа правеше скици на призми и пирамиди, за кои добиваше претставувања прикажани на цртежите. Потсети се и запиши, кои 3Д форми се прикажани во горниот ред, а кои во долниот ред?

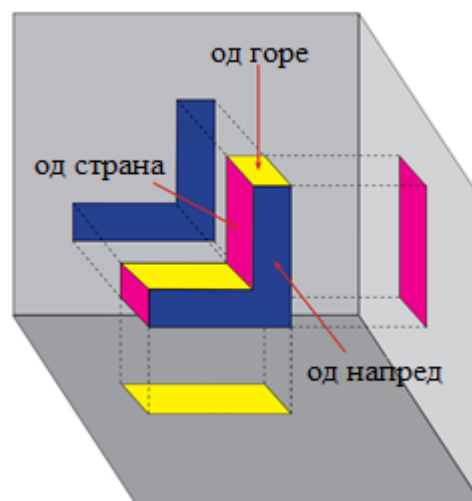


Ваквото прикажување на 3Д формите е корисно кога сакаме да решаваме проблеми во врска со пресметувањето на нивниот волумен и нивната

плоштина. Меѓутоа, во многу дејности на човекот, како што се архитектурата, градежништвото, машинството и други, потребни се претставувања на објектите од кои ќе можеме да составиме модел на објектот, односно објектот да го изградиме во вистинска големина. За таа цел, покрај размерите се користат и претставувањата на 3Д формите гледани од напред, од горе и од страна.

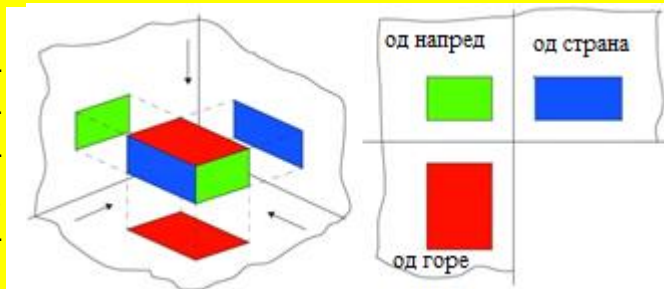
Како да скицираме 3Д форма гледана од напред, од горе и од страна?

Да го погледнеме цртежот. Јасно е дека кога 3Д формата ја гледаме од горе, тогаш ја гледаме само жолтата површина, кога гледаме од напред ја гледаме само сината површина и кога гледаме од страна ја гледаме црвената површина. Значи, за да скицираме 3Д форма гледана од напред, од горе и од страна ние треба да ги нацртаме (скицираме) површините кои ги гледаме на опишаниот начин.

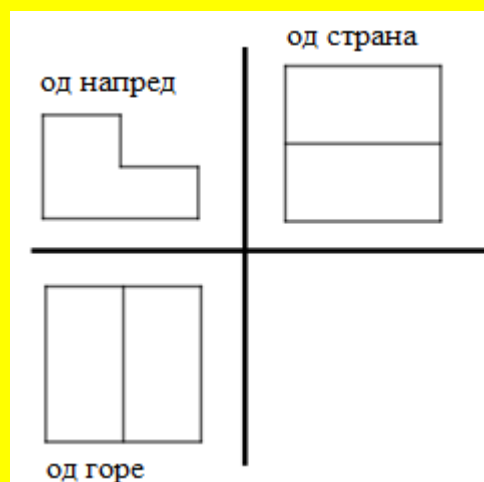
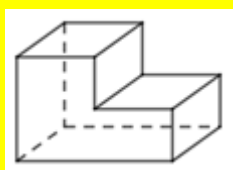


Пример 1. На цртежот е прикажан квадар и неговата скица кога го гледаме од напред, од горе и од страна.

Од напред го гледаме зелениот правоаголник и истиот го цртаме горе лево. Од горе го гледаме црвениот правоаголник и истиот го цртаме долу лево, а од страна го гледаме синиот правоаголник и истиот го цртаме горе десно.

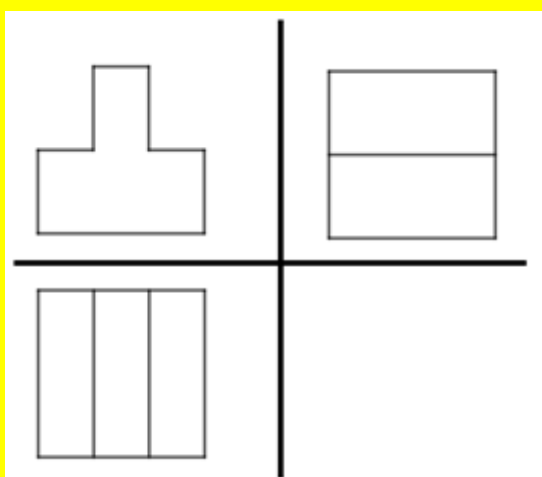
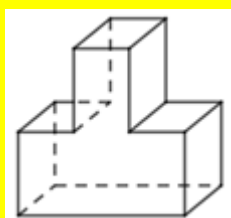


Пример 2. На цртежите е дадена 3Д форма и нејзината скица кога 3Д формата е гледана од напред, од горе и од страна.



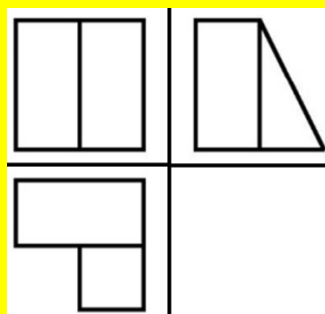
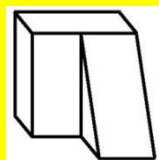
Кога 3Д формата ја гледаме од горе, ние всушност гледаме два правоаголника, а исто така два правоаголника гледаме и кога 3Д формата ја гледаме од страна. Меѓутоа, кога гледаме од напред, ние гледаме квадрат од кој е отстранета горната десна четвртина.

Пример 3. На цртежите е дадена 3Д форма и нејзината скица кога 3Д формата е гледана од напред, од горе и од страна.



Кога 3Д формата ја гледаме од горе, ние всушност гледаме три еднакви правоаголници, а кога гледаме од страна гледаме два еднакви правоаголника. Меѓутоа, кога ја гледаме од напред, ние гледаме квадрат кој е поделен на шест еднакви делови и од кој во горниот ред се отстранети левиот и десниот дел.

Пример 4. На цртежите е дадена 3Д форма и нејзината скица кога 3Д формата е гледана од напред, од горе и од страна.



Кога 3Д формата ја гледаме од напред, ние всушност гледаме два еднакви правоаголници, а кога гледаме од страна гледаме правоаголник и правоаголен триаголник. Меѓутоа, кога ја гледаме од горе, ние гледаме правоаголник пред кој од десно е поставен квадрат.

Скицирањето (цртањето) на 3Д формите гледано од напред, од горе и од страна се проучува во посебна математичка дисциплина наречена Нацртна геометрија. Францускиот инженер Гаспар Монж (1746-1818) се смета за основач на нацртната геометрија. Тој кон крајот XVIII век, додека работел како известувач за воени утврдувања, открил техники за решавање на геометриски проблеми. Тие откритија подоцна ги публикувал во својата книга „Нацртна геометрија“.

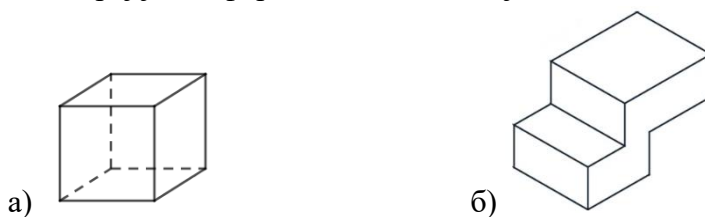
Побарај на интернет и научи повеќе за животот и делото на Гаспард Монж.



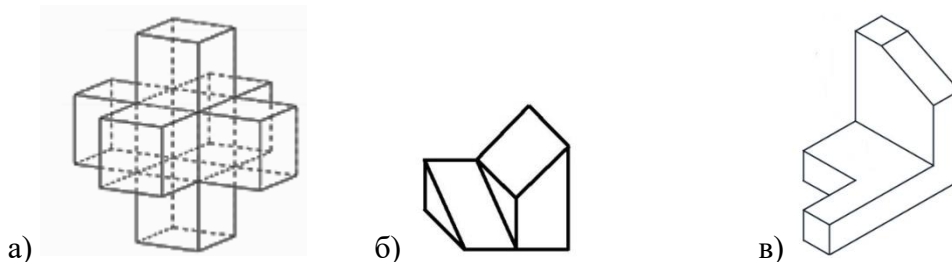
Гаспард Монж (1746 - 1818)

Задачи за вежби

179. Скицирај ја 3Д формата кога истата ја гледаш од напред, од горе и од страна.

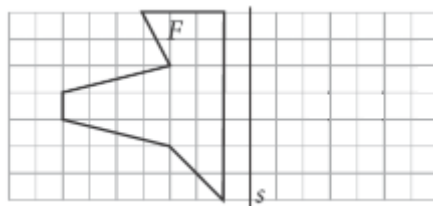


180. Скицирај ја 3Д формата ако истата ја гледаш од напред, од горе и од страна.

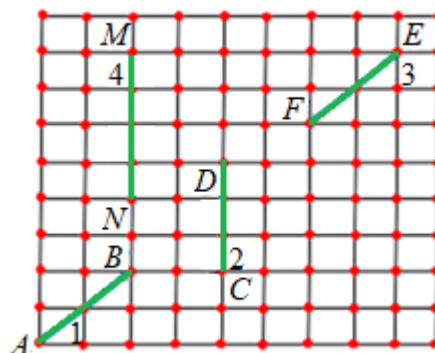


Провери го своето знаење 6

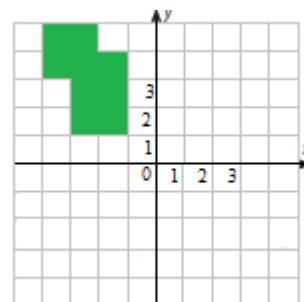
1. Определи ја сликата на фигурата F при дадената осна симетрија.



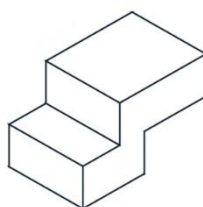
2. Во забавен парк четири електрични коли кои се означени со броевите 1, 2, 3 и 4 се движеле вкупно 10 секунди по прави линии, секоја со своја постојана брзина. Тие тргнале едновременно и на почетокот се наоѓале во точките A, C, E, M за да по 5 секунди соодветно се најдат во точките B, D, F, M . Кои коли ќе се судрат на крајот од десеттата секунда?



3. На цртежот е дадена фигура во координатен систем. Прво транслатирај ја дадената фигура за 6 единици во правец на x -оската во позитивна насока, потоа транслатирај ја во правец на y -оската во негативна насока за 6 единици и на крајот најди нејзина слика при осна симетрија со оска на симетрија y -оската.



4. Во координатен систем се дадени точките $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(5,4)$ и $D(2,5)$. Определи ја сликата на триаголникот BCD при ротација околу точката A за агол од 90° .
5. Скицирај ја 3Д формата кога истата ја гледаш од напред, од горе и од страна.



ДОДАТОК

КОРИСТЕЊЕ НА Geogebra ВО ГЕОМЕТРИЈА

Во оваа тема учеше за:

- еднакви отсечки, триаголник,
- симетрала на отсечка,
- паралелни прави, нормални прави,
- симетрала на агол,
- опишана кружница околу триаголник и впишана кружница во триаголник.

Во продолжение е дадено како со помош на програмскиот пакет Geogebra се реализираат наведените конструкции.

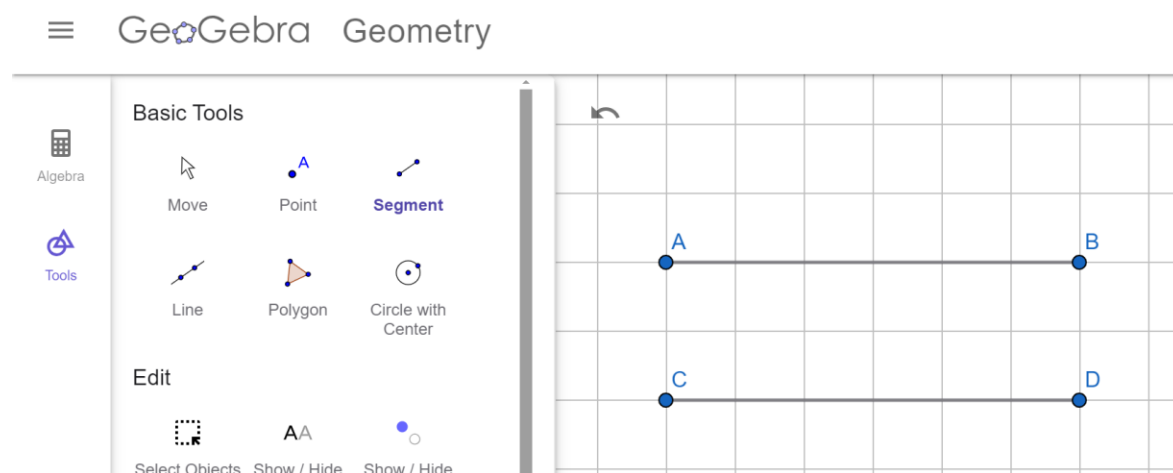
Чекори на конструкција на отсечка еднаква на дадена отсечка во Geogebra

Чекор 1. Во десниот горен агол се кликува на иконата . Потоа во Show grid се избира опцијата Major Guidelines. Во позадината треба да се појави мрежа.

Чекор 2. Се избира опцијата Segment во менито на левата страна страна на екранот.

Чекор 3. Се повлекува отсечка од точка A до точка B.

Чекор 4. Потоа се повлекува нова отсечка од точка C до точка D паралелна и еднаква на отсечката AB. (види слика)



Чекори на конструкција на симетрала на отсечка во Geogebra

Чекор 1) Се опцијата Segment се креира отсечка од точка A до точка B

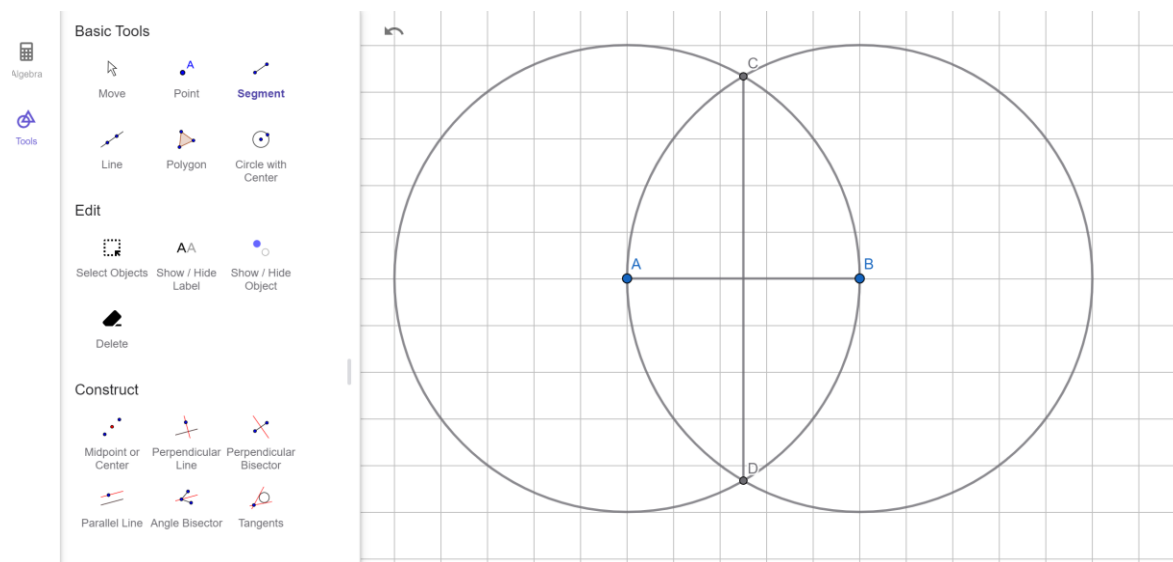
Чекор 2) Со опцијата Circle with center се креира кружница во точката B со радиус AB

Чекор 3) Со опцијата Circle with center се креира кружница во точката A со радиус AB

Чекор 4) Потоа се обележуваат пресеците на двете кружници со C и D

Чекор 5) Се креира отсечка што ги поврзува двете пресечни точки C и D

Чекор 6) Отсечката CD е симетрала на отсечката AB.

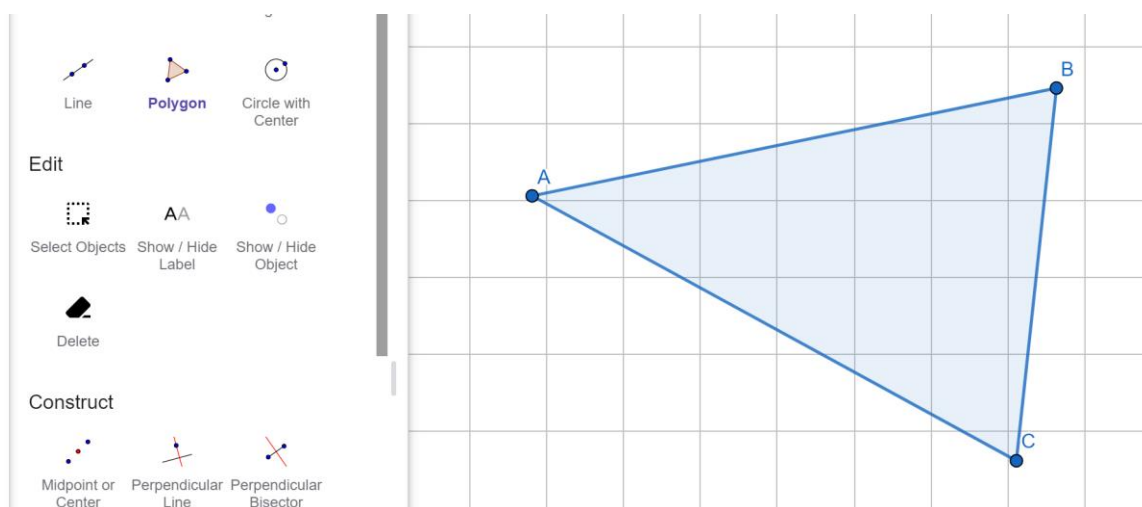


Чекори на конструкција на триаголник во Geogebra

Чекор 1. Се избира опцијата Polygon

Чекор 2. Се означуваат точките A, B и C

Чекор 3. Се конструира триаголникот



Чекори на конструкција на паралелни прави во Geogebra

Чекор 1. Се избира опцијата Line

Чекор 2. Се црта линија од точката A до точката B

Чекор 3. Се избира опцијата Point и се избира произволна точка во рамнината C

Чекор 4. Потоа се избира опцијата Circle with center

Чекор 5. Се црта кружница со центар во точката C која ја сече правата AB во точката D

Чекор 6. Се избира опцијата Point и се обележува вториот пресек на кружницата со центар во C која ја сече правата AB со E

Чекор 7. Потоа се избира опцијата Perpendicular Bisector

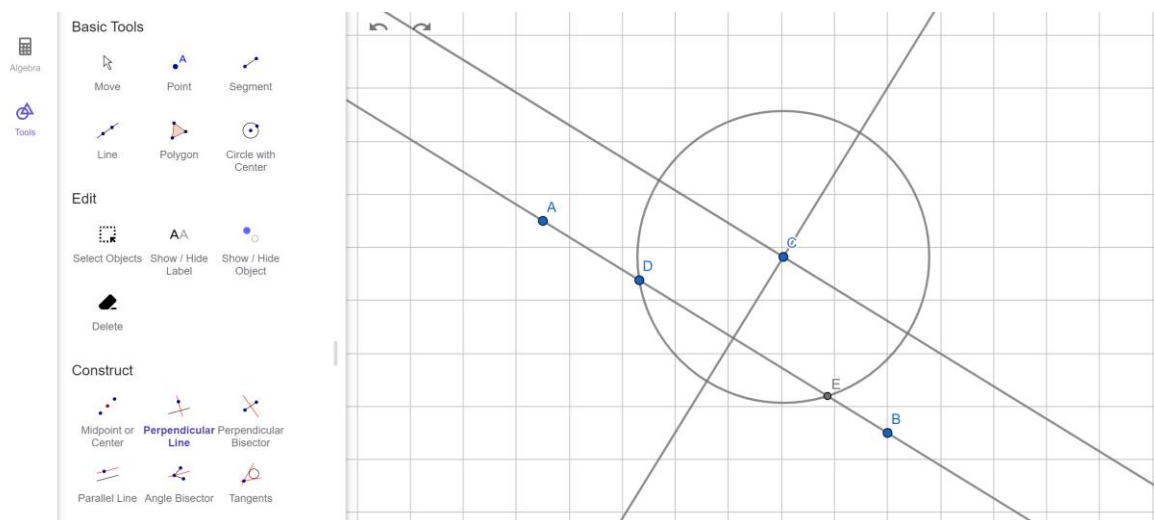
Чекор 8. Се избираат точките D и E

Чекор 9. Се повлекува линија во точката C нормална на правата AB

Чекор 10. Се избира опцијата Perpendicular Line

Чекор 11. Два пати се кличнува на точката C

Чекор 12. Низ точката C се повлекува права паралелна на правата AB



Чекори на конструкција на нормална права во Geogebra

Чекор 1. Се избира опцијата Line

Чекор 2. Се црта линија од точката A до точката B

Чекор 3. Се избира опцијата Point и се избира произволна точка во рамнината C

Чекор 4. Потоа се избира опцијата Circle with center

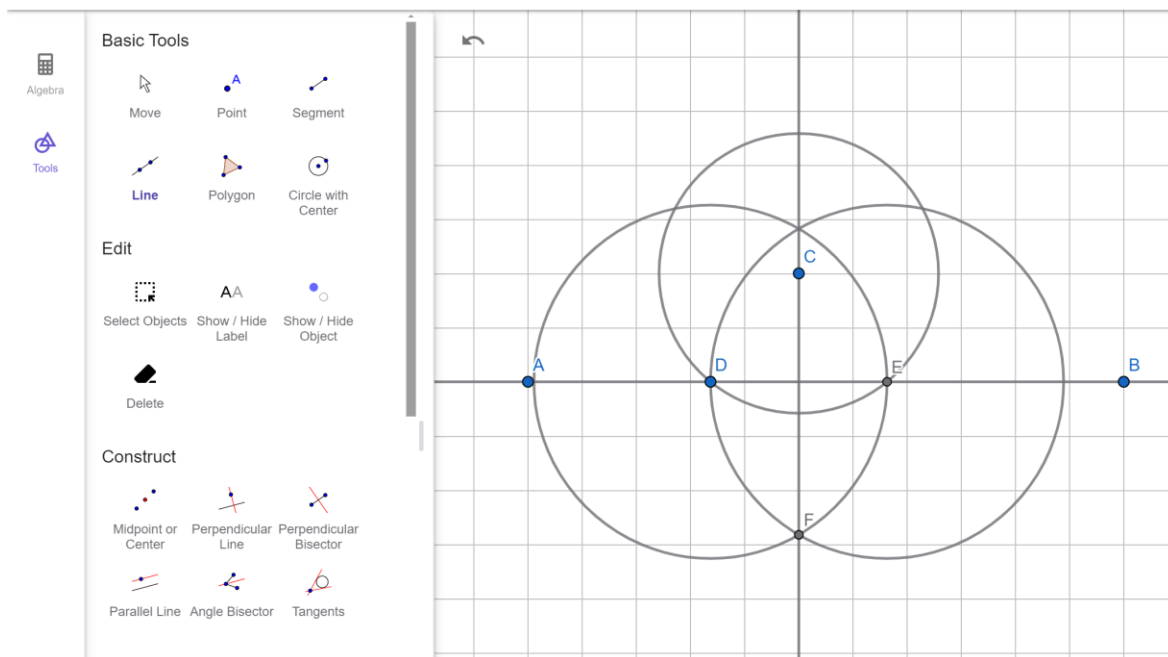
Чекор 5. Се црта кружница со центар во точката C која ја сече шравата AB во точката D

Чекор 6. Во точката D се црта кржница која ја сече правата AB и крижницата со центар во C во точка E

Чекор 7. Во точката E се црта кржница до точката D

Чекор 8. Пресекот на кружниците со центри до D и E кој се наоѓа под правата AB го означуваме со F

Чекор 9. Повлекуваме права низ точките C и F која е нормална на правата AB



Чекори на конструкцијата на центар на опишана кружница на триаголник во Geogebra

Чекор 1. Се избира опцијата Polygon

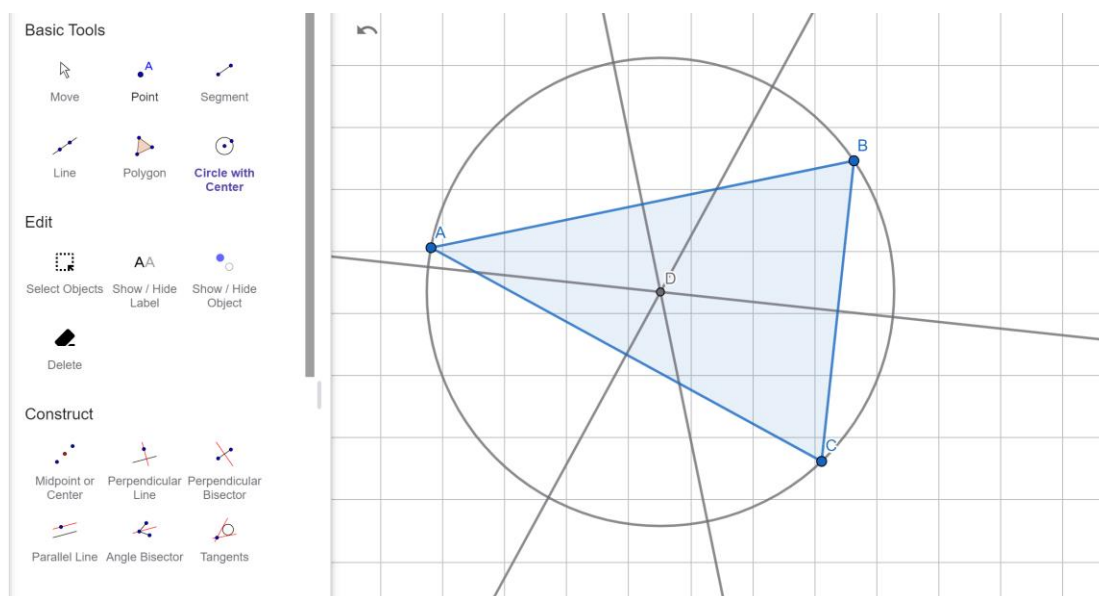
Чекор 2. Се означуваат точките A, B и C

Чекор 3. Се конструира триаголникот

Чекор 4. Со Perpendicular Bisector се повлекуваат симетралите на страните AB, BC и CA.

Чекор 5. Нивниот пресек го означуваме со точка D

Чекор 6. Со помош на Circle with Center цртаме кружница со центар во точката D, која поминува низ точките A, B и C и која е опишана кружница на дадениот триаголник



Чекори на конструкција на центар на опишана кружница на триаголник во Geogebra

Чекор 1. Се избира опцијата Polygon и се црта триаголник

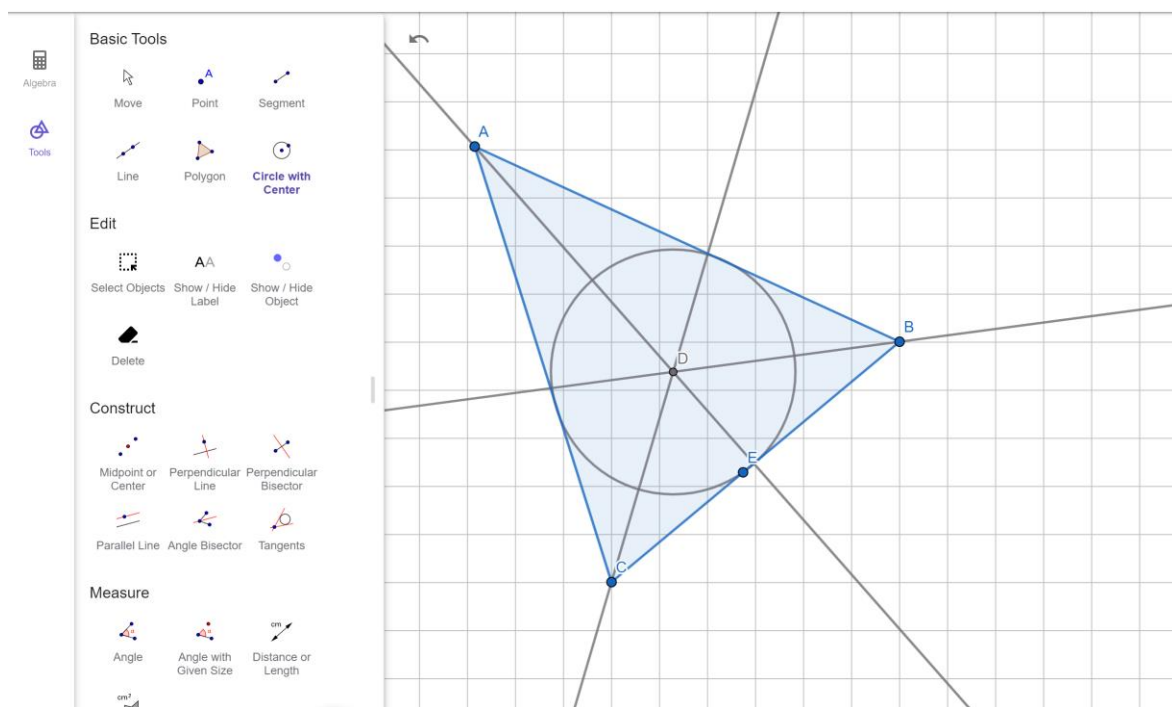
Чекор 2. Се означуваат точките A, B и C

Чекор 3. Се конструира триаголникот

Чекор 4. Со Angle Bisector се повлекуваат симетралите на аглиите ACB, CBA и CAB

Чекор 5. Нивниот пресек го означуваме со точка D

Чекор 6. Со помош на Circle with Center цртаме кружница со центар во точката D која е впишана кружница на дадениот триаголник



3 Алгебра

- 3.1 Броен израз. Израз со променлива
- 3.2 Линеарен израз со една и две променливи
- 3.3 Собирање и одземање линеарни изрази. Производ на линеарен израз со број
- 3.4 Составување формули
- 3.5 Поим за равенка. Линеарна равенка со една непозната
- 3.6 Линеарна равенка со една непозната со целобројни коефициенти
- 3.7 Примена на линеарните равенки
- 3.7 Низи цели броеви
- 3.8 Низи фигури
- 3.10 Поим за пресликување (функција)
- 3.11 Линеарна функција
- 3.12 График на линеарна функција

Со усвојување на содржините од оваа тема ќе научиш:

- што е израз со променлива и да пресметуваш бројна вредност на израз со променлива,
- да собираш и одземаш линеарни изрази,
- да множиш линеарен израз со број,
- да упростуваш линеарни изрази,
- што е формула,
- да составуваш едноставни алгебарски изрази и формули,
- во формулите една променлива да изразуваш преку друга,
- да решаваш линеарни равенки со целобројни коефициенти,
- да ги применуваш линеарните равенки при решавање практични проблеми,
- што е пресликување (функција) и како се задава пресликување,
- да генерираш членови на низа цели броеви зададена со правило,
- да го откриваш правило според кое е зададена низа цели броеви и истата да ја продолжуваш,
- да го откриваш правилото со кое се задава општиот член на дадена низа,
- да генерираш низа броеви зададена со 2Д форми,
- што е линеарна функција и да проверуваш дали подреден пар задоволува дадена линеарна функција,
- да црташ график на линеарна функција, вклучувајќи ги и функциите чиј график се паралелни со координатните оски.

3.1 Броен израз. Израз со променлива

Во досегашното учење на математиката често пати се среќаваше со бројните изрази. Да се потсетиме!

Израз формиран од броеви, поврзани со знаците на математичките операции, и загради го нарекуваме *броен израз*.

Бројот што се добива откако ќе се извршат сите операции во даден броен израз го нарекуваме *бројна вредност* на изразот.

За бројните изрази коишто имаат еднакви бројни вредности велиме дека се *еднакви бројни изрази*.

Пример 1. Определи ја бројната вредност на изразот:

а) $131 \cdot 12 - 12 \cdot 71 + (14 + 6 \cdot 3) \cdot 60$,

б) $27 \cdot 8 + 23 \cdot 7 - 26 \cdot 6 - 19 \cdot 9$

Решение. а) Имаме

$$\begin{aligned} 131 \cdot 12 - 12 \cdot 71 + (14 + 6 \cdot 3) \cdot 60 &= 12 \cdot (131 - 71) + (14 + 18) \cdot 60 \\ &= 12 \cdot 60 + 32 \cdot 60 = 60 \cdot (12 + 32) \\ &= 60 \cdot 44 = 1640. \end{aligned}$$

б) Имаме:

$$27 \cdot 8 + 23 \cdot 7 - 26 \cdot 6 - 19 \cdot 9 = 216 + 161 - 156 - 171 = 277 - 227 = 50.$$

Пример 2. Определи ја бројната вредност на изразот:

а) $(20 + 18) : (20 - 18)$,

б) $(20 \cdot 21) : (2 + 0 + 2 + 1)$

в) $(20 - 12) \cdot 15 + 2009 : (19 - 5 \cdot 2 - 2)$

Решение. а) Имаме:

$$(20 + 18) : (20 - 18) = 38 : 2 = 19.$$

б) Имаме:

$$(20 \cdot 21) : (2 + 0 + 2 + 1) = (20 \cdot 21) : 5 = 4 \cdot 21 = 84.$$

в) Имаме

$$(20 - 12) \cdot 15 + 2009 : (19 - 5 \cdot 2 - 2) = 8 \cdot 15 + 2009 : 7 = 120 + 287 = 407.$$

Пример 3. а) На еден фудбалски натпревар имало 17773 гледачи. Од нив 9856 биле мажи, 5558 жени, а останатите биле деца. Колку деца го гледале натпреварот?

б) Насте има 9 моливи, а Киро има 5 моливи. Нивниот другар Екрем се пофалил дека има повеќе од 10 моливи, а помалку отколку што имаат Насте и Киро заедно. Колку моливи има Екрем?

Решение. а) Натпреварот го гледале $17773 - (9856 + 5558) = 2359$ деца.

б) Нека Екрем има a моливи. Тогаш од условот на задачата следува $10 < a < 9 + 5$, односно $10 < a < 14$. Значи, Екрем може да има 11, 12 или 13 моливи.

Во решението на пример 3 б) буквата a е заедничка ознака за броевите 11, 12 и 13, односно за елементите на множеството $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Да го разгледаме множеството $\{x \mid 1 \leq x < 6\}$. Како што можеме да видиме, во овој случај буквата x е заедничка ознака за броевите 1, 2, 3, 4 и 5, т.е. за елементите на множеството $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Така, ја имаме следнава дефиниција.

Променлива е симбол (најчесто буква) која што претставува заедничка ознака за елементите на дадено множество D .

Множеството D го нарекуваме *област* или *домен* на променливата, а секој негов елемент го нарекуваме *вредност на променливата*.

Пример 4. Запиши израз кој што претставува:

- а) број кој е за 12 поголем од бројот x ;
- б) број кој е за 7 помал од збирот на броевите x и y ;
- в) број кој е за 4 помал од производот на броевите x и y .

Решение. а) Бројот кој е за 12 поголем од бројот x е $x+12$.

б) Бројот кој е за 7 помал од збирот на броевите x и y е $x+y-7$.

в) Бројот кој е за 4 помал од производот на броевите x и y е $xy-4$.

Забележуваме дека во сите случаи во пример 4 запишаните изрази содржат променливи. Во врска со овие изрази ја имаме следнава дефиниција.

Изразите формирани од броеви и променливи, поврзани со знаците за математичките операции, и загради ги нарекуваме *изрази со променливи* или *алгебарски изрази*.

Алгебарските изрази ги означуваме со големите латинични букви при што најчесто во заграда ги наведуваме променливите кои ги содржат. Така, изразот $x+12$ го означуваме со $A(x) = x+12$, а изразот $3x+2y-202$ со $B(x, y) = 3x+2y-202$ и слично.

Пример 5. Пресметај ја вредноста на изразот:

- а) $A(x) = 7x-12$ за $x = -3$,
- б) $B(x, y) = 2x - y$ за $x = 4, 2$ и $y = 2$,
- в) $C(x, y) = 2xy - 5$ за $x = 3$ и $y = 4$,
- г) $C(x, y, z) = xy + yz + zx$ за $x = 5$, $y = -5$ и $z = 2$.

Решение. а) Наместо x во изразот $7x-12$ ставаме -3 и добиваме

$$A(-3) = 7 \cdot (-3) - 12 = -21 - 12 = -33.$$

б) Слично како под а) добиваме

$$B(4, 2; 2) = 2 \cdot 4, 2 - 2 = 8, 4 - 2 = 6, 4.$$

в) На потполно ист начин како во б) добиваме

$$C(3, 4) = 2 \cdot 3 \cdot 4 - 5 = 24 - 5 = 19.$$

г) Слично како во претходните случаи добиваме

$$C(5, -5, 2) = 5 \cdot (-5) + (-5) \cdot 2 + 2 \cdot 5 = -25 - 10 + 10 = -25.$$

На даден алгебарски израз му одговара соодветен броен израз, ако променливата се замени со одредена вредност; вредност на добиениот броен израз е *бројна вредност* на алгебарскиот израз.

Задачи за вежби

- Пресметај ја вредноста на изразот:
 - $12 \cdot 9 + 23 \cdot 8 + 34 \cdot 7 + 45 \cdot 6$,
 - $200 - 160 : (20 - 16)$,
 - $2018 + 201 : 3 - 113 \cdot 4$,
 - $(23 - 9) \cdot 8 + 2 \cdot (6 + 18 : 3)$.
- Пресметај ја вредноста на изразот:
 - $58 \cdot 284 - 58 \cdot 273 + 11 \cdot 42 - 1001$,
 - $19259 + 5 \cdot 48 - (714 : 7 + 2569)$,
 - $(43 \cdot 315 - 43 \cdot 281 + 34 \cdot 57) : 17$,
 - $(118178 : 74 + 8403) : 5 + 10$.
- Пресметај ја вредноста на изразот
 - $2157 + 720 : (72 - 9 \cdot 7) - (4 \cdot 6 - 6) \cdot 5 + 1$,
 - $4253 - 53 \cdot (24491 - 9558 : 27 \cdot 69) + 14 \cdot 527 - 527 \cdot 4$.
- Пресметај ја вредноста на изразот:
 - $(345 - ((720 : 6) \cdot 2 - 4 + 2) : 2 + 44) : 3 - 25 : 5$,
 - $(481 \cdot 325 - 75 \cdot 481) : 5 + (2 \cdot 43758 - 43758) \cdot (56 - 7 \cdot 8)$.
- Опреди ја бројната вредност на изразот:
 - $(1437 - ((11 \cdot 136 + 136 \cdot 12) : 92 \cdot 167 - 65 - 102) : 167) : 27 - 27$,
 - $9000 - 26 \cdot (21121 - 6687 : 9 \cdot 28) + 696$.
- Кои од следниве изрази се изрази со променливи:
 - $3^3 + 12 - 24$,
 - $a + 3 - 12b$,
 - $\frac{1}{2} \cdot (45 - \frac{11}{5}) : 2$,
 - $3x - yz + 1$.
- Опреди го множеството вредности на изразот $A(x) = x(x + 2)$ ако $x \in \{0, 1, 2, -1, -8, -9\}$.
- Пополни ја табелата:

x	4	-5	-2	2	-12	-5
y	-1	-6	-6	6	4	5
$3x - y$						

3.2 Линеарен израз со една и две променливи

Во претходната лекција научи што е алгебарски израз и што е бројна вредност на алгебарски израз. Изразите $A(x) = 3x + 12$, $B(x, y) = 2xy - 1$ и $C(x, y, z) = 2xy - y + 3z$ се изрази со една, две и три променливи. Значи, на алгебарските изрази можеме да извршиме поделба според бројот на променливите. Постојат и други критериуми според кои

ги делиме алгебарските изрази, но ние истите нема да ги разгледуваме. Ќе ги разгледаме само таканаречените линеарни изрази со една и со две променливи.

Алгебарскиот израз $ax+b$, каде a и b се броеви, а x е променлива го нарекуваме *линеарен израз со една променлива (линеарен израз по x)*. Притоа ax и b ги нарекуваме *членови* на линеарниот израз, a е *коэффициент* пред x , а b е *константен член*.

Пример 1. а) Алгебарските изрази $A(x) = x+12$ и $B(x) = 2x-125$ се линеарни изрази со една променлива. За изразот $A(x) = x+12$ коэффициентот пред x е $a=1$, а константниот член е $b=12$. За изразот $B(x) = 2x-125$ коэффициентот пред x е $a=2$, а константниот член е $b=-125$.

б) Алгебарскиот израз $C(x) = 2x \cdot x - 4 + x$ не е линеарен израз со една променлива, бидејќи содржи член $2x \cdot x$, т.е. не е од видот $ax+b$, каде a и b се броеви.

Пример 2. Пополни ја табелата:

x	4	-5	-2	2
$2x-7$				

Решение. За да ја пополниме дадената табела треба да ги пресметаме вредностите на линеарниот израз $2x-7$ за дадените вредности на променливата x . Имаме:

x	4	-5	-2	2
$2x-7$	$2 \cdot 4 - 7 = 1$	$2 \cdot (-5) - 7 = -17$	$2 \cdot (-2) - 7 = -11$	$2 \cdot 2 - 7 = -3$

Пример 3. Ќе го определиме множеството вредности на изрази $A(x) = 2x+4$ и $B(x) = 2(x+2)$ ако $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$.

Решение. Пресметувањата се дадени во следнава табела:

x	-2	-1	1	2
$A(x) = 2x+4$	$2 \cdot (-2) + 4 = 0$	$2 \cdot (-1) + 4 = 2$	$2 \cdot 1 + 4 = 6$	$2 \cdot 2 + 4 = 8$
$B(x) = 2(x+2)$	$2 \cdot (-2+2) = 0$	$2 \cdot (-1+2) = 2$	$2 \cdot (1+2) = 6$	$2 \cdot (2+2) = 8$

Во пример 3 гледаме дека за секоја вредност на променливата изразите $A(x) = 2x+4$ и $B(x) = 2(x+2)$ примаат иста бројна вредност. Во врска со ова ја имаме следнава дефиниција.

Изразите со променлива што имаат еднакви бројни вредности за секоја вредност на променливата од доменот ги нарекуваме *идентични изрази*.

Ако два идентични изрази се поврзат со знакот за еднаквост се добива равенство кое го нарекуваме *идентитет*.

Пример 4. Според пример 3 изразите $A(x) = 2x+4$ и $B(x) = 2(x+2)$, за $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$ примаат еднакви бројни вредности, па затоа тие се идентични. Соодветниот идентитет е $2x+4 = 2(x+2)$.

Алгебарскиот израз $ax + by + c$, каде a, b и c се броеви, а x и y се променливи го нарекуваме *линеарен израз со две променливи* (линеарен израз по x и y). Притоа ax , by и c ги нарекуваме *членови* на линеарниот израз, a е *коэффициент* пред x , b е коэффициент пред y и c е *константен член*.

Пример. 5. Пресметај ја вредноста на линеарниот израз $A(x, y) = x - 4y + 8$ за:

а) $x = -5$ и $y = -7$,

б) $x = 1$ и $y = 2$.

Решение. Имаме:

а) $A(-5, -7) = -5 - 4 \cdot (-7) + 8 = -5 + 28 + 8 = 31$,

б) $A(1, 2) = 1 - 4 \cdot 2 + 8 = 1 - 8 + 8 = 1$.

Пример 6. Дадени се изразите $A(x, y) = 2(x - y) + 4$ и $B(x, y) = 2x - 2y + 4$ со домен $(x, y) = (1, 2), (-1, 5), (0, -1), (2, 2)$. Провери дали $A(x, y)$ и $B(x, y)$ се идентични.

Решение. Имаме:

x	1	-1	0	2
y	2	5	-1	2
$A(x, y)$	$2(1-2) + 4 = 2$	$2(-1-5) + 4 = -8$	$2(0-(-1)) + 4 = 6$	$2(2-2) + 4 = 4$
$B(x, y)$	$2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 4 = 2$	$2 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 + 4 = -8$	$2 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) + 4 = 6$	$2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 4 = 4$

што значи дека изразите $A(x, y)$ и $B(x, y)$ се идентични.

Задачи за вежби

9. Кој од алгебарските изрази:

$$A(x) = 4x + 1, B(x) = 7x - 12 \text{ и } C(x, y) = 2x + y - 4$$

е линеарен израз со една променлива.

10. Пресметај ги бројните вредности на линеарниот израз $A(x) = 3x + 5$ ако $x \in \{-4, -3, 1, 5\}$.

11. Дадени се линеарните изрази $A(x) = 3x - 9$, $B(x) = 3(x - 9)$ и $C(x) = 3(x - 3)$, при што $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Кои од овие изрази се идентични? Ако такви постојат запиши го соодветните идентитети.

12. Пресметај ја вредноста на линеарниот израз $A(x, y) = 3x - 2y + 8$ за:

а) $x = -2$ и $y = -4$,

б) $x = 5$ и $y = -2$,

в) $x = -3$ и $y = -5$.

13. Дадени се изразите

$$A(x, y) = 3(x + 2y) - 14 \text{ и } B(x, y) = 3x + 6y - 14$$

со домен $(x, y) = (-7, 2), (4, -5), (-3, -5), (2, 2), (5, 3), (-12, 6), (0, 4)$. Провери дали $A(x, y)$ и $B(x, y)$ се идентични.

3.3 Собирање и одземање линеарни изрази.

Производ на линеарен израз со број

Во првата тема научивме како се собираат, одземаат и множат цели броеви. Исто така знаеме да пресметуваме броен израз и како да се ослободуваме од загради. Притоа ги користеме комутативното и асоцијативното на собирањето и множењето, како и дистрибутивното својство на множењето во однос на собирањето. На ист начин постапуваме и при собирањето и одземањето на линеарни изрази, како и при множењето на линеарен израз со број.

Знаеме дека линеарен израз содржи член од видот ax , во кој бројот a го нарекуваме *константа на членот*. Овде уште да кажеме дека променливата x ја нарекуваме *главна вредност на членот* ax , а за два члена ќе велиме дека се *слични* ако имаат еднаква главна вредност.

Пример 1. Собери ги линеарните изрази: $A(x) = 4x + 5$ и $B(x) = -7x + 2$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} A(x) + B(x) &= 4x + 5 + (-7x + 2) = \underline{4x} + 5 - \underline{7x} + 2 \\ &= \underline{4x - 7x} + 5 + 2 = (4 - 7)x + 7 \\ &= (-3)x + 2 = -3x + 2. \end{aligned}$$

Пример 2. Дадени се линеарните изрази $A(x) = -3x - 5$ и $B(x) = -3x + 1$. Најди го изразот $C(x) = 2A(x) + B(x)$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} C(x) &= 2A(x) + B(x) = 2 \cdot (-3x - 5) + (-3x + 1) \\ &= 2 \cdot (-3x) + 2 \cdot (-5) - 3x + 1 = (2 \cdot (-3))x - 10 - 3x + 1 \\ &= \underline{-6x} - 10 - \underline{3x} + 1 = \underline{-6x - 3x} - 10 + 1 \\ &= (-6 - 3)x - 9 = -9x - 9. \end{aligned}$$

Пример 3. Дадени се линеарните изрази $A(x) = 4x - 5$ и $B(y) = -3y + 1$. Најди ја разликата $A(x) - B(y)$.

Решение. Имаме:

$$A(x) - B(y) = 4x - 5 - (-3y + 1) = 4x - 5 + 3y - 1 = 4x + 3y - 5 - 1 = 4x + 3y - 6.$$

Пример 4. Дадени се линеарните изрази $A(x) = 3x - 12$ и $B(x, y) = -2x + 5y - 11$. Најди го изразот $C(x, y) = 2A(x) + 3B(x, y)$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} C(x, y) &= 2A(x) + 3B(x, y) = 2 \cdot (3x - 12) + 3 \cdot (-2x + 5y - 11) \\ &= \underline{6x} - 24 - \underline{6x} + \underline{15y} - 33 = \underline{6x - 6x} + \underline{15y} - 24 - 33 \\ &= (6 - 6)x + 15y - 57 = 0 \cdot x + 15y - 57 = 0 + 15y - 57 = 15y - 57. \end{aligned}$$

Погоре искористивме дека $0 \cdot x = 0$, бидејќи како што знаеме променливата е ознака за елементите на дадено бројно множество, а за секој број x важи $0 \cdot x = 0$.

Како што можеме да забележиме изразот $C(x, y)$ всушност е линеарен израз со една променлива.

Пример 5. Дадени се линеарните изрази $A(x, y) = 2x + 5y - 7$ и $B(x, y) = -x + 5y - 4$. Најди го изразот $C(x, y) = 2A(x, y) + 3B(x, y)$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} C(x, y) &= 2A(x, y) + 3B(x, y) = 2 \cdot (2x + 5y - 7) + 3 \cdot (-x + 5y - 4) \\ &= \underline{4x} + \underline{10y} - 14 - \underline{3x} + \underline{15y} - 12 = \underline{4x - 3x} + \underline{10y + 15y} - 14 - 12 \\ &= x + 25y - 26. \end{aligned}$$

Забележуваме дека при собирањето и одземањето на линеарни изрази ние всушност ги собираме и одземаме сличните членови. На тој начин добиваме линеарен израз во кој секоја променлива се јавува само еднаш. Да се потсетиме, линеарен израз всушност дефинираме како алгебарски израз во кој секоја од променливите се јавува точно еднаш. Меѓутоа линеарни изрази се и алгебарските изрази во кои една променлива може да се јави повеќе пати. Тогаш изразот го трансформираме, т.е. ги собираме и одземаме сличните членови така што секоја променлива ќе се јави најмногу еднаш и притоа велиме дека сме го *упростили* дадениот линеарен израз.

Пример 6. Упрости го изразот:

а) $2x + 5y - 4x - 3 + 2y + 3x - 22$, б) $7x - 3y - 14x + 3 + 12y + 13x - 12 + 11y$.

Решение. а) Имаме

$$A(x, y) = \underline{2x} + \underline{5y} - \underline{4x} - 3 + \underline{2y} + \underline{3x} - 22 = \underline{2x - 4x + 3x} + \underline{5y + 2y} - 3 - 22 = x + 7y - 25.$$

б) Имаме:

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \underline{7x} - \underline{3y} - \underline{14x} + 3 + \underline{12y} + \underline{13x} - 12 + \underline{11y} \\ &= \underline{7x - 14x + 13x} - \underline{3y + 12y + 11y} + 3 - 12 \\ &= 6x + 20y - 9. \end{aligned}$$

Во оваа и во претходната лекција разгледувавме само линеарни изрази со една и две променливи. Овде да забележиме дека претходно кажаното важи и за линеарни изрази со три и повеќе променливи, т.е. за изразите од видовите

$$ax + by + cz + d, \quad ax + by + cz + dt + e \text{ итн.}$$

каде $a, b, c, d, e, \dots$ се броеви и $x, y, z, t, \dots$ се променливи.

Задачи за вежби

14. Најди ги збирот и разликата на линеарните изрази:

- а) $6x - 5$ и $-3x + 2$, б) $4x - 1$ и $-7x + 2y + 2$
в) $4x + y + 5$ и $-2x - 3y + 11$, г) $2x - 3y + 5$ и $-7x + 11y + 2$.

15. Упрости го изразот:

а) $3x - 5y + 2x + 12y + 3 - 6x - 2$,

б) $12x + 2y - 7x - 13 - 2y + 11$,

в) $2 \cdot (2x + 5y) - 3 \cdot (4x - 3) + 4 \cdot (2y + 3x) - 7$,

г) $4 \cdot (2x + 5y - 3) - 3y + x + 7$.

3.4 Составување формули

Во претходните одделенија научи дека периметарот на рамностран триаголник со страна a се пресметува според формулата $L = 3a$. Понатаму, знаеш дека плоштината на квадрат со страна a се пресметува според формулата $P = a^2$, а плоштината на правоаголник со страни a и b со формулата $P = ab$. Но, што е формула?

Формула е равенство со кое се искажува некое математичко правило, тврдење или резултат, најчесто наменето за пресметување.

Пример 1. Во едно одделение има 30 ученици, од кои 60% се девојчиња. Бројот на девојчињата во одделението го пресметуваме така што наоѓаме колку е 60% од 30. Знаеме дека 60% од 30 е $\frac{60}{100} \cdot 30 = 18$, што значи во одделението има 18 девојчиња.

Во горните пресметувања воочуваме три броја:

- износот на целото, т.е. бројот (30 ученици) од кој бараме определен процент, кој го нарекуваме *основна вредност* и го означуваме со K ,
- износот на делот од целото (18 девојчиња), кој го нарекуваме *процентен износ* и кој го означуваме со i , и
- бројот на *процентите*, кој го означуваме со p .

Сега, бидејќи $p\%$ од основната вредност K е $\frac{p}{100} \cdot K = \frac{Kp}{100}$, а тоа е процентниот износ i , добиваме дека $i = \frac{Kp}{100}$ е формула за пресметување процентниот износ кога се познати основата K и процентот p .

Понатаму, од добиената формула следува $100i = Kp$, односно $K = \frac{100i}{p}$, што значи дека ако ги знаеме процентот и процентниот износ, тогаш можеме да ја пресметаме основната вредност. Слично добиваме $p = \frac{100i}{K}$, што значи дека кога ги знаеме процентниот износ и основната вредност можеме да го пресметаме процентот.

Во примерот ние изведовме веќе позната формула. Но, формули можеме да добиеме и за некои наши секојдневни потреби. Да разгледаме уште два примера.

Пример 2. Кирил оди од Прилеп за Битола и тој во моментот е на 5 km од Прилеп. Кирил продолжува да се движи кон Битола со брзина од 4 km на час. Најди формула со

која во зависност од времето ќе се пресметува растојанието на кое Кирил се наоѓа од Прилеп.

Решение. Со секој изминат час Кирил од Прилеп се оддалечува 4 km , што значи дека по t часови тој дополнително се оддалечува $4t\text{ km}$. Со S да го означиме растојанието на кое Кирил се наоѓа од Прилеп. На почетокот тој е оддалечен 5 km , па затоа по t часови тој од Прилеп ќе биде на растојание $S = 5 + 4t$.

Од најдената формула можеме времето да го изразиме во зависност од поминатиот пат. Притоа имаме $4t = S - 5$, односно $t = \frac{S-5}{4}$.

Пример 3. Бајрам на пазар продава компири и зелка. Ако 1 kg го компири го продава по 60 денари, а 1 kg зелка го продава по 25 денари, најди формула со која Бајрам ќе пресметува колку пари ќе заработува при продажба на различни количества компири и зелка.

Колку пари ќе заработи Бајрам ако продаде 120 kg компири и 200 kg зелка?

Решение. При продажба на x килограми компири се добиваат $60x$ денари, а при продажба на y килограми зелка се добиваат $25y$ денари. Значи, при продажба на x килограми компири и y килограми зелка Бајрам сумата S која ќе ја заработи ја пресметува со формулата $S = 60x + 25y$.

За да пресметаме колку пари ќе заработи Бајрам ако продаде 120 kg компири и 200 kg зелка, во формулата $S = 60x + 25y$ ставаме $x = 120$ и $y = 200$. Значи, Бајрам ќе заработи $S = 60 \cdot 120 + 25 \cdot 200 = 7200 + 5000 = 12200$ денари.

Задачи за вежби

16. Тахир на 1. јануари во банка вложува определена сума пари. Тој на име на камата за вложените пари на крајот на годината сака да добие 40000 денари. Ако банката на вложените средства исплаќа годишна камата во висина од 4%, колку пари треба да вложи Тахир?

Упатство. Користи ја формулата од пример 1 за пресметување на основната вредност.

17. Ангела од училишната книжарница сака да купи моливи и тетратки. Цената на еден молив е 22 денари, а цената на една тетратка е 47 денари. Запиши формула со која Ангела ќе пресметува колку пари ќе плати ако купи x моливи и y тетратки.
18. За роденденската забава Мерсиха сака да купи еклери, тулумби и баклава. Цената на еден еклер е 50 денари, цената на една тулумба е 55 денари и цената на една баклава е 45 денари. Запиши формула со која Мерсиха ќе пресметува колку пари ќе плати ако купи x тулумби, y еклери и z баклави. Колку пари ќе плати Мерсиха ако сака да купи 20 тулумби, 35 еклери и 40 баклави?
19. За роденденската забава Емил сака од блискиот ресторант, кој своите пици ги доставува дома, да купи пици и пастрмајлии. Цената на една пица е 320 денари,

а цената на една пастрмајлија е 250 денари. За достава на една нарачка се плаќа 100 денари. Запиши формула со која Емил ќе пресметува колку пари треба да плати ако порача x пици и y пастрмајлии. Колку пари треба да плати Емил за купување на 12 пици и 6 пастрмајлии?

3.5 Поим за равенка. Линеарна равенка со една непозната

Да се потсетиме! Два изрази сврзани со знакот „ $=$ “ (еднакво) формираат *равенство*.

Пример 1. а) Во равенствата: $11 + 4 \cdot (12 - 7) = 17 + 28 : 2$, $45 - 24 : 2 = 11 + 2 \cdot 11$ и $3 \cdot 7 = 12 + 6 : 2$ на двете страни имаме бројни изрази.

б) Во равенствата: $4x - 12 = 22 + 2y$, $7x + 15 = 3x - 1$ и $2x + 123 = 21$, каде $x, y \in \mathbb{Z}$, барем на едната страна имаме израз со променлива.

Равенството во кое на левата и десната страна се наоѓаат бројни изрази го нарекуваме *бројно равенство*.

Равенството во кои барем на едната негова страна се наоѓа израз со една или повеќе променливи го нарекуваме *равенство со променлива*.

За бројното равенство велиме дека е *точно*, ако вредноста на изразот на левата страна е еднаква на вредноста на изразот на десната страна.

Пример 2. а) Равенствата $7x + 15 = 3x - 1$ и $2x + 123 = 21$, $x \in \mathbb{Z}$ се равенства со една променлива.

б) Бројните равенства $11 + 4 \cdot (12 - 7) = 17 + 28 : 2$ и $45 - 24 : 2 = 11 + 2 \cdot 11$ се точни, а бројното равенство $3 \cdot 7 = 12 + 6 : 2$ не е точно. Провери!

Равенствата со променливи уште ги нарекуваме *равенки*. Променливите во равенките ги нарекуваме *непознати*. Множеството во кое се менуваат променливите го нарекуваме *дефиницијно множество* и најчесто се означува со D .

Претходно идентитетот го дефиниравме како два идентични изрази поврзани со знакот за равенство. Тоа значи дека равенката што преминува во точно бројно равенство за секоја вредност $x \in D$ е идентитет. Понатаму, равенката која не преминува во бројно равенство за ниту еден $x \in D$ ја нарекуваме *невозможна* или *противречна равенка*.

Пример 3. Која од следниве равенки е идентитет, а која е противречна:

а) $x + 12 = 12 + x$, $x \in \mathbb{Z}$, б) $4x + 1 = 3x + 2$, $x \in \mathbb{N}$,

в) $x + 7 = x - 7$, $x \in \mathbb{Z}$, г) $4x + 1 = 2x$, $x \in \mathbb{Z}$.

Решение. Идентитет е равенката под а), а противречни се равенките в) и г). Размисли и образложи!

Како што знаеме, имаме равенства со една, две, три и повеќе променливи.

Во општ случај, равенството со една променлива има вид $A(x) = B(x)$, $x \in D$, каде $A(x)$ и $B(x)$ се изрази со променлива x определени на D .

Оттука и од дефиницијата на равенка следува дека имаме *равенки со една, две, три и повеќе непознати*. Понатаму, рековме дека постојат и други поделби на изразите. Меѓутоа, ние ги разгледувавме само линеарните изрази со променливи. Равенките кои се добиени само со помош на линеарни изрази ги нарекуваме *линеарни равенки*. Во натамошните разгледувања ќе се осврнеме на *линеарните равенки со една непозната*.

Пример 4. Која од следниве равенки е линеарна равенка со една непозната:

а) $4x - 12 = x + 3$, б) $2x + 3y = 22$, в) $xy + 12 = x + y$, г) $x - 5 = 2x$?

Решение. Линеарни равенки со една непозната се равенките а) и г). Равенката б) е линеарна, но има две непознати, а равенката в) покрај тоа што не е линеарна, на левата страна содржи алгебарски израз кој не е линеарен, таа е и равенка со две непознати.

Пример 5. Да ја разгледаме равенката $5x - 3 = 2x + 6$, со дефиниционо множество $D = \{0, 1, 2, 3\}$. За кои вредности на $x \in D$ равенката преминува во точно бројно равенство?

Решение. Имаме,

- за $x = 0$ важи $5 \cdot 0 - 3 = -3 \neq 6 = 2 \cdot 0 + 6$,

- за $x = 1$ важи $5 \cdot 1 - 3 = 2 \neq 8 = 2 \cdot 1 + 6$,

- за $x = 2$ важи $5 \cdot 2 - 3 = 7 \neq 10 = 2 \cdot 2 + 6$, и

- за $x = 3$ важи $5 \cdot 3 - 3 = 12 = 2 \cdot 3 + 6$,

што значи дека само за $x = 3$ равенката $5x - 3 = 2x + 6$ преминува во точно бројно равенство.

Во врска со претходниот пример ја имаме следнава дефиниција.

Вредноста на непознатата за која равенката преминува во точно бројно равенство ја нарекуваме *решение на равенката*.

Пример 6. Најди ги решенијата на равенката $14 - 2x = x - 1$, $x \in \{1, 3, 5\}$.

Решение. Од $14 - 2 \cdot 1 = 12 \neq 0 = 1 - 1$, $14 - 2 \cdot 3 = 8 \neq 2 = 3 - 1$ и $14 - 2 \cdot 5 = 4 = 5 - 1$ следува дека единствено решение на равенката е $x = 5$. ■

Задачи за вежби

20. Кои од следниве равенства

а) $3x - 7 = x + 11$, $x \in \mathbb{N}$,

б) $12 + 12 \cdot 4 = 28 - (-124 : 4)$,

в) $3x - 7 = 7y + 11$, $x, y \in \mathbb{Z}$,

г) $11 + 30 : 4 = 28 + 19 : 3$,

се равенства со променлива, а кои се бројни равенства? Дали бројните равенства се точни?

21. Која од следниве равенки е идентитет, а која е противречна:

а) $3x - 8 = x + 11$, $x \in \mathbb{N}$,

б) $12 + 7x = 7x + 12$, $x \in \mathbb{N}$

- в) $3x - 9 = 7x + 11$, $x \in \mathbb{Z}$, г) $11 + 2x = x + 6$, $x \in \mathbb{N}$?
22. Која од следниве равенки е линеарна равенка со една непозната:
- а) $3x - 8 = xy + 11$, б) $12 + 7x = y + 4$,
- в) $3x = 7x + 11$, г) $11 + 2x = 5x - 13$?
23. Ако $D = \{0, 1, 2, 3\}$, најди ги решенијата на равенките:
- а) $3x - 1 = x + 1$, б) $4x - 2 = x + 1$, в) $3x - 5 = x + 1$.

3.6 Линеарна равенка со една непозната со целобројни коефициенти

При изучување на операциите во множеството цели броеви, користејќи ги својствата на истите решавање равенки од видот: $x + a = b$, $ax = b$, $x : a = b$. Равенки од наведените видови решавање и кога учеше за позитивните дробки. Во оваа лекција ќе ги прошириш своите знаења за равенките и нивното решавање.

Пример 1. Нека $D = \{0, 1, 2, 3\}$ е дефиниционото множество на равенките

$$3x + 1 = x + 5 \text{ и } 2x - 1 = x + 1.$$

Ќе ги определиме решенијата на двете равенки.

	0	1	2	3
$3x + 1 = x + 5$	$3 \cdot 0 + 1 \neq 0 + 5$	$3 \cdot 1 + 1 \neq 1 + 5$	$3 \cdot 2 + 1 = 2 + 5$	$3 \cdot 3 + 1 \neq 3 + 5$
$2x - 1 = x + 1$	$2 \cdot 0 - 1 \neq 0 + 1$	$2 \cdot 1 - 1 \neq 1 + 1$	$2 \cdot 1 - 1 = 2 + 1$	$2 \cdot 3 - 1 \neq 3 + 1$

Забележуваме дека $x = 2$ е решение и на двете равенки.

Во врска со претходниот пример ја имаме следнава дефиниција.

Две равенки со исто дефиниционо множество кои што имаат еднакви решенија ги нарекуваме *еквивалентни равенки*.

Еквивалентните равенки се од особена важност, бидејќи решавањето на дадена равенка се сведува на трансформација на истата во еквивалентни равенки сè додека не се добие решение на равенката. Трансформацијата на дадена равенка во еквивалентна равенка се реализира со помош на следниве тврдења.

T1. Ако на левата и десната страна на равенката $A(x) = B(x)$ се додаде ист број c или израз $C(x)$ со променлива x , кој што е определен за секој x од дефиниционото множество на равенката, тогаш се добива еквивалентна равенка на дадената. Значи, $A(x) = B(x) \Leftrightarrow A(x) + C(x) = B(x) + C(x)$.

Знакот $\Leftrightarrow$ се чита „е еквивалентна со“

Т2. Ако двете страни на равенката $A(x) = B(x)$ се помножат или се поделат со еден ист број $a \neq 0$, тогаш се добива еквивалентна равенка на дадената. Значи, $A(x) = B(x) \Leftrightarrow a \cdot A(x) = a \cdot B(x)$.

Пример 2. Реша ја равенката:

$$4x - 12 = 2x - 4.$$

Решение. Последователно добиваме

$$\begin{aligned} 4x - 12 = 2x - 4 &\Leftrightarrow 4x - 12 - 2x = 2x - 4 - 2x &\Leftrightarrow 2x - 12 = -4 \\ &\Leftrightarrow 2x - 12 + 12 = -4 + 12 &\Leftrightarrow 2x = 8 \\ &\Leftrightarrow 2x : 2 = 8 : 2 &\Leftrightarrow x = 4. \end{aligned}$$

Проверка: $4 \cdot 4 - 12 = 2 \cdot 4 - 4$, т.е. $4 = 4$.

Пример 3. Реша ја равенката:

$$5x - 7 + x = 1 + 2x.$$

Решение. Последователно добиваме

$$\begin{aligned} 5x - 7 + x = 1 + 2x &\Leftrightarrow 6x - 7 = 1 + 2x &\Leftrightarrow 6x - 7 - 2x = 1 + 2x - 2x \\ &\Leftrightarrow 4x - 7 = 1 &\Leftrightarrow 4x - 7 + 7 = 1 + 7 \\ &\Leftrightarrow 4x = 8 &\Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Проверка: $5 \cdot 2 - 7 + 2 = 1 + 2 \cdot 2$, т.е. $5 = 5$.

Од тврдењата 1 и 2 ги добиваме следниве последици, кои ги користиме при решавањето равенки.

П1. Секој член на равенката може да се пренесе од една страна на равенката на друга, но со спротивен знак.

П2. Ако на двете страни на равенката има еднакви членови, тогаш тие може да се поништат.

П3. Ако сите членови на равенката го променат знакот, тогаш се добива еквивалентна равенка на дадената.

Користејќи ги добиените последици, чекорите за решавање на произволна линеарна равенка се:

- 1) се ослободуваме од заградите,
- 2) ги пренесуваме членовите кои ја содржат непознатата на левата страна на равенката, а оние што не ја содржат на десната,
- 3) равенката ја доведуваме до видот $ax = b$,
- 4) ако $a \neq 0$, решение на равенката е $x = b : a$, ако $a = 0, b \neq 0$ тогаш равенката нема решение, т.е. таа е противречна, а ако $a = 0, b = 0$, тогаш равенката е идентитет, па затоа има бесконечно многу решенија.

Пример 4. Реша ја равенката:

$$2(x + 1) - 3(x - 1) = 4(x + 1) + 1.$$

Решение. Последователно добиваме еквивалентни равенки:

$$2(x+1) - 3(x-1) = 4(x+1) + 1,$$

$$2x + 2 - 3x + 3 = 4x + 4 + 1,$$

$$-x + 5 = 4x + 5$$

$$-x = 4x,$$

$$-x - 4x = 0,$$

$$-5x = 0,$$

$$x = 0.$$

Проверка. $2(0+1) - 3(0-1) = 4(0+1) + 1$, т.е. $2+3=4+1$, односно $5=5$.

Пример 5. Реши ја равенката:

$$2(2x+1) - 3 = 2(x+1) + x$$

Решение. Последователно добиваме еквивалентни равенки:

$$2(2x+1) - 3 = 2(x+1) + x,$$

$$4x + 2 - 3 = 2x + 2 + x,$$

$$4x - 1 = 3x + 2,$$

$$4x - 3x = 2 + 1,$$

$$x = 3.$$

Проверка: $2(2 \cdot 3 + 1) - 3 = 2(3 + 1) + 3$, т.е. $2 \cdot 7 - 3 = 2 \cdot 4 + 3$, односно $11 = 11$.

Пример 6. Реши ја равенката:

$$5(x-1) - 3(x-2) = 2(x+1) - (x-5).$$

Решение. Последователно добиваме еквивалентни равенки:

$$5(x-1) - 3(x-2) = 2(x+1) - (x-5),$$

$$5x - 5 - 3x + 6 = 2x + 2 - x + 5,$$

$$2x + 1 = x + 7$$

$$2x - x = 7 - 1,$$

$$x = 6.$$

Проверка. $5(6-1) - 3(6-2) = 2(6+1) - (6-5)$, т.е. $25-12=14-1$, односно $13=13$.

Задачи за вежби

24. Дали се еквивалентни равенките:

а) $3x - 1 = x + 3$ и $6x + 2 = 2x + 2$,

б) $4x + 3 = 3x + 2$ и $3x + 2 = 2x + 1$,

в) $4x - 1 = 3x + 2$ и $4x + 1 = 3x + 2$.

25. Користејќи ги T1 и T2 реши ги равенките:

а) $3x + 1 = 2x - 2 + x$,

б) $14x + 28 = 7x + 42$,

в) $x - 12 - 2(3x - 2) = 16 - 8x$.

г) $7a + 17 = 3a + 29$,

д) $17x + 3 = 11x + 5$

26. Реши ги равенките:

а) $9(3a+1) - 6(5a-7) = 4(a+11)$,

б) $20(x+1) - 15(x+2) = 12(x+3) - 10(x+4)$,

в) $2x + 3(x+4) + 5(x+6) = 7(x+8) - 14$,

г) $2x - 8 = 4x - 2(x+4)$,

д) $3x - 7 = 5x + 10 - 2(x+6)$.

3.7 Примена на линеарните равенки

Математиката е наука која има примена скоро во сите области на животот. Во следните примери ќе дадеме некои примени на линеарните равенки. Притоа, прво според дадените услови прво составуваме еден или повеќе алгебарски изрази, со чија помош ја составуваме линеарната равенка со која го решаваме поставениот проблем.

Пример 1. Кој број треба да се одземе од -17 за да се добие бројот -33 ?

Решение. Нека x е бараниот број. Кога го одземаме од бројот -17 , го добиваме изразот $-17 - x$, кој треба да е еднаков на -33 . Значи,

$$-17 - x = -33,$$

од каде добиваме

$$x = -17 - (-33) = -17 + 33 = 16.$$

Направи проверка!

Пример 2. Определи девет последователни цели броеви такви што збирот на првите три, почнувајќи од најмалиот, е еднаков на останатите шест броја.

Решение. Нека x е најмалиот од бараните броеви. Тогаш бараните броеви се

$$x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5, x+6, x+7, x+8.$$

Збирот на првите три броја е $x + x+1 + x+2 = 3x+3$, а збирот на преостанатите шест броја е $x+3 + x+4 + x+5 + x+6 + x+7 + x+8 = 6x+33$. Од условот на задачата следува дека добиените алгебарски изрази се еднакви, од каде следува равенката

$$3x+3 = 6x+33.$$

Последователно добиваме:

$$6x - 3x = 3 - 33$$

$$3x = -30$$

$$x = -10.$$

Значи, бараните броеви се $-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2$.

Направи проверка!

Пример 3. Екрем требало да го помножи бројот 11^3 со трицифрениот број T чија цифра на единиците е двапати поголема од цифрата на десетките, а цифрата на стотките

е за 5 поголема од цифрата на десетките. Но, тој згрешил при множењето и ги заменил местата на цифрите на единиците и десетките на бројот T . Така, Екрем добил резултат кој е за 11979 поголем од точниот. Определи го бројот T .

Решение. Нека x е цифрата на десетките на бројот T . Тогаш цифрата на единиците е $2x$, а цифрата на стотките е $x+5$. Значи, за бараниот број го добиваме изразот

$$T = 100(5+x) + 10x + 2x = 100(5+x) + 12x$$

а за бројот кој го множел Екрем го добиваме изразот

$$100(5+x) + 10 \cdot 2x + x = 100(5+x) + 21x.$$

Од условот на задачата следува дека разликата на овие два изрази помножена со 11^3 е еднаква на 11979, од каде ја добиваме равенката:

$$11^3 \cdot (100(5+x) + 21x - 100(5+x) - 12x) = 11979,$$

$$11^3 \cdot (21x - 12x) = 11979,$$

$$1331 \cdot 9x = 11979,$$

односно $x=1$. Значи, бараниот број е $T = 100(5+1) + 12 \cdot 1 = 612$.

Направи проверка!

Пример 4*. Цифрата на единиците на еден број е 2. Ако на бројот му се избрише цифрата на единиците, се добива број кој е за 40529 помал од почетниот број. Определи го почетниот број.

Решение. Нека по бришењето на цифрата на единиците се добива бројот x . Тогаш за бараниот број го добиваме изразот $10x+2$, па затоа

$$x + 40529 = 10x + 2,$$

од каде добиваме $x = 4503$. Според тоа, бараниот број е

$$10x + 2 = 45030 + 2 = 45032.$$

Направи проверка!

Пример 5. Марко, Мартин и Марио се тројка (браќа родени во ист ден), а нивниот брат Гордан е 3 години помлад од нив. Тие заедно имаат 53 години. Колку години има секој од четворицата браќа?

Решение. Нека Гордан има x години. Тогаш Марко, Мартин и Марио имаат по $x+3$ години. Според тоа, забирот на годините на браќата е даден со изразот $x + 3(x+3)$, од каде добиваме

$$x + 3(x+3) = 53,$$

$$4x + 9 = 53,$$

$$x = 11.$$

Значи, Гордан има 11 години, а Марко, Мартин и Марио имаат по 14 години.

Направи проверка!

Пример 6. Кирјана и нејзиниот син Павел заедно имаат 64 килограми. Мајката има седум пати повеќе килограми од синот. Колку килограми има Кирјана, а колку Павел?

Решение. Нека Павел има x килограми. Тогаш Кирјана има $7x$ килограми, па затоа $x + 7x = 64$, од каде добиваме $x = 8 \text{ kg}$.

Значи, Павел има 8 kg , а Кирјана има $7 \cdot 8 = 56 \text{ kg}$.

Направи проверка!

Пример 7. Газменд направил ограда во која во еден ред поставил 10 столбови со различна ширина. Првиот столб е најтесен, а секој столб е за 1 cm поширок од претходниот. Растојанието меѓу секои два соседни столба е еднакво на 75 cm , а растојанието од почетокот на првиот до крајот на десеттиот столб е еднакво на $80 \text{ dm } 200 \text{ mm}$. Определи ја ширината на седмиот столб.

Решение. Растојанието од почетокот на првиот столб до крајот на десеттиот столб е еднакво на $80 \text{ dm } 200 \text{ mm} = 820 \text{ cm}$. Меѓу десетте столбови имаме 9 растојанија по 75 cm и затоа збирот на ширините на столбовите е еднаков на

$$820 - 9 \cdot 75 = 820 - 675 = 145 \text{ cm}.$$

Нека ширината на првиот столб е $x \text{ cm}$. Тогаш

$$x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 9) = 145$$

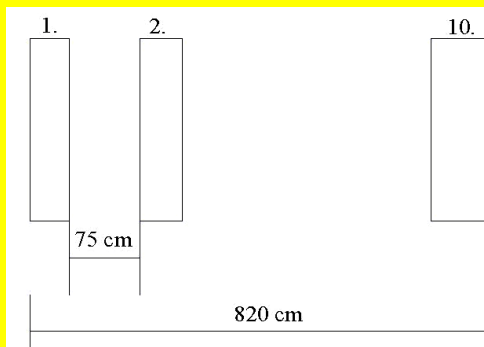
$$10x + (1 + 2 + \dots + 9) = 145$$

$$10x + 45 = 145$$

$$x = 10 \text{ cm}.$$

Конечно, ширината на седмиот столб е еднаква на $x + 6 = 16 \text{ cm}$.

Направи проверка!



Пример 8. Велосипедист изминал 600 km за три дена. На почетокот возел побрзо, па затоа првиот ден поминал два пати поголемо растојание отколку вториот ден, и за 5 km повеќе отколку третиот ден. Колку километри минувал велосипедистот секој од трите дена?

Решение. Нека велосипедистот вториот ден поминал $x \text{ km}$. Тоа значи дека првиот ден поминал $2x \text{ km}$ и третиот ден поминал $2x - 5 \text{ km}$. Според тоа, $2x + x + 2x - 5 = 600$, од каде добиваме $x = 121$. Значи, велосипедистот вториот ден поминал 121 km , првиот ден поминал $2 \cdot 121 = 242 \text{ km}$ и третиот ден поминал $242 - 5 = 237 \text{ km}$.

Направи проверка!

Задачи за вежби

27. Раде замислил пет броја такви што, почнувајќи од најмалиот, секој следен број е три пати поголем од претходниот. Збирот на најмалиот и најголемиот број е за 172 поголем од збирот на преостанатите три броја. Кои броеви ги замислил Раде?
28. Збирот на три броја е 2022. Ако првиот број се намали за 111, вториот број се намали за 170, а третиот број се намали за 346, се добиваат еднакви броеви. Определи ги трите почетни броја?

29. Ако на некој двоцифрен број од десно му допишеме 9, добиениот број го поделиме со 13, потоа на добиениот количник од десно му допишеме 1, па добиениот број го поделиме со 11, го добиваме бројот 21. Определи го почетниот број.
30. Збирот на четири броја е 147. Ако на првиот му се додаде 6, од вториот се одземе 6, третиот се помножи со 6 и четвртиот се подели со 6, се добива еден ист број. Определи ги овие броеви.
31. Некој шестцифрен број почнува со цифрата 1. Ако таа цифра ја преместиме на крајот, по цифрата на единиците, добиваме број кој е трипати поголем од почетниот број. Одреди го почетниот шестцифрен број.
32. Газменд има толку денови колку што неговиот татко има седмици и толку месеци колку што неговиот дедо има години. Сите тројца заедно имаат 100 години. Колку години има секој од нив?
33. Три другарки Косара, Ленка и Марија купиле заеднички поклон за својот другар Доротеј. Поклонот чинел 6600 денари. Ако Косара и Марија заедно дале 600 денари повеќе отколку Ленка, а Марија дала два пати повеќе од Косара, колку пари дало секое девојче за поклонот?
34. Венеса купила фрижидер, телевизор и машина за перење. За сите три апарати таа платила 80000 денари. Колку чини секој од овие апарати, ако фрижидерот е 8900 денари поскап од машината за перење, а телевизорот е 6200 денари поефтин од фрижидерот?
35. Од едно училиште на екскурзија тргнале 713 ученици во 25 автобуси, од кои некои имале 33 седишта, а некои 26 седишта. Ако е познато дека сите ученици ги пополниле сите места во автобусите и на секое место седел само по еден ученик, колку автобуси биле со 26, а колку со 33 седишта?
36. Во две купчиња има вкупно 411 лешници. Кога од првото купче ќе се преместат во второто 39 лешници, тогаш во првото купче ќе има два пати повеќе лешници отколку во второто. Колку лешници има во секое купче?
37. Андон се наоѓа на 30 m пред Петар, кој оди три пати побрзо од Андон. Колку метри поминал Петар пред да го стигне Андон?
38. Фејзула учествувал на кроз и тој патеката од 5 km ја претрчал за 16 минути и 40 секунди. За време на трката тој ја зголемувал брзината и секој следен километар го поминувал за 5 секунди побрзо отколку претходниот. За кое време Фејзула го претрчал последниот километар?
39. Андреј поделил неколку јаболка на шест еднакви купчиња. Борис истиот број јаболка го поделил на пет еднакви купчиња. Борис забележал дека секое од неговите купчиња има по две јаболка повеќе од секое од купчињата на Андреј. Колку јаболка имал Андреј?
40. Фамилијата Цветковски одгледува лалиња, каранфили и хризантеми. Минатата година од продажбата на цвеќиња заработиле 2750000 денари. Цената на една хризантема е 80 денари, лалето е 10 денари поскапо од хризантемата, а каранфилот е 10 денари поскап од лалето. Определи го бројот на продадените цветови ако хризантеми се продадени двапати повеќе од лалиња, а каранфили се продадени трипати повеќе од лалиња.

3.8 Поим за пресликување (функција)

Во секојдневниот живот се среќаваме со многу важни примери, за кои на прв поглед ќе помислиме дека немаат ништо заедничко. На пример, периметарот на квадрат со страна a се пресметува со формулата $L = 4a$, а неговата плоштина се пресметува со формулата $P = a^2$. Меѓутоа, како што знаеме со формулата за периметар е дадена промената на периметарот на квадратот во зависност од промената на должината на страната, а истото важи и за плоштината на квадратот.

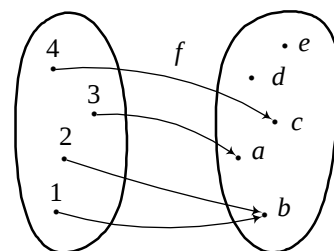
Во горните случаи се дадени како една величина зависи од друга величина и тоа всушност ги поврзува овие два примери. Во вакви и слични случаи велиме дека е зададена функција. Попрецизно ја имаме следнава дефиниција.

Нека A и B се две непразни множества. Ако на секој елемент $x \in A$ му е придружен, по некое правило f , еднозначно определен елемент $y \in B$, тогаш велиме дека f е *пресликување (функција)* од A во B и пишуваме $f : A \rightarrow B$.

За елементот $y \in B$ велиме дека е *слика* на елементот $x \in A$ и пишуваме $y = f(x)$. Множеството A го нарекуваме *домен*, а множеството B - *кодомен* на пресликувањето f .

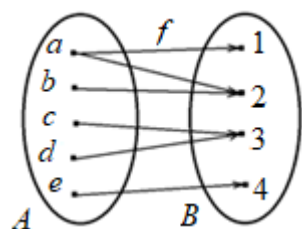
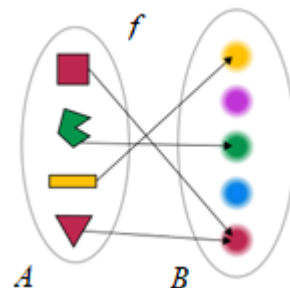
Пример 1. Ако $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$, тогаш со $f(1) = b$, $f(2) = b$, $f(3) = a$, $f(4) = c$ е зададено пресликување $f : A \rightarrow B$.

Во многу случаи пожелно е пресликувањата графички да се претставуваат. Така, даденото пресликување, со помош на Веновите дијаграми на множествата A и B графички можеме да го претставиме како на цртежот. Притоа секоја стрелка покажува кој елемент во кој елемент се пресликува.



Како што забележуваме во горниот пример елементите 1 и 2 се пресликуваат во елементот b . Според тоа, два или повеќе елементи може да се пресликаат во еден ист елемент. Меѓутоа, еден елемент може да има само една слика.

Пример 2. а) На цртежот е дадено пресликување со кое обоените фигури од множеството A се пресликуваат во нивните бои, т.е. во боите од множеството B .



Пример 3. Дијаграмот прикажан на левиот цртеж не прикажува пресликување. Имено, на елементот $a \in A$ му се придружени два елемента: 1 и 2, а за да е пресликување може да му е придружен најмногу еден елемент.

3.9 Низи цели броеви

Михаил треба да го запише илјадитиот по ред природен број кој при делење со 3 дава остаток 1, а Арлинда треба да го запише осумстотиниот по ред природен број кој при делење со 4 дава остаток 1. Кој ќе запише поголем број?

Ако секој по ред запишуваме броеви за да стигнеме до бараните бројеви, по запишувањето на своите први единаесет броја ја добиваме табелата:

Михаил	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	...
Арлинда	3	7	11	15	19	23	27	31	36	39	43	...

Но, што понатаму? Дали за да ги добијат броевите кои треба да ги запишат Михаил и Арлинда, тие треба да продолжат да ја пополнуваат табелата?

Сигурно се сети дека броевите кои ги запишува Михаил се од видот $3k - 2, k \in \mathbb{N}$

Затоа ако Михаил по ред ги запишува броевите кои при делење со 3 даваат остаток 1, велиме дека тој запишува низа броеви определена со *правилото* $3k - 2, k \in \mathbb{N}$. Притоа, ако низата на Михаил ја наречеме низа a , тогаш k -тиот по ред член на оваа низа ќе го означиме со $a(k)$ и ќе велиме дека Михаил запишал низа чиј *општ член* е $a(k) = 3k - 2, k \in \mathbb{N}$. За означување на членот $a(k)$, вообичаена ознака е a_k , која ние ќе ја користиме.

Слично, Арлинда редоследно ги запишува броевите од видот $4m - 1, m \in \mathbb{N}$, односно запишува низа со општ член $b_m = 4m - 1, m \in \mathbb{N}$

Од досега кажаното заклучуваме дека илјадитиот по ред број кој ќе го запише Михаил е илјадитиот член на низата $a_k = 3k - 2, k \in \mathbb{N}$, т.е. $a_{1000} = 3 \cdot 1000 - 2 = 2998$, а осумстотиниот по ред број кој ќе го запише Арлинда е осумстотиниот член на низата $b_m = 4m - 1, m \in \mathbb{N}$, односно бројот $b_{800} = 4 \cdot 800 - 1 = 3199$. Значи, Арлинда е запише поголем број.

Пример 1. Запиши ги следните три члена низата: 3, 8, 13, 18, 23, 28, Определи го правилото со кое е зададена оваа низа и потоа запиши го нејзиниот стоти член.

Решение. За да ги запишеме следните три члена на дадената низа, но и за да го определиме правилото со кое е зададена оваа низа прво треба да согледаме дали и како членот на низата a_k е поврзан со бројот k . Лесно се воочува дека

$$8 - 3 = 5, \quad 13 - 8 = 5, \quad 18 - 13 = 5, \quad 23 - 18 = 5, \quad 28 - 23 = 5,$$

односно дека секој член на низата е за 5 поголем од членот кој е непосредно пред него. Според тоа, следните три члена на низата се $28 + 5 = 33$, $33 + 5 = 38$ и $38 + 5 = 43$, т.е. низата е:

$$3, 8, 13, 18, 23, 28, \mathbf{33, 38, 43}, \dots$$

Сега дадената низа да ја означиме со $a_k, k \in \mathbb{N}$ и да искористиме дека секој член на низата е за 5 поголем од членот кој е непосредно пред него. За првите седум члена важи:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 3, \\
a_2 &= 8 = 3 + 5 \cdot 1 = 3 + 5 \cdot (2 - 1), \\
a_3 &= 13 = 8 + 5 = 3 + 5 + 5 = 3 + 5 \cdot 2 = 3 + 5 \cdot (3 - 1), \\
a_4 &= 18 = 13 + 5 = 3 + 5 \cdot 2 + 5 = 3 + 5 \cdot 3 = 3 + 5 \cdot (4 - 1), \\
a_5 &= 23 = 18 + 5 = 3 + 5 \cdot 3 + 5 = 3 + 5 \cdot 4 = 3 + 5 \cdot (5 - 1), \\
a_6 &= 28 = 23 + 5 = 3 + 5 \cdot 4 + 5 = 3 + 5 \cdot 5 = 3 + 5 \cdot (6 - 1), \\
a_7 &= 33 = 28 + 5 = 3 + 5 \cdot 5 + 5 = 3 + 5 \cdot 6 = 3 + 5 \cdot (7 - 1),
\end{aligned}$$

Забележуваме дека, почнувајќи од вториот, па до седмиот, членовите на низата можеме да ги добиеме според формулата $a_k = 3 + 5(k - 1)$. Понатаму, бидејќи

$$3 + 5(1 - 1) = 3 = a_1, \quad 3 + 5(8 - 1) = 3 + 35 = 38 = a_8 \quad \text{и} \quad 3 + 5(9 - 1) = 3 + 40 = 43 = a_9$$

заклучуваме дека општиот член на низата е $a_k = 3 + 5(k - 1)$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Стотиот член на дадената низа е } a_{100} = 3 + 5 \cdot (100 - 1) = 488.$$

Пример 2. Определи го 50–тиот член на низата:

$$31, 28, 25, 22, 19, \dots$$

Решение. Да означиме $a_1 = 31$, $a_2 = 28$, $a_3 = 25$, $a_4 = 22$, $a_5 = 19$. Забележуваме дека почнувајќи од a_2 за членовите на дадената низа броеви важи

$$\begin{aligned}
a_2 &= 28 = 31 - 3 = 31 - 3 \cdot 1 = 31 - 3 \cdot (2 - 1) \\
a_3 &= 25 = 28 - 3 = 31 - 3 \cdot 1 - 3 = 31 - 3 \cdot 2 = 31 - 3 \cdot (3 - 1) \\
a_4 &= 22 = 25 - 3 = 31 - 3 \cdot 2 - 3 = 31 - 3 \cdot 3 = 31 - 3 \cdot (4 - 1), \\
a_5 &= 19 = 22 - 3 = 31 - 3 \cdot 3 - 3 = 31 - 3 \cdot 4 = 31 - 3 \cdot (5 - 1).
\end{aligned}$$

Сега, ако земеме предвид дека $a_1 = 31 - 3 \cdot (1 - 1)$, заклучуваме дека општиот член на низата е $a_k = 31 - 3(k - 1)$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Конечно, 50–тиот член на низата е } a_{50} = 31 - 3 \cdot (50 - 1) = -116.$$

Пример 3. Определи го педесеттиот член на низата:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$$

Решение. Да означиме

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8, a_5 = 16, a_6 = 32, a_7 = 64.$$

Забележуваме дека почнувајќи од a_2 за членовите на дадената низа броеви важи

$$\begin{aligned}
a_2 : a_1 &= 2 : 1 = 2, & a_3 : a_2 &= 4 : 2 = 2, & a_4 : a_3 &= 8 : 4 = 2, \\
a_5 : a_4 &= 16 : 8 = 2, & a_6 : a_5 &= 32 : 16 = 2, & a_7 : a_6 &= 64 : 32 = 2
\end{aligned}$$

т.е. секој следен член на низата се добива кога членот кој е непосредно пред него се помножи со 2. Значи,

$$\begin{aligned}
a_2 &= 2a_1 = 2, & a_5 &= 2a_4 = 2 \cdot 2^3 = 2^4, \\
a_3 &= 2a_2 = 2 \cdot 2 = 2^2, & a_6 &= 2a_5 = 2 \cdot 2^4 = 2^5, \\
a_4 &= 2a_3 = 2 \cdot 2^2 = 2^3, & a_7 &= 2a_6 = 2 \cdot 2^5 = 2^6.
\end{aligned}$$

Од горните равенства заклучуваме дека низата е зададена со $a_1 = 1$ и $a_n = 2^{n-1}$, за $n > 1$.
Значи, нејзиниот педесетти член е $a_{50} = 2^{50-1} = 2^{49}$.

Пример 4. Определи го дваесеттиот член на низата:

$$1, -3, 9, -27, 81, \dots$$

Решение. Да означиме

$$a_1 = 1, a_2 = -3, a_3 = 9, a_4 = -27, a_5 = 81.$$

Забележуваме дека почнувајќи од a_2 за членовите на дадената низа броеви важи

$$a_2 : a_1 = (-3) : 1 = -3, \quad a_3 : a_2 = 9 : (-3) = -3,$$

$$a_4 : a_3 = (-27) : 9 = -3, \quad a_5 : a_4 = 81 : (-27) = -3,$$

т.е. секој следен член на низата се добива кога членот кој е непосредно пред него се помножи со -3 . Сега, на потполно ист начин како во пример 3 се добива дека

$$a_2 = -3, \quad a_3 = (-3)^2, \quad a_4 = (-3)^3, \quad a_5 = (-3)^4.$$

Од горните равенства заклучуваме дека низата е зададена со $a_1 = 1$ и $a_n = (-3)^{n-1}$, за $n > 1$. Значи, нејзиниот дваесетти член е $a_{20} = (-3)^{20-1} = (-3)^{19}$.

Пример 5. Запиши ги првите пет члена на низата чиј прв член е 1, а секој следен член се добива така што членот пред него се множи со 3 и на добиениот производ се додава 4.

Решение. Имаме:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3a_1 + 4 = 3 \cdot 1 + 4 = 7, \quad a_3 = 3a_2 + 4 = 3 \cdot 7 + 4 = 25,$$

$$a_4 = 3a_3 + 4 = 3 \cdot 25 + 4 = 79, \quad a_5 = 3a_4 + 4 = 3 \cdot 79 + 4 = 241.$$

Пример 6. Вториот член на една низа е 22. Секој следен член на низата се добива така што членот кој е пред него се множи со 5 и од добиениот производ се одзема 3. Определи го првиот член на оваа низа.

Решение. Нека првиот член на низата го означиме со x . Тогаш нејзиниот втор член е $5x - 3$. Но, вториот член на низата е 22, па затоа $5x - 3 = 22$, од каде добиваме $5x = 25$, односно $x = 25 : 5 = 5$. Значи, првиот член на низата е 5.

За оние што сакаа да знаат повеќе Една од најпознатите низи природни броеви е низата на Фибоначи. Првите два члена на оваа низа се $f_1 = 1, f_2 = 1$ и почнувајќи од третиот член секој следен член е еднаков на збирот на претходните два члена. Според тоа, низата на Фибоначи е зададена со:

$$f_1 = 1, f_2 = 1 \text{ и } f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \text{ за } n \geq 2.$$

Првите дванаесет члена на оваа низа се:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$



Леонардо Фибоначи
(1170-1250)

Оваа, на прв поглед едноставна, низа е откриена пред околу 800 години од италијанскиот математичар Леонардо Фибоначи (1170-1250), во чија чест и го добила името. Меѓутоа, истата е предмет на проучување и денес, при што се откриваат нови својства и интересни примени на оваа низа.

Побарај на интернет и научи за животот и делото на Леонардо Фибоначи.

Задачи за вежби

41. Запиши ги првите пет члена на низата за која:
 - а) првиот член е 2 и секој следен член е за 6 поголем од членот пред него,
 - б) првиот член е 1, а секој следен член е пет пати поголем од членот пред него,
 - в) првиот член е 1024, а секој следен член е четири пати помал од членот кој е пред него,
 - г) првиот член е 3, а секој следен член се добива кога членот пред него се множи со 2 и на добиениот производ се додаде 3.
42. Третиот член на една низа е 58. Секој следен член на низата се добива така што членот што е пред него се множи со 4 и на добиениот производ се додава 2. Определи го првиот член на оваа низа.
43. Вториот член на една низа е 33. Секој член на низата се добива така што членот пред него се множи со 5 и од добиениот производ се одзема 7. Определи го првиот член на оваа низа.
44. Третиот член на една низа е 2. Секој член на низата се добива кога на членот што е пред него се додаде 4 и добиениот збир се подели со 7. Определи го првиот член на оваа низа.
45. Вториот член на една низа е 23. Секој член на низата се добива кога од членот што е пред него се одземе 1 и добиената разлика се подели со 2. Запиши ги првите пет члена на оваа низа.
46. За дадената низа откриј како се добива секој следен член и запиши ги следните четири члена на низата:

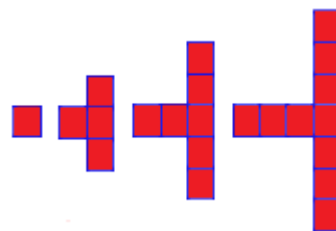
а) 3, 6, 9, 12, ...	б) 5, 15, 25, 35, ...	в) 123, 119, 115, 111, ...
г) -256, 128, -64, 32, ...	д) 1, 5, 25, ...	ѓ) -44, -40, -36, ...
е) -729, -243, -81, ...	ж) 2, 20, 200, ...	з) 1458, 486, 162, ...
47. Запиши ги првите шест члена на низата:
 - а) $a_n = 2n + 11, n \in \mathbb{N}$,
 - б) $a_n = -2n + 13, n \in \mathbb{N}$
 - в) $a_n = 2n + 3, n \in \mathbb{N}$
48. За секоја од дадените низи определи го општиот член, а потоа запиши ги дваесеттиот и триесеттиот член на низата:

а) 11, 14, 17, ...	б) 16, 26, 36, ...	в) 45, 34, 23, ...
г) -28, -25, -22, ...	д) -3, 0, 3, ...	ѓ) 23, 12, 1, ...

3.10 Низи фигури

Во претходната лекција разгледавме низи од цели броеви. Притоа видовме дека низите може да бидат зададени со своите први неколку членови или пак со формулата за општиот член на низата, то значи со некое пресликување определено на множеството природни броеви. Меѓутоа, често пати среќаваме низи кои се задаваат визуелно, односно со 2Д или 3Д форми. Притоа најчесто треба да го определиме општиот член на низата. Да разгледаме неколку примери.

Пример 1. На цртежот се прикажани првите четири члена од низа на 2Д форми составувани со еднакви квадратчиња. Колку квадратчиња се потребни за да се формира трисеттата 2Д форма во оваа низа?



Решение. Ако ги преброиме квадратчињата од кои се составени дадените 2Д форми, добиваме дека тие редоследно се составени од 1, 4, 7 и 10 квадратчиња. Како што гледаме тоа се првите четири члена од низата на природни броеви кои при делење со 3 даваат остаток 1. За оваа низа вее знаеме дека општиот член е $3k - 2, k \in \mathbb{N}$. Според тоа, за формирање на трисеттата 2Д форма се потребни $3 \cdot 30 - 2 = 88$ квадратчиња.

Пример 2. На цртежот е прикажана низа 2Д форми составени од 1 триаголник, 2 триаголника, 3 триаголници, 4 триаголници итн., кои се формирани со помош на еднакви кибритени чкорчиња.



Колку чкорчиња се потребни за да се направи 101-виот член на оваа низа?

Решение. За првата фигура (триаголник) се искористени 3 чкорчиња, за втората фигура се 2 чкорчиња повеќе, т.е. $3 + 2 \cdot 1 = 5$ чкорчиња, за третата фигура се искористени $7 = 5 + 2 = 3 + 2 \cdot 2$ чкорчиња, за четвртата фигура се искористени $9 = 7 + 2 = 3 + 2 \cdot 3$ чкорчиња. Сега лесно се добива дека општиот член на низата е даден со формулата $a_n = 3 + 2(n - 1), n \in \mathbb{N}$. Значи, за да се направи 101-виот член на низата се потребни $a_{101} = 3 + 2(101 - 1) = 203$ чкорчиња.

За оние што сакаат да знаат повеќе. За да се направат првите 101 членови на низата од пример 2 потребни се:

$$\begin{aligned} & 3 + 3 + 2 \cdot 1 + 3 + 2 \cdot 2 + 3 + 2 \cdot 3 + 3 + 2 \cdot 4 + \dots + 3 + 2 \cdot 99 + 3 + 2 \cdot 100 = \\ & = 101 \cdot 3 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100) \\ & = 303 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot [(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (100 + 1)] \\ & = 303 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101 = 303 + 100 \cdot 101 \\ & = 303 + 10100 = 10403 \end{aligned}$$

чкорчиња. При собирањето на броевите 1, 2, 3, 4, ...100 го искористивме правилото кое математичарот Карл Фридрих Гаус (1777-

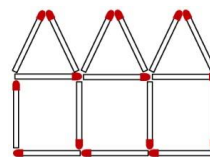


Карл Фридрих Гаус
(1777-1855)

1855) го открил кога бил ученик во прво одделение. Обиди се врз основа на примерот да согледаш како Гаус го определил овој збир.

Побарај на интернет и научи за животот и делото на Карл Фридрих Гаус.

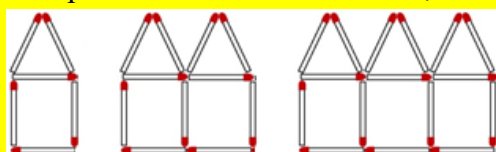
Пример 3. За прикажување на три куќички залепени една до друга, како на цртежот, се потребни 16 чкорчиња.



а) Колку чкорчиња се потребни за прикажување на 55 такви куќички?

б) Колку куќички залепени една до друга може да се прикажат со помош на 756 чкорчиња?

Решение. Да ги составиме првите низи составени од 1, 2 и 3 куќички.



а) За првата куќичка се искористени 6 чкорчиња, а за секоја следна се потребни дополнително по 5 чкорчиња. Според тоа, бројот на чкорчињата од кои се составени низите куќички редоследно ќе биде: 6, 11, 16, 21, Сега, можеме да определиме дека општиот член на низата е $a_n = 6 + 5(n-1)$, $n \in \mathbb{N}$. За да имаме 55 куќички залепени една до друга потребни се $a_{55} = 6 + 54 \cdot 5 = 6 + 270 = 276$ чкорчиња.

б) За да одговориме на ова прашање треба да најдеме кој член од низата содржи 756 чкорчиња. Значи, $6 + 5(n-1) = 756$, од каде следува $5(n-1) = 750$, т.е. $n-1 = 750:5$. Според тоа, $n = 150 + 1 = 151$.

Конечно, со 756 чкорчиња може да се состави низа од $1 + 150 = 151$ куќичка.

Пример 4. Павлина има црни триаголни плочки од кои направила четири фигури како на цртежот. Ако продолжи според истото правило да прави фигури, колку црни триаголници ќе има 15. фигура повеќе од 10. фигура во низата?



Решение. Првата фигура има 1 плочка. Понатаму, втората фигура има 2 плочки повеќе од првата фигура, (означени со црвени квадратчиња), т.е. има $1 + 2$ плочки. Третата фигура има 3 плочки повеќе од втората фигура (означени со жолти квадратчиња), т.е. има $1 + 2 + 3$ плочки. Четвртата фигура има 4 плочки повеќе од третата фигура (означени со сини квадратчиња). Значи, бројот на плочките во n -тата фигура е $1 + 2 + 3 + \dots + n$.

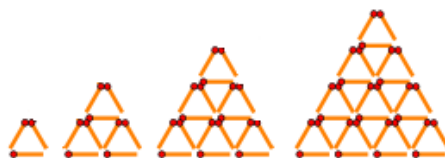


Во 15. фигура има $1 + 2 + \dots + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$ плочки, а во десеттата фигура има $1 + 2 + \dots + 10$ плочки.

Значи, во 15. фигура има $11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 65$ плочки повеќе одколку во 10. Фигура.

Забелешка. Црните плочки може редоследно да се додаваат и оддолу.

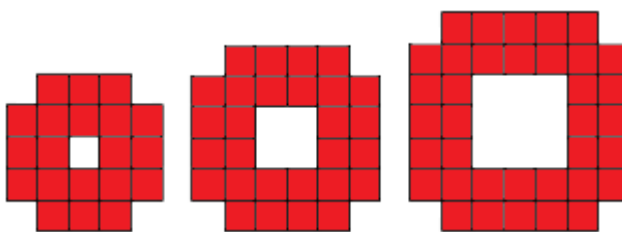
Пример 5. Кирил прави фигури од еднакви чкорчиња како што е прикажано на цртежот, на кој се се прикажани фигури со еден, два, три и четири „ката“. Колку чкорчиња се потребни за да се направи фигурата која ќе има 10 „катови“?



Решение. Фигурата со еден кат има $1 \cdot 3$ чкорчиња. Фигурата со два ката се добива кога на фигурата со еден кат оддолу се додадат 2 триаголника, односно $2 \cdot 3$ чкорчиња, па таа има $1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = (1 + 2) \cdot 3$ чкорчиња. Фигурата со три ката се добива кога на фигурата со два ката оддолу се додадат 3 триаголника, односно $3 \cdot 3$ чкорчиња, па таа има $1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = (1 + 2 + 3) \cdot 3$ чкорчиња. Според тоа, фигурата со n катови се добива кога на фигурата со $n - 1$ катови се додадат n триаголник, односно $3n$ чкорчиња. Оттука следува дека за правење на фигура со 40 катови на Костадин му се потребни

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + \dots + 9 \cdot 3 + 10 \cdot 3 = (1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 10) \cdot 3 = 55 \cdot 3 = 165 \text{ чкорчиња.}$$

Пример 6*. На цртежот се дадени првите три фигури на една низа, кои според определено правило се направени од единечни црвени квадратчиња. Колку квадратчиња содржи десеттата фигура во низата?

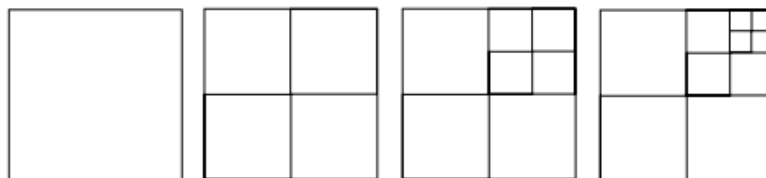


Решение. Првата фигура е квадрат со страна 5, од кој се отстранети четирите аголни полиња и квадрат со страна 1. Втората фигура е квадрат со страна 6, од кој се отстранети четирите аголни полиња и квадрат со страна 2. Третата фигура е квадрат со страна 7, од кој се отстранети четирите аголни полиња и квадрат со страна 3. Значи, секоја следна фигура е квадрат со страна поголема за 1 и од него се отстранети четирите аголни полиња и централниот квадрат кој има страна помала за 4.

Според тоа, десеттата фигура е квадрат со страна 14, од кој се отстранети четирите аголни полиња и квадрат со страна 10. Конечно, оваа фигура има $14^2 - 4 - 10^2 = 92$ квадратчиња.

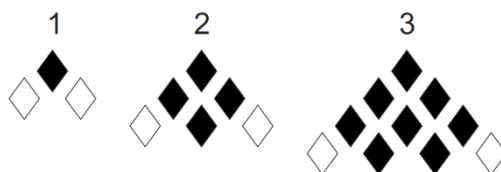
Задачи за вежби

49. На цртежот се прикажани квадрати кои редоследно се добиваат од лево на десно според определено правило. Колку делови ќе има педесеттиот квадрат?



50. Направена е низа од триаголници со помош на дијаманти. Првите три направени триаголници се прикажани на цртежот. Секој нов триаголник се добива со додавање на нова линија на дијаманти. На краевите на долната линија дијамантите се

бели. Сите други дијаманти во триаголникот се црни. Колку црни дијаманти има осмиот триаголник?

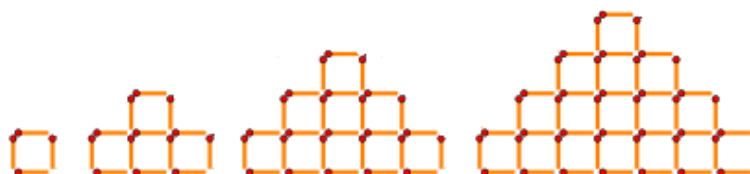


Упатство. За да го најдеш бројот на дијаманти од кои е составен еден триаголник постапи како во решението на пример 3.

51. Ардијан прави кули од 1 денар. Тој направил три кули и продолжил според истото правило. Колку монети употребил за да ја направи десеттата кула?



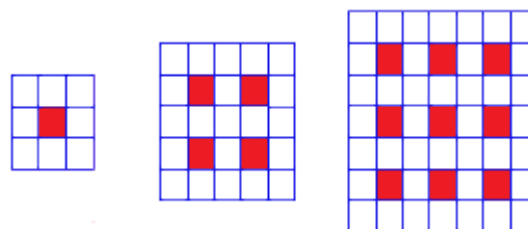
52. Кирил прави фигури од еднакви чкорчиња како што е прикажано на цртежот, на кој се се прикажани фигури со еден, два, три и четири „ката“. Колку чкорчиња се потребни за да се направи фигурата која ќе има 8 „като“?



Упатство. Квадратите кои се додаваат за добивање на втората од првата, третата од втората и четврта од трета фигура означи ги како на цртежот. Внимавај, во сите случаи се става уште едно чкорче.



53. На цртежот се прикажани првите три члена од низа квадрати, во кои според определено правило се распоредени бели и црвени квадратчиња. Откриј го правилото и запиши ги броевите на квадратчињата за првите десет фигури.



3.11 Линеарна функција

Да се потсетиме! Променливите величини x и y се правопрпорционални ако постои број $k \neq 0$ таков што $y = kx$. Притоа бројот k го нарекуваме коефициент на пропорционалност. Всушност правата пропорционалност е функција. Да разгледаме еден пример.

Пример 1. Трактористот Марко треба да изора парцела со плоштина 30 hm^2 . Марко секој ден ора по 2 hm^2 . Колку hm^2 ќе изора по 1 ден, 2 дена, 5 дена, 7 дена, 9 дена и 12 дена.

Решение. Со x да го означиме времето изразено во денови, а со $f(x)$ да ја плоштината која Марко ќе ја изора по x денови. Бидејќи за 1 ден тој ора 2 hm^2 , заклучуваме дека за x денови тој е изора $2x \text{ hm}^2$. Значи, изораната плоштина во зависност од времето се задава со функција $f(x) = 2x$.

Сега лесно можеме да ја пресметаме плоштината која Марко ќе ја изора за секој од дадените денови. Пресметките се дадени во табелата.

x	1	2	5	7	9	12
$f(x) = 2x$	2	4	10	14	18	24

Во претходниот пример величината x може да биде само позитивна. Но, ако ја разгледаме само формулата $f(x) = 2x$, тогаш x може да биде како било кој цел број, така и било која позитивна дробка (позитивен децимален број). На тој начин на секој цел број x му придружуваме точно одреден број $y = f(x)$. Тоа значи дека со $f(x) = 2x$ е дадена функција f во множеството цели броеви. Притоа велиме дека подредениот пар (x, y) ја задоволува функцијата $f(x) = 2x$. Оваа функција е пример на линеарна функција.

Да разгледаме уште еден пример.

Пример 2. Една такси компанија има ценовник според кој при почетокот на возењето патникот плаќа 5 евра, а понатаму за секој изминат километар доплаќа по 3 евра. Колку евра чени возење за: 1, 2, 5, 8, 12 и 24 километри.

Решение. Ако со x ги означиме поминатите километри, а со y цената за поминати x километри, тогаш:

- за $x = 1 \text{ km}$ имаме $y = 3 \cdot 1 + 5 = 8$ евра,
- за $x = 2 \text{ km}$ имаме $y = 3 \cdot 2 + 5 = 11$ евра,
- за $x = 3 \text{ km}$ имаме $y = 3 \cdot 3 + 5 = 14$ евра.

Воочуваме дека во случајот цената за возење y во зависност од поминатите километри x е дадена со функцијата $y = 3x + 5$

Сега лесно можеме да ја пресметаме цената за возење за секој од дадените километри. Пресметките се дадени во табелата.

x	1	2	5	8	12	24
$y = 3x + 5$	8	11	20	29	41	77

Аналогно како претходно заклучуваме дека со $y = 3x + 5$ е дадена функција во множеството цели броеви и истата е уште еден пример на линеарна функција. Така ја имаме следнава дефиниција.

Функцијата f што е зададена со формулата $f(x) = kx + n$, каде k и n се било кои цели броеви, ја нарекуваме *линеарна функција*. Бројот k го нарекуваме коефициентот пред аргументот x , а n го нарекуваме слободен член.

Пример 3. Провери кои од подредените парови: $(-2, 1)$, $(-4, 2)$, $(0, 5)$, $(2, 9)$, $(3, 10)$ ја задоволуваат функцијата $y = 2x + 5$.

Решение. Во дадената функција променливите ги заменуваме со вредностите на подредениот пар за кој проверуваме дали ја задоволува функцијата. Притоа, ако добиеме точно равенство заклучуваме дека подредениот пар ја задоволува функцијата, а во спротивно тој не ја задоволува функцијата.

Во нашиот случај добиваме:

$2 \cdot (-2) + 5 = 1$, па затоа парот $(-2, 1)$ ја задоволува дадената функција,

$2 \cdot (-4) + 5 = -3 \neq 2$, па затоа парот $(-4, 2)$ не ја задоволува дадената функција,

$2 \cdot 0 + 5 = 5$, па затоа парот $(0, 5)$ ја задоволува дадената функција,

$2 \cdot 2 + 5 = 9$, па затоа парот $(2, 9)$ ја задоволува дадената функција, и

$2 \cdot 3 + 5 = 11 \neq 10$, па затоа парот $(3, 10)$ не ја задоволува дадената функција.

Пример 4. Дадена е функцијата $y = -3x + 1$. Пополни ја табелата со вредностите кои недостасуваат:

x	-3		-1		9	11		15
$y = -3x + 1$		7		1			-35	

Решение. За $x = -3$ добиваме $y(-3) = -3 \cdot (-3) + 1 = 10$. Понатаму, за $y = 7$ имаме $7 = -3x + 1$, од каде добиваме $x = -2$. Продолжувајќи на истиот начин добиваме:

x	-3	-2	-1	0	9	11	12	15
$y = -3x + 1$	10	7	4	1	-26	-32	-35	-44

Задачи за вежби

54. Провери кои од подредените парови: $(-2, -7)$, $(-4, -10)$, $(0, 3)$, $(2, 1)$, $(3, 3)$, $(5, 7)$ ја задоволуваат функцијата $y = 2x - 3$.

55. Провери кои од подредените парови: $(-2, -12)$, $(-1, -10)$, $(0, -4)$, $(2, 7)$, $(1, 4)$ ја задоволуваат функцијата $y = 6x - 4$.

56. Провери кои од подредените парови: $(-4, -1)$, $(-2, -1)$, $(0, -5)$, $(3, 0)$, $(7, 19)$ ја задоволуваат функцијата $y = -2x - 5$.

57. Дадена е функцијата $y = -2x - 6$. Пополни ја табелата со вредностите кои недостасуваат:

x	-2		0			4	7
$y = 2x - 6$		-8		-4	0		

58. Дадена е функцијата $y = 4x - 5$. Пополни ја табелата со вредностите кои недостасуваат:

x		4		9		11	14
$y = 4x - 5$	7		27		35		

59. Дадена е функцијата $y = 3x - 2$. Пополни ја табелата со вредностите кои недостасуваат:

x		0		7			12
$y = 3x - 2$	-8		13		22	28	

3.12 График на линеарна функција

Во претходната лекција се потсетивме дека правопропорционалноста е функција од видот $y = kx$, $k \neq 0$, т.е. дека таа е линеарна функција. Понатаму, кога учевме за правопропорционалноста, на пример, видовме дека ако $y = 150x$, тогаш при графичкото прикажување точките (x, y) се наоѓаат на една права.

Во општ случај може да се докаже дека графикот на линеарната функција е права. Оттука, бидејќи права е определена со две точки заклучуваме дека за да го нацртаме графикот на линеарната функција $y = kx + n$, доволно е

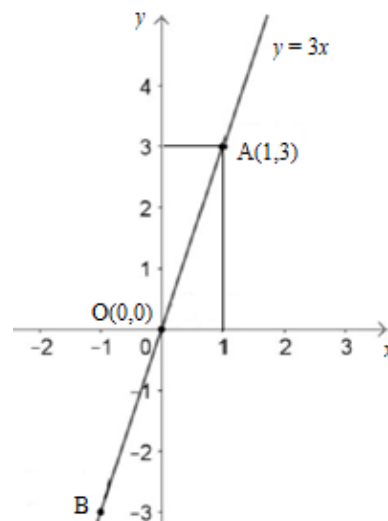
- да најдеме два подредени пара (x_1, y_1) и (x_2, y_2) кои ја задоволуваат функцијата $y = kx + n$,
- графички да ги прикажеме точките $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, и
- да ја повлечеме правата AB која е графикот на функцијата $y = kx + n$.

Всушност, бидејќи работиме во множеството цели броеви графикот на функцијата ќе бидат точките од видот $(x, kx + n)$, $x \in \mathbb{Z}$, а не целата права.

Пример 1. Нацртај го графикот на функцијата $y = 3x$.

Решение. Земаме $x = 0$ и добиваме $y = 3 \cdot 0 = 0$, што значи дека една точка која припаѓа на правата која треба да ја нацртаме е координатниот почеток $O(0, 0)$. Понатаму, за $x = 1$ добиваме $y = 3 \cdot 1 = 3$, па затоа правата минува низ точката $A(1, 3)$.

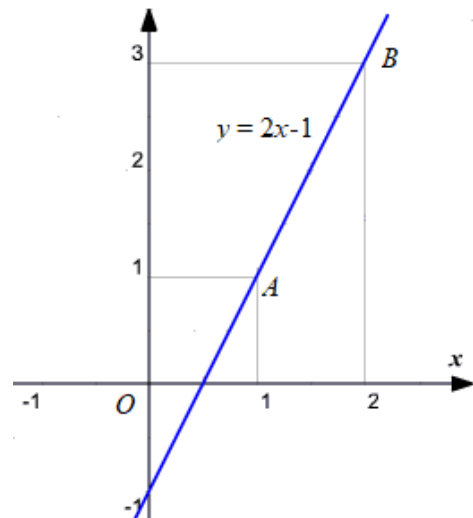
Во координатниот систем ги цртаме точките $O(0, 0)$ и $A(1, 3)$, а потоа ја повлекуваме правата OA , која е бараната права.



Пример 2. Нацртај го графикот на функцијата $y = 2x - 1$.

Решение. Земаме $x = 1$ и добиваме $y = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, што значи дека една точка која припаѓа на правата која треба да ја нацртаме е точката $A(1, 1)$. Понатаму, за $x = 2$ добиваме $y = 2 \cdot 2 - 1 = 5$, па затоа правата минува низ точката $B(2, 5)$.

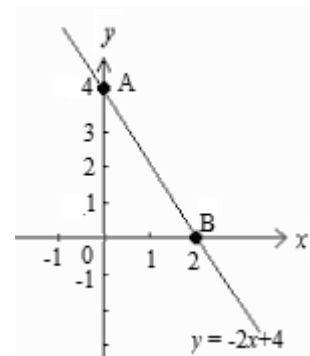
Во координатниот систем ги цртаме точките $A(1, 1)$ и $B(2, 5)$, а потоа ја повлекуваме правата AB , која е бараната права.



Пример 3. Нацртај го графикот на функцијата $y = -2x + 4$.

Решение. Земаме $x = 0$ и добиваме $y = -2 \cdot 0 + 4 = 4$, што значи дека една точка која припаѓа на правата која треба да ја нацртаме е точката $A(0, 4)$. Понатаму, за $x = 2$ добиваме $y = -2 \cdot 2 + 4 = 0$, па затоа правата минува низ точката $B(2, 0)$.

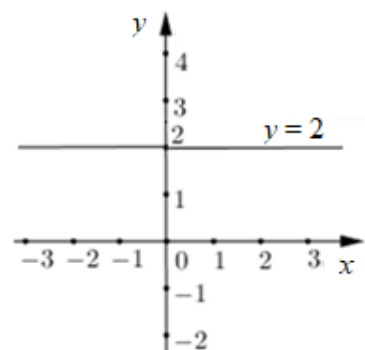
Во координатниот систем ги цртаме точките $A(0, 4)$ и $B(2, 0)$, а потоа ја повлекуваме правата AB , која е бараната права.



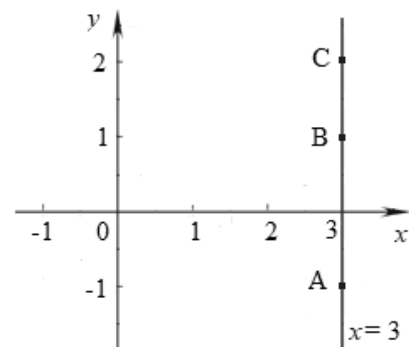
Пример 4. Нацртај го графикот на функцијата $y = 2$.

Решение. Во оваа функција имаме $k = 0$, односно $y = 0 \cdot x + 2$. Значи, ако за променливата x ставиме било кој број, тогаш секогаш добиваме $y = 2$. Тоа значи дека графикот на функцијата е права која минува низ точката $(0, 2)$ и е паралелна со x -оската.

Графикот на оваа функција е прикажан на цртежот десно.



Пример 5. Во координатен систем да ги нацртаме точките $A(3, -1)$, $B(3, 1)$, $C(3, 1)$. Како што можеме да видиме овие точки лежат на правата која е нормална на x -оската. Сите точки кои лежат на оваа права имаат прва координата $x = 3$, а втората координата е било кој број. Последното значи дека $x = 3$ е равенка на права која е паралелна со y -оската и x -оската ја сече во точката $A(3, 0)$.



Задачи за вежби

60. Нацртај го графикот на функцијата:

- а) $y = x + 1$, б) $y = 2x$, в) $y = 3x + 1$,
г) $y = -x + 1$, д) $y = -2x - 1$, е) $y = -x - 1$.

61. Нацртај го графикот на функцијата:

- а) $y = -1$, б) $y = 3$, в) $y = -2$.

62. Запиши ги равенките на правите кои минуваат низ точките:

- а) $(-1, 12)$ и $(-1, -1)$, б) $(3, 2)$ и $(3, 3)$, в) $(-5, 2)$ и $(-5, 6)$,

63. Запиши ги равенките на правите кои минуваат низ точките:

- а) $(1, 4)$ и $(-4, 4)$, б) $(-3, 2)$ и $(3, 2)$, в) $(-5, -5)$ и $(5, -5)$,

Провери го своето знаење 7

1. Пресметај ја вредноста бројниот израз:

- а) $12 \cdot 4 + 23 \cdot 2 + 13 \cdot 3$, б) $25 + 72 : (72 - 9 \cdot 7) - (4 \cdot 2 - 6) \cdot 5 + 11$.

2. Определи го множеството вредности на изразот $x(x-2)$ ако $x \in \{0, 1, 2, -1\}$.

3. Покажи дека изразите $A(x) = 2x - 6$, $B(x) = 2(x - 3)$, каде што $x \in \{-3, -1, 1, 3\}$ се идентични.

4. Упрости го изразот:

- а) $3x - 5 + 2x + 3 - 6x$, б) $13x - 5y + 2 \cdot (2x + 3y) + 3 - 6x - 2y$.

5. За организирање на роденден изнајмувањето на игротека чини 2800 денари, а за секое дете се доплаќа по 400 денари. Најди формула со која Ефтимија ќе пресметува кулку треба да плати ако поканува x гости.

6. Која од следниве равенки е идентитет, а која е противречна:

- а) $7 + 3x = x + 1$, $x \in \mathbb{N}$, б) $2 + 4x = 4x + 2$, $x \in \mathbb{Z}$

7. Решај ја равенката:

- а) $2x = 4x - 4$, б) $2x + 8 = 6x - 2(x + 4)$.

8. Африм поделил неколку јаболка на четири еднакви купчиња. Борис истиот број јаболка го поделил на пет еднакви купчиња. Борис забележал дека секое од неговите купчиња има по три јаболка помалку од секое од купчињата на Африм. Колку јаболка имал Африм?

9. а) Запиши ги првите шест члена на низата $a_n = 3n - 5$, $n \in \mathbb{N}$.

- б) За низата 2, 7, 12, 17, ... откриј како се добива секој следен член и запиши ги следните три члена на низата.

10. Провери кои од подредените парови: $(-4, -3)$, $(-2, -1)$, $(0, -5)$, $(3, 3)$, $(7, -19)$ ја задоволуваат функцијата $y = -2x - 5$.

11. Нацртај го графикот на функцијата:

- а) $y = 3x - 1$, б) $y = -3$.

4 МЕРЕЊЕ

- 4.1 Мерки за должина, маса и зафатнина
- 4.2 Мерки за време
- 4.3 Периметар на триаголник и паралелограм
- 4.4 Периметар на трапез и делтоид
- 4.5 Плоштина на квадрат, правоаголник и правоаголен триаголник
- 4.6 Врски меѓу мерните единици за плоштина
- 4.7 Плоштина на 2Д форми составени од квадрати, правоаголници и правоаголни триаголници
- 4.8 Волумен на квадар и коцка
- 4.9 Врски меѓу мерните единици за волумен
- 4.10 Плоштина на коцка и квадар

Во претходните одделенија се запозна со мерките за должина, маса, зафатнина, време и плоштина. Исто така научи да пресметуваш периметар на триаголник, квадрат и правоаголник, како и плоштина на квадрат и правоаголник. Со усвојување на содржините од оваа тема ќе ги прошириш своите знаења и ќе можеш:

- да ги користиш мерните единици за мерење на должина, маса, зафатнина и време,
- да ги претвораш една во друга мерните единици за должина, маса, зафатнина и време користејќи ги односите меѓу мерните единици,
- да решаваш проблеми поврзани со мерните единици за време,
- да толкуваш распоред и да пресметуваш временски интервали,
- да пресметуваш периметар на триаголник, квадрат, ромб, правоаголник, паралелограм, трапез, трапезоид и делтоид,
- да ги користиш мерните единици за плоштина,
- да ги претвораш една во друга мерните единици за плоштина користејќи ги односите меѓу мерните единици,
- да пресметуваш плоштина на квадрат, правоаголник и правоаголен триаголник,
- да пресметуваш плоштина на сложени 2Д форми составени квадрат, правоаголник и правоаголен триаголник,
- да ги изведуваш и применуваш формулите за волумен на коцка и квадар,
- да ги користиш мерните единици за волумен,
- да ги претвораш една во друга мерните единици за волумен користејќи ги односите меѓу мерните единици,
- да пресметуваш плоштина на коцка и квадар користејќи ги нивните мрежи,
- да ги користиш мерните единици за проценка на должина, плоштина, зафатнина итн.

4.1 Мерки за должина, маса и зафатнина

Во претходните одделенија научи за мерењето на должина и знаеш дека основна мерна единица за должина е *метар* (m). Исто така, знаеш дека од метарот помали мерни единици за должина се: *дециметар* (dm), *сантиметар* (cm) и *милиметар* (mm), а поголеми мерни единици за должина од метарот се: *декаметар* (dam), *хектометар* (hm) и *километар* (km). Во следната табела е дадено изразувањето на наведените мерни единици со помош на основната мерна единица, т.е. со помош на метарот.

име на мерната единица за должина	ознака на мерната единица	изразување на мерната единица со основната мерна единица
километар	km	$1 km = 1000 m$
хектометар	hm	$1 hm = 100 m$
декаметар	dam	$1 dam = 10 m$
метар	m	$1 m$ - основна единица
дециметар	dm	$1 dm = \frac{1}{10} m = 0,1 m$
сантиметар	cm	$1 cm = \frac{1}{100} m = 0,01 m$
милиметар	mm	$1 mm = \frac{1}{1000} m = 0,001 m$

Како што можеме да видиме секоја мерна единица за должина е 10 пати помала од мерната единица која што е непосредно поголема од неа. Со други зборови за наведените мерни единици точни се следниве равенства:

$$1 km = 10 hm = 100 dam = 1000 m,$$

$$1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm,$$

$$1 hm = 10 dam = 100 m,$$

$$1 dm = 10 cm = 100 mm,$$

$$1 dam = 10 m,$$

$$1 cm = 10 mm.$$

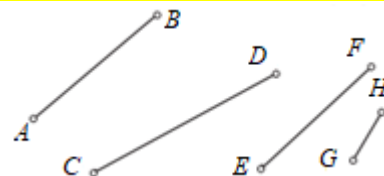
Пример 1. Колку декаметри има во: а) $60 m$,

б) $220 m$.

Решение. а) Бидејќи $1 dam = 10 m$, од $60 = 6 \cdot 10$ добиваме дека во $60 m$ има $6 dam$.

б) Бидејќи $1 dam = 10 m$, од $220 = 22 \cdot 10$ добиваме дека во $220 m$ има $22 dam$.

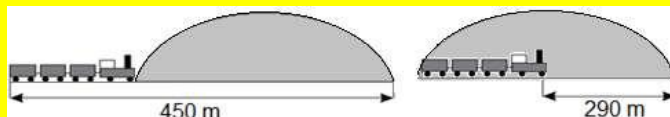
Пример 2. Прогени ги должините на отсечките AB , CD , EF , GH , а потоа со мерење провери ја точноста на твојата проценка.



Од биологија знаеш дека во природата постојат микроорганизми наречени бактерии, кои можат да се видат само под микроскоп. Бактериите се многу мали, меѓутоа од најразлични причини имаме потреба истите да ги мериме. За мерење на бактериите, но и за други честички кои може да се видат само под микроскоп, се користи мерната единица *микрометар* или *микрон*. *Микромот* е еднаков на илјадити дел од милиметарот и за него-

во означување ја користиме ознаката μm . Според тоа, $1 m = 1000 mm = 1000000 \mu m$, т.е. микрометрот е милионити дел од метарот.

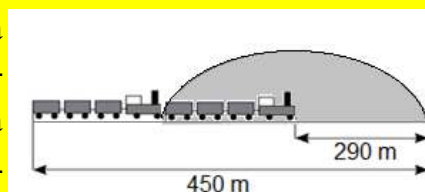
Пример 3. Според податоците дадени на долните цртежи определи ја должината на возот.



Решение. Прв начин. Нека должината на возот ја означиме со x . Од десниот цртеж заклучуваме дека должината на мостот е еднаква на $x + 290$. Понатаму, од левиот цртеж следува дека збирот на должините на возот и мостот е $450 m$, па така ја добиваме равенката $x + x + 290 = 450$, од каде следува $2x + 290 = 450$, односно $x = 80 m$.

Значи, должината на возот е еднаква на $80 m$.

Втор начин. Од дадените цртежи следува дека кога на две должини на возот ќе им се додадат $290 m$ се добиваат $450 m$ (види цртеж). Според тоа, две должини на возот се еднакви на $450 - 290 = 160 m$, па затоа должината на возот е еднаква на $160 : 2 = 80 m$.



Покрај да мериш должини, ти знаеш да мериш и маси. Сигурно се сеќаваш дека основната единица за мерење маса е **килограм** (kg). Понатаму, помали единици за мерење маса се **хектограм** (hg), **декаграм** (dag), **грам** (g), **дециграм** (dg), **центиграм** (cg) и **милиграм** (mg), а дека **толот** (t) е поголема единица за маса.

Во следната табела е дадено изразувањето на наведените мерни единици со помош на основната мерна единица, т.е. со помош на килограмот.

име на мерната единица за маса	ознака на мерната единица	изразување на мерната единица со основната мерна единица
тон	t	$1 t = 1000 kg$
килограм	kg	$1 kg$ - основна единица
хектограм	hg	$1 hg = \frac{1}{10} kg = 0,1 kg$
декаграм	dag	$1 dag = \frac{1}{100} kg = 0,01 kg$
грам	g	$1 g = \frac{1}{1000} kg = 0,001 kg$
дециграм	dg	$1 dg = \frac{1}{10000} kg = 0,0001 kg$
центиграм	cg	$1 cg = \frac{1}{100000} kg = 0,00001 kg$
милиграм	mg	$1 mg = \frac{1}{1000000} kg = 0,000001 kg$

Како и кај мерните единици за должина, секоја мерна единица за маса е 10 пати помала од мерната единица која што е непосредно поголема од неа. Со други зборови за наведените мерни единици точни се следниве равенства:

$$1\text{ kg} = 10\text{ hg} = 100\text{ dag} = 1000\text{ g}, \quad 1\text{ g} = 10\text{ dg} = 100\text{ cg} = 1000\text{ mg},$$

$$1\text{ hg} = 10\text{ dag} = 100\text{ g},$$

$$1\text{ dg} = 10\text{ cg} = 100\text{ mg},$$

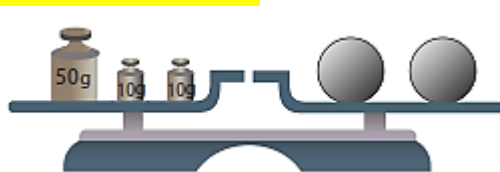
$$1\text{ dag} = 10\text{ g},$$

$$1\text{ cg} = 10\text{ mg}.$$

Пример 4. а) На вагата која е прикажана на цртежот имаме три јапонски јаболка. Како што можеме да видиме меѓу 0 и 1 имаме пет поделци, што значи дека секој поделок означува $1000 : 5 = 200\text{ g}$. Стрелката на вагата покажува 4 поделци, што значи дека јаболката имаат маса $4 \cdot 200 = 800\text{ g}$.



б) Вагата на цртежот е во рамнотежа. На едниот тас имаме три тегови со вкупна маса $50 + 10 + 10 = 70\text{ g}$, а на другиот тас имаме две топки. Значи, масата на двете топки е еднаква на 70 g .



Покрај мерките за должина и маса, во секојдневниот живот најчесто се среќаваме со мерките за време и зафатнина (течност). Сигурно се сеќаваш дека основна мерна единица за течност е *литар* (*l*). Како и кај единиците за должина и овде имаме помали мерни единици за течност и тоа: *децилитар* (*dl*), *центилитар* (*cl*) и *милилитар* (*ml*), како и поголеми мерни единици за течност од литарот: *декалитар* (*dal*), *хектолитар* (*hl*) и *килолитар* (*kl*). Во следната табела е дадено изразувањето на наведените мерни единици со помош на основната мерна единица, т.е. со помош на литарот.

име на мерната единица за течност	ознака на мерната единица	изразување на мерната единица со основната мерна единица
килолитар	<i>kl</i>	$1\text{ kl} = 1000\text{ l}$
хектолитар	<i>hl</i>	$1\text{ hl} = 100\text{ l}$
декалитар	<i>dal</i>	$1\text{ dal} = 10\text{ l}$
литар	<i>l</i>	1 l - основна единица
децилитар	<i>dl</i>	$1\text{ dl} = \frac{1}{10}\text{ l} = 0,1\text{ l}$
сантитар	<i>cl</i>	$1\text{ cl} = \frac{1}{100}\text{ l} = 0,01\text{ l}$
милилитар	<i>ml</i>	$1\text{ ml} = \frac{1}{1000}\text{ l} = 0,001\text{ l}$

Како што можеме да видиме секоја мерна единица за течност е 10 пати помала од мерната единица која што е непосредно поголема од неа. Со други зборови за наведените мерни единици точни се следниве равенства:

$$1\text{ kl} = 10\text{ hl} = 100\text{ dal} = 1000\text{ l},$$

$$1\text{ l} = 10\text{ dl} = 100\text{ cl} = 1000\text{ ml},$$

$$1\text{ hl} = 10\text{ dal} = 100\text{ l},$$

$$1\text{ dl} = 10\text{ cl} = 100\text{ ml},$$

$$1\text{ dal} = 10\text{ l},$$

$$1\text{ cl} = 10\text{ ml}.$$

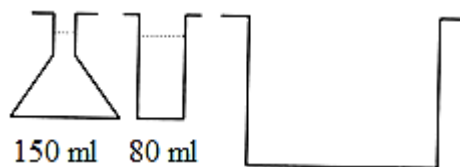
Пример 5. Со помош на садови од 150 ml и 80 ml во третиот сад тури точно:

- а) 600 ml , б) 10 ml , в) 520 ml .

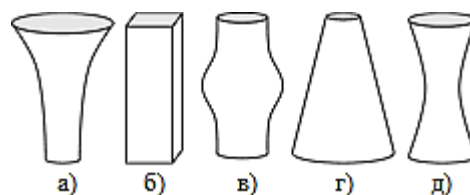
Решение. а) Од $600 = 4 \cdot 150$ следува дека во големиот сад треба четири пати да се тури од наполнетиот сад од 150 ml .

б) Од $10 = 2 \cdot 80 - 150$ следува дека во големиот сад треба два пати да се тури наполнетиот сад од 80 ml , а потоа да се одлеат 150 ml .

в) Од $520 = 4 \cdot 150 - 80$ следува дека во големиот сад треба да се тури четири пати наполнет садот од 150 ml , а потоа да се одлеат 80 ml .

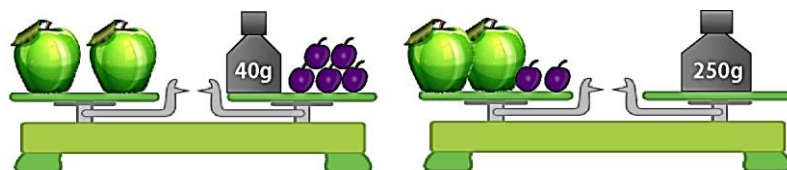


Секоја од петте вазни има иста висина и секоја од нив има волумен од 1 литар. Во секоја вазна се тура половина литар вода. Во која вазна ќе биде највисоко нивото на водата? Направи проценка. Што мислиш, дали можеш да дадеш одговор кој ќе биде сигурно точен, а не само проценка?



Задачи за вежби

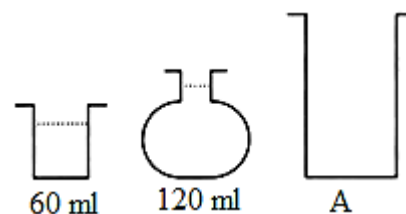
- Без да мериш нацртај отсечки со должини 6 cm , 12 cm , 18 cm и 25 cm . Потоа измери ги отсечките и утврди колку си згрешил?
- Подреди ги отсечките со должини 6 dm , 48 cm , 87 mm и $1,2\text{ mm}$ по големина, почнувајќи од најголемата.
- Подреди ги масите по големина почнувајќи од најмалата: 7 kg , 95 hg , 87 dag и $0,002\text{ t}$.
- Подреди ги од најмала до најголема зафатнина: 6 hl , 12 dal , 180 l и $0,2\text{ kl}$.
- На двата цртежи долу вагата е во рамнотежа. Сите сливи имаат еднакви маси и сите јаболки имаат еднакви маси. Колку е масата на една слива, а колку на едно јаболко?



6. Со помош на садови од 170 ml и 60 ml во садот

А тури точно:

- а) 510 ml , б) 10 ml ,
в) 610 ml , г) 270 ml ,
течност.



7. Растојанието меѓу Велес и Солун е 240 km . Климент тргнал од Велес за Солун и поминал $\frac{1}{5}$ од патот и уште 13 km . Уште колку километри треба да помине Климент за да стигне во Солун?

4.2 Мерки за време

Пример 1. Екрем со автобус од Дебар за Скопје патувал 3 часа. Кога стигнал во Скопје погледнал во часовникот, на кој пишувало 08:45. Во колку часот Екрем тргнал од Дебар? Што покажувал тогаш неговиот часовник?



Решение. Како што знаеме, ако на дигиталниот часовник пишува 08:45, тоа значи дека е 8 часот и 45 минути. Бидејќи Екрем патувал 3 часа, тој од Дебар тргнал во 5 часот и 45 минути. Неговиот часовник покажувал 05:45.

Ова е само еден пример кој покажува колку е важно мерењето на времето. Да се потсетиме: основна мерна единица за време е *секунда* (s). Поголеми единици од секунда се: *минута* (min), *час* (h), *ден*, *седмица*, *месец*, *година*, *деценија*, *век* (*столетие*) и *милениум*. Постојат и помали мерни единици за време.

име на мерната единица за време	ознака за мерната единица	изразување на мерната единица со основната мерна единица
секунда	s	1 s
минута	min	$1\text{ min} = 60\text{ s}$
час	h	$1\text{ h} = 60\text{ min} = 3600\text{ s}$
ден	ден	$1\text{ ден} = 24\text{ h} = 86400\text{ s}$
седмица	седмица	$1\text{ седмица} = 7\text{ дена} = 604800\text{ s}$

Како што гледаме во табелата мерните единици месец, година, деценија, век и милениум не се изразени преку основната мерна единица, т.е. преку секунди. Причина за тоа е, како што знаеме, фактот дека месеците се со различно времетраење, а исто така и годината во зависност од тоа дали е престапна или не е престапна. Јасно, ова важи и за деценијата која трае 10 години. Меѓутоа, со векот кој трае 100 години и милениумот кој трае 1000 години тоа не е случај. Имено, во 100 години имаме 75 обични и 25 престапни години, па



може да се пресмета дека 1 век има 3.155.760.000 s, а 1 милениум има десет пати повеќе секунди, т.е. има 31.557.600.000 s

Во пример 1 видовме дека за мерење на времето користиме дигитален часовник кој покажува од 00:00 до 24:00. Исто така, користиме и обичен часовник, кој во текот на еден ден мери два пати по 12 часа.

Пример 2. На еден семафор зеленото светло трае 45 секунди, жолтото 4 секунди и црвеното 50 секунди. Меѓу црвено и зелено, односно зелено и црвено светло секогаш се пали жолто светло. Колку минути и колку секунди поминуваат од како прв пат ќе се запали зеленото па додека трет пат се угаси црвеното светло?

Решение. Треба да се најде колку време трае зелено, жолто, црвено, жолто, зелено, жолто, црвено, жолто, зелено, жолто и црвено. Значи, треба да се најде збирот

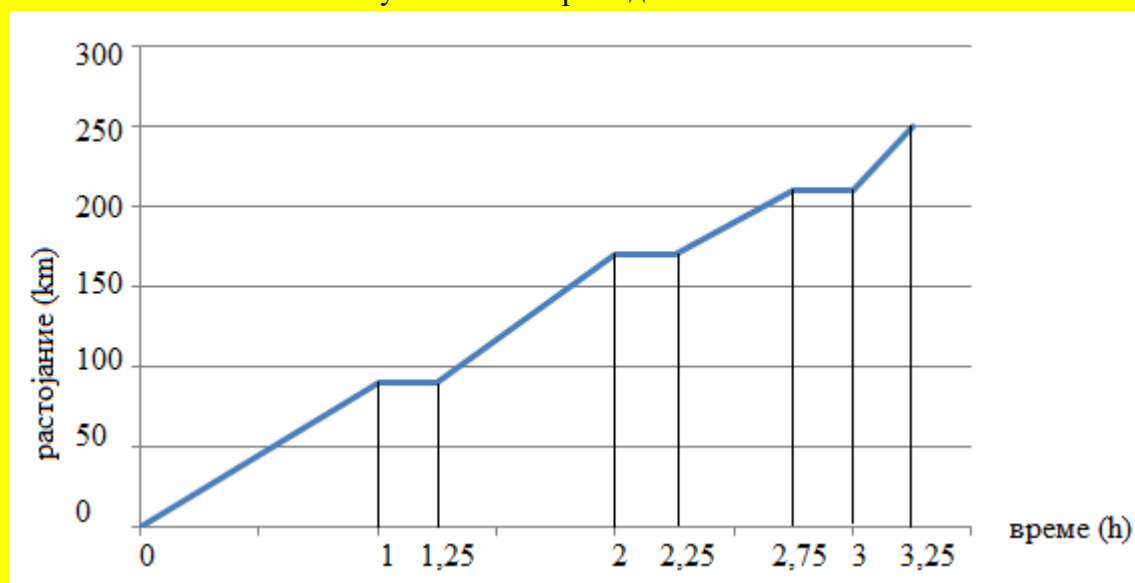
$$45 + 4 + 50 + 4 + 45 + 4 + 50 + 4 + 45 + 4 + 50 = 45 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 50 \cdot 3 = 305.$$

Според тоа, бараното време е 5 минути и 5 секунди.

Пример 3. Дигиталниот часовник покажува 05:21. Колку време треба да помине за да часовникот покаже време кое се добива ако часовникот се сврти наопаку?

Решение. Дигиталниот часовник покажува 05:21, а ако го завртиме наопаку ќе покажува 12:50. До пладне треба да поминат 6 часа и 39 минути, така да до новото време треба да поминат 7 часа 29 минути.

Пример 4. Арлинда патувала со автомобил од Скопје за Охрид, преку Битола. Таа за своето патување составила графикон на кој во зависност од времето го претставила изминатиот пат. Опиши го патувањето на Арлинда!



Решение. Од графиконот можеме да видиме дека времетраењето на патувањето на Арлинда е $3,25 \text{ h} = 3 \text{ h } 0,25 \cdot 60 \text{ min} = 3 \text{ h } 15 \text{ min}$. Во текот на патувањето таа поминала вкупно 250 km. Бидејќи кога во определен временски интервал нема промена на изминатиот

пат, тогаш автомобилот не се движи, заклучуваме дека во текот на патувањето Арлинда направила три паузи при што:

- првата пауза траела: $1,25 - 1 = 0,25 \text{ h} = 0,25 \cdot 60 = 15 \text{ min}$,
- втората пауза траела: $2,25 - 2 = 0,25 \text{ h} = 0,25 \cdot 60 = 15 \text{ min}$, и
- третата пауза траела: $3,25 - 3 = 0,25 \text{ h} = 0,25 \cdot 60 = 15 \text{ min}$.

Според тоа, паузите вкупно траеле $3 \cdot 15 = 45 \text{ min}$, а

$$3 \text{ h } 15 \text{ min} - 45 \text{ min} = 2 \text{ h } 75 \text{ min} - 45 \text{ min} = 2 \text{ h } 30 \text{ min} = 2,5 \text{ h}$$

Арлинда поминала во движење.

Пример 5. Ламбе, Рампо и Горазд во текот на два часа се обидуваат да поместат еден голем сандак. Ламбе 10 минути турка лево, 10 минути турка право, 10 минути турка десно, 10 минути турка назад, па 10 минути – лево итн. Рампо 15 минути турка право, 15 минути турка десно, 15 минути турка напред, 15 минути турка право итн. Горазд 20 минути турка напред, 20 минути турка десно, 20 минути турка лево, 20 минути – напред итн. Сандакот се поместува само кога сите тројца туркаат во една иста насока. Колку минути во текот на двата часа сандакот се поместувал во некоја насока?

Решение. На долниот цртеж е даден дијаграм како туркале Ламбе, Рампо и Горазд во текот на двата часа. Притоа секое квадратче означува 5 минути, а сандакот се движел во екоја насока кога едно под друго се наоѓаат квадратчиња обоени со иста боја.



Забележуваме дека само за три квадратчиња од првиот ред квадратчињата под нив се обоени со иста боја. Значи, сандакот се движел во некоја насока 15 минути и тоа: 10 минути десно и 5 минути назад.

Пример 6. Два часовника, еден златен, а другиот сребрен, биле навиени на пладне на 2 ноември 2025 година и покажувале точно време. Златниот часовник оди побрзо половина минута на час, а сребрениот часовник работи точно. Кој ден и во колку часот двата часовника повторно за прв пат ќе покажуваат точно време?

Решение. Двата часовника повторно ќе покажуваат исто време кога златниот часовник кој оди побрзо ќе го „стаса“ сребрениот часовник, што значи кога за прв пат ќе заврти полн круг повеќе. Значи, златниот часовник треба да помине повеќе 12 часа. Бидејќи во 12 часа има $60 \cdot 12 = 720$ минути, а златниот часовник оди побрзо половина минута на час, за да тој отиде понапред 12 часа му се потребни $720 \cdot 2 = 1440$ часови, што значи $1440 : 24 = 60$ денови. Значи, двата часовника прв пат повторно ќе покажуваат точно време на 1 јануари 2026 година.

Задачи за вежби

8. Воз, според возниот ред, треба да пристигне во $13\text{ h }55\text{ min}$. Ако доцни $1\text{ h }15\text{ min}$, во колку часот ќе стигне?
9. Дигитален часовник покажува $20:16$. Кое време ќе го покажува по 9 часа и 56 минути.
10. Сестрите Елена и Милка сега соодветно имаат 15 и 17 години. По осум години нивната мајка ќе има толку години колку што двете сестри ќе имаат заедно. Колку години има сега нивната мајка?
11. Училишната програма по повод патрониот празник требало да трае $1\text{ h }25\text{ min}$. Програмата траела 120 минути. Колку време повеќе траела изведбата од планираното?
12. Гаврил во просек $\frac{1}{3}$ од денот спие, $\frac{1}{4}$ од денот го поминува во училиште, $\frac{1}{10}$ од денот пишува домашни задачи и учи дома, а преостанатото време од денот го поминува во игра, спорт и посетува курс по англиски јазик. Колку време на Гаврил му преостанува за играње и другите активности?

4.3 Периметар на триаголник и паралелограм

Веќе знаеш да пресметуваш периметар на триаголник, квадрат и правоаголник. Сигурно заклучи дека периметарот се дефинира на следниов начин.

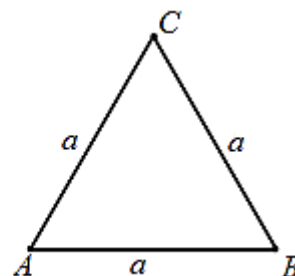
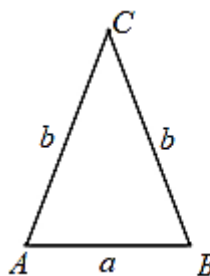
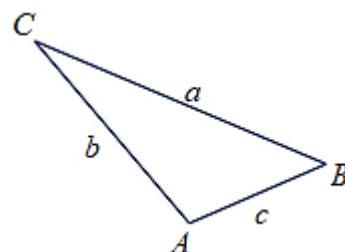
Збирот на должините на страните на еден многуаголник се вика **периметар** на многуаголникот и се означува со L .

Во претходните одделенија пресметуваше периметар на триаголник, па лесно можеш да согледаш дека е точно следново тврдење.

Периметарот на разностран триаголник ABC со страни a, b, c се пресметува според формулата $L = a + b + c$.

Периметарот на рамнокрак триаголник ABC со основа a и крак b , се пресметува според формулата $L = a + 2b$.

Периметарот на рамностран триаголник ABC со страна a , се пресметува според формулата $L = 3a$.



Пример 1. а) Пресметај го периметарот на триаголникот со страни $a = 1\text{ dm}$, $b = 12\text{ cm}$ и $c = 9\text{ cm}$.

б) Нека е даден рамнокрак триаголник со периметар $L = 28 \text{ cm}$. Ако должината на основата е $a = 12 \text{ cm}$, пресметај ја должината на кракот на овој триаголник.

в) Определи ја страната на рамностран триаголник со периметар 42 cm .

Решение. а) Периметарот на триаголникот е:

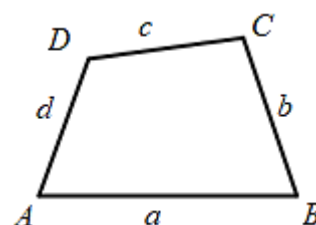
$$L = a + b + c = 1 \text{ dm} + 12 \text{ cm} + 9 \text{ cm} = 10 \text{ cm} + 12 \text{ cm} + 9 \text{ cm} = 31 \text{ cm}.$$

б) Од формулата $L = a + 2b$ следува $2b = L - a$, од каде добиваме $b = \frac{1}{2}(L - a)$. Ако замениме во последната формула, добиваме $b = \frac{1}{2}(28 - 12) = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8 \text{ cm}$.

в) Од формулата $L = 3a$ за периметар на рамностран триаголник следува $a = \frac{1}{3}L$, па затоа должината на страната на рамностранот триаголник е $a = \frac{1}{3} \cdot 42 = 14 \text{ cm}$.

Од дефиниција на периметар следува точноста на следното тврдење.

Периметарот на четириаголник $ABCD$ со страни a, b, c, d се пресметува со формулата $L = a + b + c + d$.



Пример 2. Пресметај го периметарот на четириаголникот $ABCD$ со страни $a = 13 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$, $c = 8 \text{ cm}$ и $d = 7 \text{ cm}$.

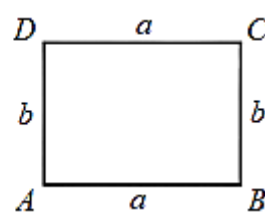
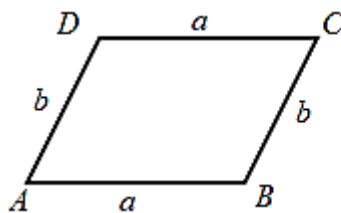
Решение. Со замена во формулата $L = a + b + c + d$ добиваме

$$L = 13 + 12 + 8 + 7 = 40 \text{ cm}.$$

Да се потсетиме! Спротивните страни кај паралелограмот се еднакви, а правоаголникот е паралелограм со прави агли. Ако a, b се должините на страните на паралелограмот (правоаголникот), тогаш

$$L = a + b + a + b = 2a + 2b = 2(a + b).$$

Значи, точно е следново тврдење.



Периметарот на паралелограм (правоаголник) $ABCD$ со страни a, b се пресметува со формулата $L = 2(a + b)$.

Пример 3. а) Пресметај го периметарот на паралелограмот со страни $a = 31 \text{ cm}$, $b = 13 \text{ cm}$.

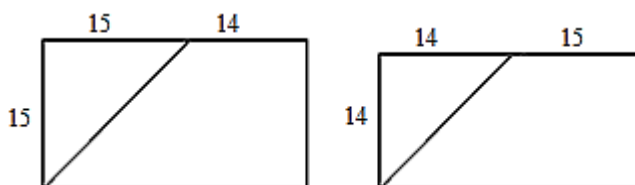
б) Периметарот на еден правоаголник е $78,8 \text{ cm}$. Едната страна му е 20 cm . Колкави се другите страни.

в) Во правоаголник е повлечена симетралата на еден од неговите агли, која што ја дели страната на отсечки 15 cm и 14 cm . Определи го периметарот на правоаголникот.

Решение. а) За периметарот на паралелограмот добиваме $L = 2(31+13) = 88 \text{ cm}$.

б) Бидејќи едната страна на правоаголникот е 20 cm , заклучуваме дека и страната која е спротивна на неа е 20 cm . Периметарот на правоаголникот е $L = 2a + 2b$, од каде добиваме $2b = L - 2a$, односно $b = \frac{L-2a}{2}$. Сега, ако $L = 78,8 \text{ cm}$ и $a = 20 \text{ cm}$, со замена во последната формула добиваме $b = \frac{78,8-2 \cdot 20}{2} = \frac{78,8-40}{2} = \frac{38,8}{2} = 19,4 \text{ cm}$. Значи, другите две страни се $19,4 \text{ cm}$.

в) Симетралата го дели правиот агол на два агли од по 45° , што значи дека таа правоаголникот го дели на рамнокрак правоаголен триаголник и трапез. Делбените отсечки на страната на правоаголникот може да се распоредени на два начина, како што е прикажано на цртежите.

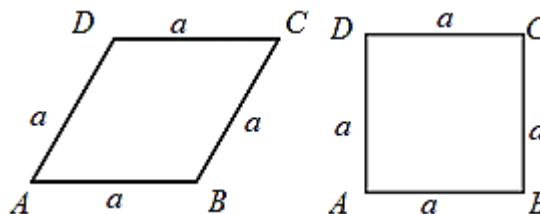


Во првиот случај должините на страните на правоаголникот се 29 cm и 15 cm , што значи дека периметарот е $L = 2(29+15) = 88 \text{ cm}$. Во вториот должините на страните на правоаголникот се 29 cm и 14 cm , што значи дека периметарот е $L = 2(29+14) = 86 \text{ cm}$.

Да се потсетиме! Ромб е паралелограм со еднакви страни, а квадрат е ромб со прави агли. Според тоа, ако a е должината на страната на ромбот (квадратот), тогаш

$$L = 2(a + a) = 4a.$$

Значи, точно е следното тврдење.



Периметарот на ромб (квадрат) $ABCD$ со страна a се пресметува со формулата $L = 4a$.

Пример 4. а) Пресметај го периметарот на ромб со страна $12,4 \text{ dm}$. Резултатот истражи го во сантиметри, дециметри и метри.

б) Периметарот на еден квадрат е $28,8 \text{ cm}$. Колкава е неговата страна?

Решение. а) За периметарот на ромбот добиваме

$$L = 4 \cdot 12,4 = 49,6 \text{ dm} = 496 \text{ cm} = 4,96 \text{ m}.$$

б) Имаме $L = 4a$, од каде добиваме $a = \frac{L}{4} = \frac{28,8}{4} = 7,2 \text{ cm}$.

Задачи за вежби

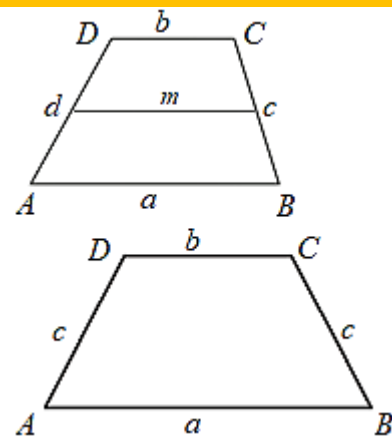
13. а) Пресметај го периметарот на триаголникот со страни $a = 1,3 \text{ dm}$, $b = 14 \text{ cm}$ и $c = 9 \text{ cm}$.

б) Определи ја страната на рамностран триаголник со периметар $41,4 \text{ cm}$.

- v) Во рамнокрак триаголник со периметар 29 cm должината на кракот е 12 cm . Колку е основата на овој триаголник.
14. Колку е периметарот на четириаголникот со страни 4 cm , 5 cm , 8 cm и 7 cm .
15. Периметарот на еден ромб е $48,8\text{ cm}$. Пресметај ја неговата страна.
16. Определи ги страните и периметарот на паралелограм, ако едната негова страна има 20 cm и е $\frac{2}{5}$ од неговиот периметар.
17. Едниот агол на ромбот е еднаков на 60° , а неговата помала дијагонала е $2,4\text{ dm}$. Колку метри е периметарот на ромбот?
18. Во правоаголник е повлечена симетралата на еден од неговите агли, која што ја дели страната на отсечки 18 cm и 11 cm . Колку е периметарот на правоаголникот?
19. Паралелограм со периметар 64 cm е поделен со една негова дијагонала на два триаголника. Секој од нив има периметар 44 cm . Пресметај ја должината на дијагоналата.

4.4 Периметар на траpez и делтоид

Да се потсетиме! Траpez е четириаголник кој има само еден пар паралелни страни. Паралелните страни (a и b) се викаат *основи* на траpezот, а другите две страни (c и d) се *краци* на траpezот. Отсечката m која што ги поврзува средините на краците на траpezот се нарекува *средна линија* траpezот и важи: таа е паралелна на основите на траpezот и $a + b = 2m$. Траpezот со еднакви краци се вика *рамнокрак траpez*. Точно е следново тврдење.



Периметарот на траpez $ABCD$ со основи a, b и краци c, d се пресметува со формулата $L = a + b + c + d = 2m + c + d$.

Периметарот на рамнокрак траpez $ABCD$ со основи a, b и крак c се пресметува со формулата $L = a + b + 2c = 2(m + c)$.

Пример 1. а) Периметарот на рамнокрак траpez со основи 31 cm и 13 cm е еднаков на $66,8\text{ cm}$. Пресметај го неговиот крак.

б) Во рамнокрак траpez со остар агол 60° , средната линија е 40 cm . Пресметај го периметарот на тој траpez, ако едната негова основа е 50 cm .

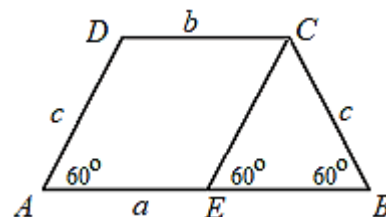
Решение. а) Од $L = a + b + 2c$, добиваме $c = \frac{L - (a + b)}{2}$. Заменуваме во последната формула и добиваме $c = \frac{66,8 - (31 + 13)}{2} = 11,4\text{ cm}$.

б) Нека $a = 50 \text{ cm}$ и $m = 40 \text{ cm}$. Од $a + b = 2m$ следува $b = 2 \cdot 40 - 50 = 30 \text{ cm}$.

Низ темето C повлекуваме права паралелна на кракот AD , која ја сече основата AB во точката E . Тогаш четириаголникот $AECD$ е паралелограм, а триаголникот EBC е рамностран (Зошто?). Значи,

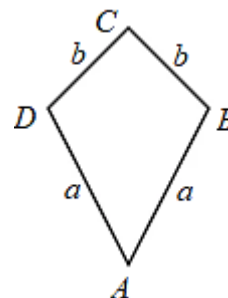
$$c = \overline{BC} = \overline{EB} = \overline{AB} - \overline{AE} = \overline{AB} - \overline{DC} = a - b = 50 - 30 = 20 \text{ cm}.$$

Конечно, периметарот на трапезот е $L = 50 + 30 + 2 \cdot 20 = 120 \text{ cm}$.



Да се потсетиме! Четириаголникот кој нема паралелни страни се вика *трапезоид*. Трапезоид кој има два пара еднакви соседни страни се вика *делтоид*. Точно е следново тврдење.

Периметарот на делтоид $ABCD$ со страни a и b се пресметува со формулата $L = 2(a + b)$.



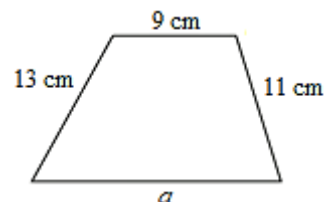
Пример 2. Едната страна на делтоидот е $12,4 \text{ cm}$, а периметарот е 40 cm . Пресметај ја должината на другата страна.

Решение. Можеме да земеме $a = 12,4 \text{ cm}$. Од $L = 2(a + b)$ добиваме

$$b = \frac{L}{2} - a = \frac{40}{2} - 12,4 = 20 - 12,4 = 7,6 \text{ cm}.$$

Задачи за вежби

20. Во трапезот на цртежот се означени должините на краците и едната основа. Колкава е другата основа ако неговиот периметар е 53 cm ?



21. Периметарот на рамнокрак трапез е еднаков на 60 cm , а кракот е 13 cm . Колкава е неговата средна линија?

22. Краците на трапезот се 18 cm и 12 cm , а неговата средна линија е 22 cm . Пресметај го неговиот периметар.

23. Пресметај го периметарот на рамнокрак трапез чиј остар агол е 60° , а основите му се 13 cm и 5 cm .

24. Периметарот на еден рамнокрак трапез е 44 cm , а кракот е еднаков на средната линија. Пресметај го кракот на трапезот.

25. Страните на делтоидот се 22 cm и $12,5 \text{ cm}$. Пресметај го неговиот периметар.

26. Периметарот на делтоидот е еднаков на 56 cm , а едната страна има 13 cm . Пресметај ја другата страна.

27. Дијагоналата што ги сврзува темињата на еднаквите спротивни агли во еден делтоид го дели делтоидот на два триаголника со периметри $L' = 45 \text{ cm}$ и $L'' = 55 \text{ cm}$. Периметарот на делтоидот е $L = 70 \text{ cm}$.

Пресметај ги должините на таа дијагонала и страните на делтоидот.

28. Страните на делтоидот се 5 cm и 13 cm . Пресметај ја должината на страната на квадрат кој има еднаков периметар како и делтоидот.
29. Даден е квадрат со страна 13 cm . Должината на едната страна на делтоид кој има периметар еднаков на периметарот на квадратот е 15 cm . Пресметај ја должината на другата страна на делтоидот.
30. Даден е рамностран триаголник со страна 13 cm . Должината на едната страна на делтоид кој има периметар еднаков на периметарот на триаголникот е 13 cm . Пресметај ја должината на другата страна на делтоидот.

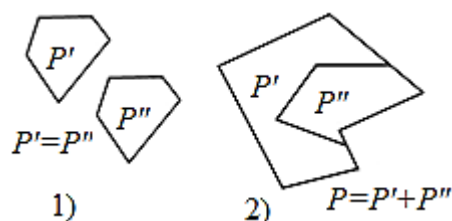
4.5 Плоштина на квадрат, правоаголник и правоаголен триаголник

2Д формите (геометриските фигури) како што се: триаголникот, квадратот, правоаголникот, кругот итн. зафаќаат определен дел од рамнината. Велиме дека тој дел од рамнината има своја плоштина. Плоштината на 2Д формата всушност е позитивен број придружен на 2Д формата, така што:

1) две 2Д форми кои може да се доведат до поклопување имаат еднакви плоштини $P' = P''$,

2) ако една 2Д форма се расече на два дела, тогаш нејзината плоштина е еднаква на збирот на плоштините на добиените делови, $P = P' + P''$,

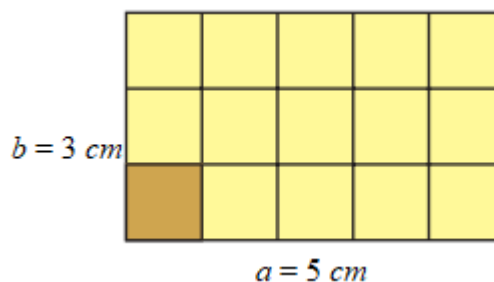
3) квадрат чија страна во избрана мерна единица (mm , cm , dm , m итн.) е со должина 1 има плоштина 1 (mm^2 , cm^2 , dm^2 , m^2 итн.).



Основната единица за мерење на плоштина е *квадратен метар*. Запишуваме 1 m^2 и читаме *еден квадратен метар*. Како што рековме се употребуваат и помали единици: 1 mm^2 , 1 cm^2 и 1 dm^2 , но и поголеми мерни единици за плоштина: квадратен декаметар (dam^2), квадратен хектометар (hm^2) и квадратен километар (km^2). Покасно ќе се осврнеме на врските меѓу овие единици.

Пример 1. На цртежот е претставен правоаголник чии страни се со должини $a = 5\text{ cm}$, $b = 3\text{ cm}$.

На страна со должина $a = 5\text{ cm}$ можеме една до друга да наредиме ред кој содржи 5 квадрати со страна 1 cm . Потоа, одејќи по работ со должина $b = 3\text{ cm}$ можеме да наредиме 3 реда со по 5 квадрати во еден ред. Значи, правоаголникот можеме да го покриеме со $5 \cdot 3$ квадрати



со страна 1 cm . Сега, бидејќи плоштината на квадрат со страна 1 cm е 1 cm^2 , добиваме дека плоштината на дадениот правоаголник $P = 5 \cdot 3 = 15\text{ cm}^2$.

На потполно ист начин, како во пример 1, може да се докаже дека за плоштината на правоаголник важи следново тврдење.

Ако должините на страните на правоаголникот a, b се мерени во иста единица за должина, тогаш плоштината на правоаголникот е $P = ab$.

Пример 2. Даден е правоаголник со должини на страни $a = 2\text{ dm}$ и $b = 11\text{ cm}$. Пресметај ја неговата плоштина.

Решение. Забележуваме дека должините на страните се дадени во различни мерни единици. Затоа прво треба да ги претвориме во иста мерна единица. Имаме $a = 20\text{ cm}$ и $b = 11\text{ cm}$, па затоа $P = 20 \cdot 11 = 220\text{ cm}^2$.

Пример 3. Должината на едната страна на еден правоаголник е $a = 3,2\text{ cm}$, а неговата плоштина е $P = 36,8\text{ cm}^2$. Определи ја должината на втората страна на овој правоаголник.

Решение. Имаме, $P = ab = 3,2 \cdot b$ и како $P = 36,8\text{ cm}^2$, добиваме $3,2b = 36,8$. Оттука следува $b = 36,8 : 3,2 = 11,5\text{ cm}$.

Како што знаеме, квадрат е правоаголник кај кој двете страни се еднакви, т.е. $a = b$. Според тоа, важи:

Ако должината на страната на квадратот е a , тогаш плоштината на квадратот е $P = a^2$.

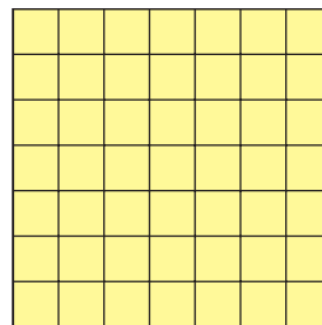
Пример 4. Пресметај ја плоштината на квадрат со страна:

а) $a = 7\text{ cm}$, б) $a = 1,7\text{ cm}$.

Решение. а) Имаме: $P = 7^2 = 7 \cdot 7 = 49\text{ cm}^2$.

б) Имаме, $a = 1,7\text{ cm}$, па затоа

$$P = 1,7^2 = 1,7 \cdot 1,7 = 2,89\text{ cm}^2.$$



Пример 5. Пресметај ја должината на страната на квадрат која има еднаква плоштина како правоаголник со страни $a = 8\text{ cm}$ и $b = 14\text{ cm}$.

Решение. Плоштината на дадениот правоаголник е $P' = 8 \cdot 14 = 144\text{ cm}^2$.

Ако должината на страната на квадратот е c , тогаш неговата плоштина е $P = c^2$, па затоа $c^2 = 144 = 12^2$, од каде добиваме $c = 12\text{ cm}$.

Пример 6. Дали постои квадрат со страна $a \text{ cm}$, $a \in \mathbb{N}$, чија плоштина е еднаква на збирот на плоштините на квадрати со страни 5 cm и 12 cm ? Ако постои определи ја должината на страната на тој квадрат.

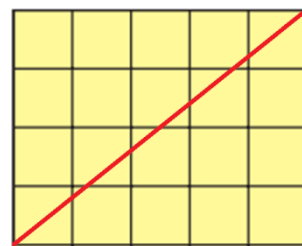
Решение. Збирот на плоштините на двата квадрати е еднаков на

$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \text{ cm}^2.$$

Сега, од $169 = 13^2$ добиваме дека збирот на плоштините е еднаков на плоштината на квадрат со страна 13 cm .

Пример 7. Пресметај ја плоштината на правоаголен триаголник со катети $a = 5 \text{ cm}$ и $b = 4 \text{ cm}$.

Решение. Да нацртаме правоаголник со страни $a = 5 \text{ cm}$ и $b = 4 \text{ cm}$, како што е прикажано на цртежот. Ја повлекуваме дијагоналата на правоаголникот, со што истиот го делиме на два правоаголни триаголници со катети $a = 5 \text{ cm}$ и $b = 4 \text{ cm}$. Тогаш ако со P ја означиме плоштината на дадениот правоаголен триаголник, добиваме дека $2P$ е плоштината на добиениот правоаголник. Оттука следува $2P = 4 \cdot 5$, односно $P = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10 \text{ cm}^2$.



На потполно ист начин, како во пример 7, може да се докаже дека за плоштината на правоаголен триаголник важи следново тврдење.

Ако должините на катетите на правоаголниот триаголник a, b се мерени во иста единица за должина, тогаш плоштината на правоаголниот триаголник е $P = \frac{ab}{2}$.

Пример 8. Пресметај ја плоштината на правоаголен триаголник со катети

а) $a = 9 \text{ cm}$ и $b = 12 \text{ cm}$, б) $a = 2,3 \text{ cm}$ и $b = 2 \text{ dm}$.

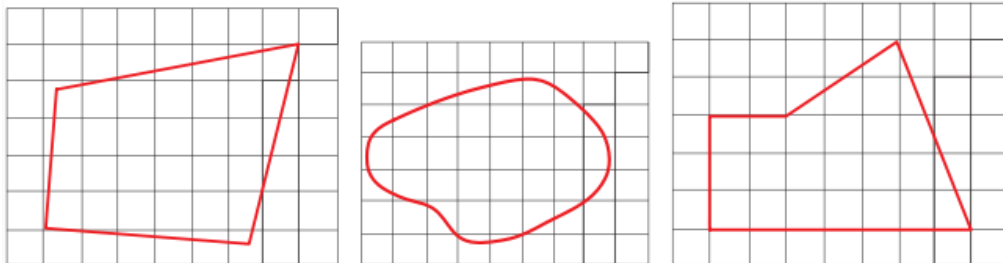
Решение. а) Со замена во формулата за плоштина на правоаголен триаголник добиваме $P = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54 \text{ cm}^2$.

б) Должините на катетите се дадени во различни мерни единици, па затоа прво ќе ги претвориме во иста мерна единица, т.е. во сантиметри. Имаме: $a = 2,3 \text{ cm}$ и $b = 20 \text{ cm}$, па затоа плоштината на правоаголниот триаголник е $P = \frac{2,3 \cdot 20}{2} = 23 \text{ cm}^2$.

Пример 9. Даден е правоаголен триаголник со плоштина 34 cm^2 . Должината на едната негова катета е $8,5 \text{ cm}$. Пресметај ја должината на другата катета.

Решение. Нека $a = 8,5 \text{ cm}$ и b се катетите на правоаголниот триаголник. Бидејќи плоштината на триаголникот е 34 cm^2 , со замена во $P = \frac{ab}{2}$ добиваме $\frac{8,5b}{2} = 34$. Според тоа, $8,5b = 2 \cdot 34$, од каде добиваме $b = \frac{2 \cdot 34}{8,5} = \frac{68}{8,5} = 8 \text{ cm}$.

Нека во квадратна мрежа е дадена 2Д форма на која не можеме да ја пресметаме плоштината P . Да се направи проценка аз плоштината P значи да се најдат два при-родни броја m и n такви што $m \cdot e \leq P \leq n \cdot e$, каде e е плоштината на едно квадратче од мрежата. На цртежите се дадени четириаголник, криволиниска 2Д форма и петаголник. Направи што е можно подобри проценки на нивните плоштини.



Задачи за вежби

31. Определи ја плоштината на правоаголник со должини на страни:

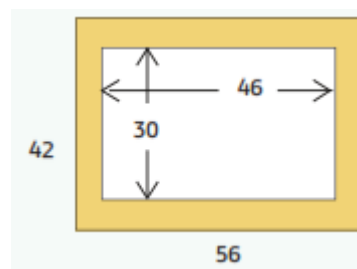
а) 15 cm и 9 cm , б) 12 cm и 3 dm .

32. Пресметај го периметарот на квадрат кој има еднаква плоштина како правоаголник со димензии 63 cm и 28 cm

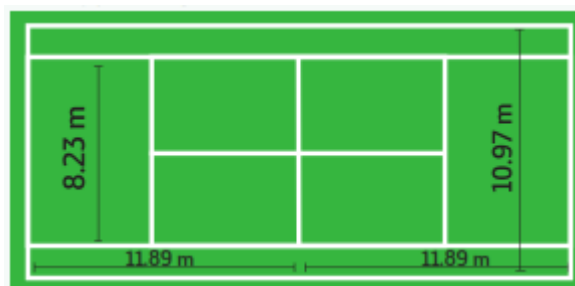
33. Пресметај ја плоштината на правоаголната рамка прикажана на цртежот.

34. Пресметај ја плоштината на квадрат што има страна:

а) 16 cm , б) 25 cm во dm^3 , в) 30 dm во m^3 .



35. Тениското игралиште има должина $23,78\text{ m}$ и ширина $10,97\text{ m}$. За натпреварите во парови се користи целото игралиште, а за натпреварите во поединечна конкуренција се користи делот од игралиштето кој има ширина $8,23\text{ m}$. За колку е поголема плоштината на целото игралиште од



плоштината на делот кој се користи за натпревари во поединечна конкуренција?

36. Што има поголема плоштина – квадрат со страна 19 cm или правоаголник со страни 18 cm и 20 cm ?

37. Едната страна на правоаголникот е 8 cm , а другата е поголема за 7 cm . Колку е плоштината на правоаголникот?

38. Дедо Африм сака за своите внуци да направи терен за баскет со димензии во форма на правоаголник со страни 9 m и 6 m . Фирмата која му дала понуда за изградба на теренот пресметала дека 1 m^2 чини 1350 денари. Колку пари треба да плати дедо Африм за изградба на теренот?

39. Како ќе се промени плоштината на еден правоаголен триаголник ако:

а) едната катета се зголеми трипати, а другата катета се намали двапати;

- б) двете катети се зголемат два пати?
40. Колку проценти ќе се промени плоштината на еден правоаголен триаголник, ако едната катета му се зголеми 50%, а другата му се намали 20%? Дали плоштината се зголемила или се намалила?
41. Пресметај ја плоштината на правоаголен триаголник кај кој едната катета е $a = 20 \text{ cm}$ и еден од неговите остри агли е еднаков на 45° .

4.6 Врски меѓу мерните единици за плоштина

Во претходната лекција рековме дека мерни единици за плоштин се 1 mm^2 , 1 cm^2 , 1 dm^2 , 1 m^2 , 1 dam^2 , 1 hm^2 и 1 km^2 . Логично е да се запрашаме дали, како и во случај на другите мерни единици, и овде една мерна единица можеме да ја изразиме преку друга. Како што ќе видиме подолу, одговорот на ова прашање е позитивен.

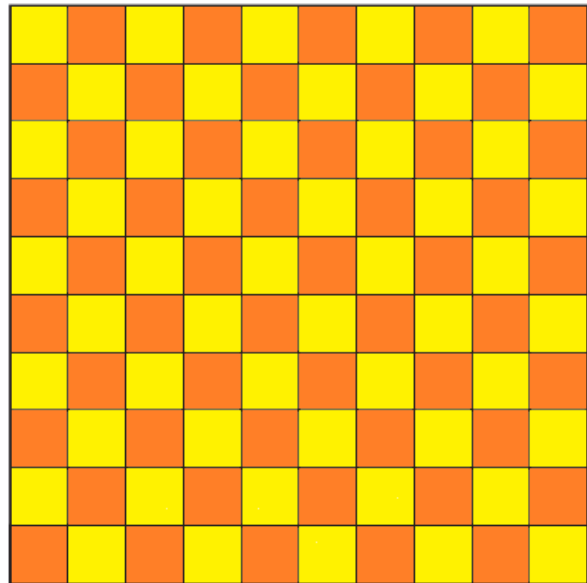
Како што рековме, плоштината на квадрат со раб $a = 1 \text{ m}$ е $P = 1 \text{ m}^2$. Од друга страна должината на работ на овој квадрат е $a = 10 \text{ dm}$, што значи дека плоштината на квадратот е $P = 10^2 \text{ dm}^2 = 100 \text{ dm}^2$.

Значи, $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$.

На цртеж е прикажано поставувањето на квадратите при преминот од поголема кон првата помала единица.

На потполно ист начин може да се докаже дека

$$\begin{aligned} 1 \text{ dm}^2 &= 100 \text{ cm}^2, \\ 1 \text{ cm}^2 &= 100 \text{ mm}^2, \\ 1 \text{ dam}^2 &= 100 \text{ m}^2, \quad . \\ 1 \text{ hm}^2 &= 100 \text{ dam}^2, \\ 1 \text{ km}^2 &= 100 \text{ hm}^2. \end{aligned}$$



Како што можеме да видиме секоја мерна единица за плоштина е 100 пати помала од мерната единица која што е непосредно поголема од неа. Со други зборови за наведените мерни единици точни се следниве равенства:

$$\begin{aligned} 1 \text{ km}^2 &= 100 \text{ hm}^2 = 10000 \text{ dam}^2 = 1000000 \text{ m}^2, & 1 \text{ m}^2 &= 100 \text{ dm}^2 = 10000 \text{ cm}^2 = 1000000 \text{ mm}^2, \\ 1 \text{ hm}^2 &= 100 \text{ dam}^2 = 10000 \text{ m}^2, & 1 \text{ dm}^2 &= 100 \text{ cm}^2 = 10000 \text{ mm}^2, \\ 1 \text{ dam}^2 &= 100 \text{ m}^2, & 1 \text{ cm}^2 &= 100 \text{ mm}^2. \end{aligned}$$

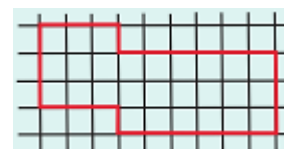
Задачи за вежби

42. Колку m^2 има во: а) 9000 dm^2 , б) $180\,000\text{ cm}^2$, в) 1250 dm^2 .
 43. Колку dm^2 има во: а) $1,4\text{ m}^2$, б) $22\,000\text{ cm}^2$, в) $1450\,000\text{ mm}^2$.
 44. Плоштината $35\,250\text{ mm}^2$ запиши ја во cm^2 .

4.7 Плоштина на 2Д форми составени од квадрати, правоаголници и правоаголни триаголници

Досега научи како да пресметуваш плоштина на квадрат, правоаголник и правоаголен триаголник. Но, во секјдневниот живот често пати се среќаваме со посложени 2Д форми кои се составени од квадрати, правоаголници и триаголници и чии плоштини треба да го пресметаме. Во продолжение е решиме неколку примери кои ќе ти помогнат да научиш како да решаваш вакви проблеми.

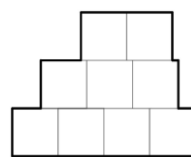
Пример 1. Секое квадратче во мрежата на цртежот има страна со должина 1 cm . Определи ги периметарот и плоштината на дадената 2Д форма.



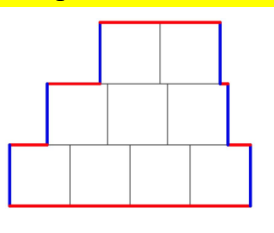
Решение. Четири страни на 2Д формата имаат должина 3 cm , две страни имаат должина 1 cm и две страни имаат должина 6 cm . Според тоа, дадената 2Д форма има периметар $L = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 6 = 26\text{ cm}$.

Дадената 2Д форма е составена од еден квадрат со должина на страна 3 cm и еден правоаголник со должини на страни 3 cm и 6 cm . Според тоа, нејзината плоштина е еднаква на $3 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 27\text{ cm}^2$.

Пример 2. Лазо нацртал 2Д форма која се состои од 9 еднакви квадрати. Периметарот на 2Д формата е еднаков на 28 cm . Определи ја плоштината на оваа 2Д форма.



Решение. Периметарот на 2Д формата која ја нацртал Лазо се состои од црвени и сини отсечки (види цртеж).



Збирот на должините на црвено обоените отсечки е еднаков на $8a$ каде со a е означена должината на страната на еден квадрат. Збирот на должините на сино обоените отсечки е $6a$. Според тоа, $8a + 6a = 28$, односно $a = 2\text{ cm}$. Конечно, плоштината на еден квадрат е $P = 2 \cdot 2 = 4\text{ cm}^2$.

Но, 2Д формата се состои од 9 вакви квадрати, што значи дека нејзината плоштина е $9 \cdot 4 = 36\text{ cm}^2$.

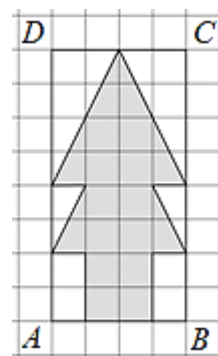
Пример 3. Екрем во својата тетратка нацртал правоаголник $ABCD$ и во него нацртал 2Д форма која личи на бор. Пресметај ја плоштината на оваа 2Д форма ако растојанието меѓу линиите во тетратката е 1 cm

Решение. *Прв начин.* 2Д формата која ја нацртал Екрем е составена од еден правоаголник со страни 2 cm и 6 cm и од шест правоаголни триаголници со катети 2 cm и 1 cm . Значи, нејзината плоштина е

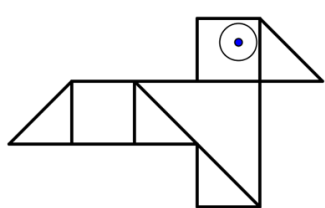
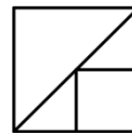
$$2 \cdot 6 + 6 \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} = 12 + 6 = 18\text{ cm}^2.$$

Втор начин. Должините на страните на правоаголникот $ABCD$ се 4 cm и 8 cm , па затоа неговата плоштина е $4 \cdot 8 = 32\text{ cm}^2$.

Плоштината на 2Д формата која ја нацртал Екрем ја добиваме ако од плоштината на правоаголникот $ABCD$ ги одземеме плоштините на еден правоаголник со страни 2 cm и 4 cm и три правоаголни со страни 1 cm и 2 cm (Зошто?). Според тоа, плоштината на 2Д формата е $32 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18\text{ cm}^2$.



Пример 4. Темјана има неколку квадратни парчиња со плоштина 4 cm^2 . Таа сече неколку од нив на квадрати и правоаголни триаголници како што е прикажано на цртежот.

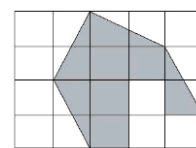


Темјана употребила неколку од нив и направила птица како на цртежот лево. Пресметај ја плоштината на птицата?

Решение. При правењето на птицата се употребени сите делови добиени од едно парче и мал квадрат и два мали триаголника од друго парче хартија. Малиот квадрат и двата мали триаголника се половина од едно големо парче.

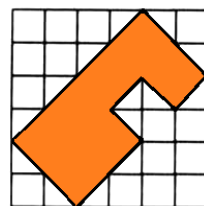
Значи, при правењето на птицата се употребени $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ парчиња хартија, па затоа плоштината на птицата е $4 \cdot \frac{3}{2} = 6\text{ cm}^2$.

Пример 5. Правоаголникот на цртежот десно е со должини на страни 5 cm и $0,4\text{ dm}$ и е поделен на исти квадрати. Определи ја плоштината на осенчениот дел на правоаголникот. Колкав дел од правоаголникот е осенчен?



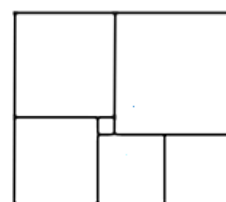
Решение. Имаме, $0,4\text{ dm} = 4\text{ cm}$, па затоа плоштината на правоаголникот е еднаква на $4 \cdot 5 = 20\text{ cm}^2$. Секое од квадратчињата на кои е поделен квадратот има должина на страна еднаква на 1 cm , т.е. има плоштина еднаква на 1 cm^2 . Осенчениот дел на правоаголникот содржи 4 квадратчиња и 4 правоаголни триаголници со катети 1 cm и 2 cm . Значи, секој од овие триаголници има плоштина $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1\text{ cm}^2$. Според тоа, плоштината на осенчениот дел од правоаголникот е еднаква на $4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 8\text{ cm}^2$. Конечно, осенчени се $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ од правоаголникот.

Пример 6*. Квадрат чија дијагонала е долга 6 cm е поделен на 36 еднакви квадрати. Определи ги периметарот и плоштината на обоената фигура.



Решение. На дијагоналата на големиот квадрат има 6 мали квадрати, што значи дека должината на дијагоналата на еден мал квадрат е $6:6 = 1\text{ cm}$. Периметарот на обоената фигура се состои од 16 дијагонали на малите квадрати, па затоа тој е еднаков на $16 \cdot 1 = 16\text{ cm}$. Обоената фигура е дел од правоаголник кој се добива кога од правоаголник со страни 4 cm и 2 cm , се одземе плоштината на квадрат со страна 1 cm . Значи, плоштината на обоената фигура е $4 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 7\text{ cm}^2$.

Пример 7. Правоаголник е составен од шест квадрати, како што е прикажано на цртежот. Одреди ја плоштината на правоаголникот, ако страната на најмалиот квадрат е 2 m .



Решение. Нека x е страната на квадратот $ABCD$. Тогаш страната на квадратот $DHFE$ е $x + 2$, т.е. $\overline{DE} = \overline{EF} = x + 2$. Да забележиме дека $\overline{BS} = \overline{NM} = x - 2$. Така имаме дека $\overline{BN} = 2x - 4$. Значи,

$$\overline{AN} = 3x - 4 \text{ и } \overline{AE} = 2x + 2.$$

За $\overline{FG}$ имаме

$$\overline{FG} = \overline{AN} - \overline{EF} = (3x - 4) - (x + 2) = 2x - 6.$$

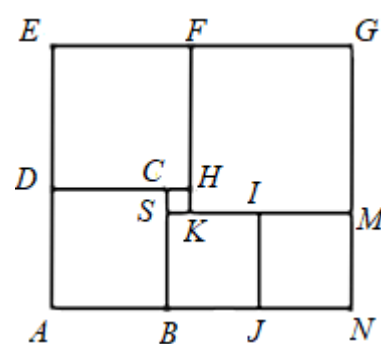
Аналогно добиваме

$$\overline{MG} = \overline{AE} - \overline{NM} = (2x + 2) - (x - 2) = x + 4.$$

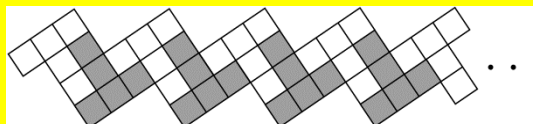
Од $\overline{FG} = \overline{MG}$ ја добиваме равенката $2x - 6 = x + 4$, од каде се добива дека $x = 10$. Така имаме дека

$$\overline{AN} = 3 \cdot 10 - 4 = 26 \text{ и } \overline{AE} = 2 \cdot 10 + 2 = 22.$$

Значи плоштината на правоаголникот е $P = 22 \cdot 26 = 572\text{ m}^2$.



Пример 8. Од 5 еднакви квадратчиња со страна 1 cm е формирана буквата „Т“. Земени се 2013 такви „букви“ и се подредени една до друга, како што е показано на цртежот



Определи ги плоштината и периметарот на така добиената фигура.

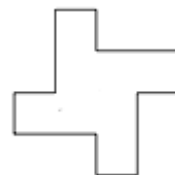
Решение. Секоја буква „Т“ има плоштина 5 cm^2 . Фигурата е составена од 2013 букви и затоа нејзината плоштина изнесува $2013 \cdot 5 = 10065\text{ cm}^2$.

Да ги групираме фигурите по парови. Левиот надворешен пар има периметар (кој учествува во периметарот на целата фигура) 13 cm . Секој нареден внатрешен пар

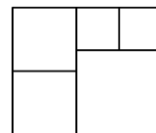
учествува во периметарот на фигурата со 10 cm и на крај (бидејќи 2013 е непарен број) останува една фигура, со која на периметарот се додаваат уште 9 cm . Значи, за периметарот на фигурата добиваме $13 + 1005 \cdot 10 + 9 = 10072\text{ cm}$.

Задачи за вежби

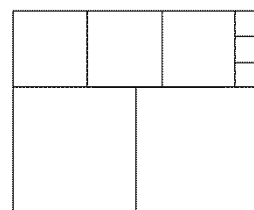
45. Фигурата на цртежот е составена од 4 складни правоаголници, кај кои едната страна е два пати подолга од другата. Пресметај го периметарот на оваа фигура, ако нејзината плоштина е 72 cm^2 .



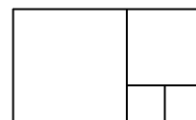
46. Правоаголникот на цртежот десно е составен од пет квадрати. Должината на страната на најголемиот квадрат е еднаква на 16 cm . Определи ги плоштината и периметарот на правоаголникот.



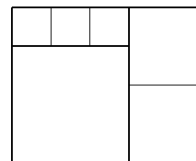
47. Правоаголник на цртежот е составен од осум квадрати. Периметарот на најмалиот квадрат е 2 cm . Пресметај ја плоштината на правоаголникот.



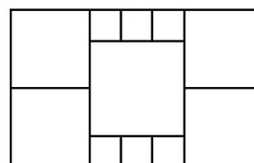
48. Правоаголникот на цртежот е составен од четири квадрати. Периметарот на најголемиот квадрат е 24 cm . Определи ги плоштината и периметарот на правоаголникот.



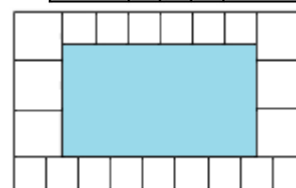
49. Правоаголникот на цртежот е составен од шест квадрати. Подолгата страна на правоаголникот е еднаква на 60 cm . Определи ја плоштината на овој правоаголник.



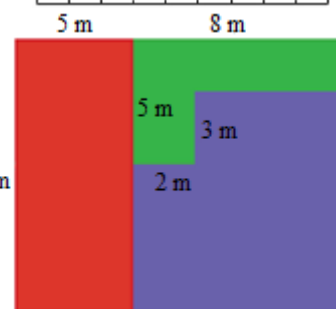
50. Правоаголникот на цртежот десно е составен од 11 квадрати и има периметар 13 cm . Определи ја плоштината на правоаголникот.



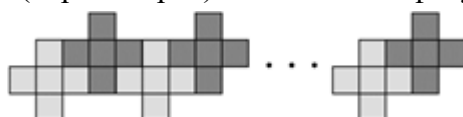
51. На цртежот е прикажан правоаголен базен кој е обоен во сино и чиј периметар е еднаков на 76 m . Базенот е заобиколен со патека од квадратни плочки. Патека и базенот формираат правоаголник. Определи ја плоштината на патеката.



52. Пресметај ги плоштините на црвениот, синиот и зелениот дел на правоаголникот прикажан на цртежот.



53. Крвче е составено од пет квадратчиња, секое со страна 1 cm и 2025 такви крвчиња се наредени едно до друго, како што е прикажано на цртежот. Пресметај ги плоштината и обиколката (периметарот) на добиената фигура.



4.8 Волумен на квадар и коцка

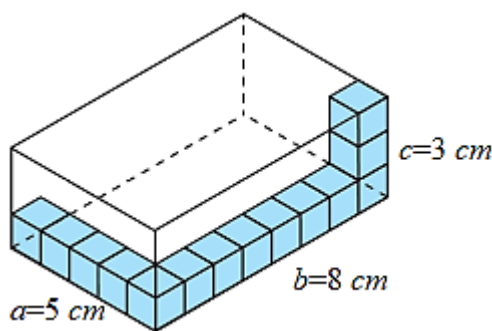
Геометриските тела (3Д формите) како што се коцката, квадарот, цилиндарот, конусот итн. зафаќаат определен дел од просторот. Велиме дека тој дел од просторот има свој волумен. Волуменот на телото всушност е позитивен број придружен на телото, така што:

- 1) две тела кои може да се доведат до поклопување имаат еднакви волумени,
- 2) ако едно тело се расече на два дела, тогаш неговиот волумен е еднаков на збирот на волумените на добиените деловите,
- 3) коцка чиј раб во избрана мерна единица (cm , dm , m итн) е со должина 1 има волумен 1 (cm^3 , dm^3 , m^3 итн).

Основната единица за мерење на волумен е *кубен метар*. Запишуваме $1 m^3$ и читаме *еден кубен метар*. Како што рековме се употребуваат и помали единици $1 mm^3$, $1 cm^3$ и $1 dm^3$. Покасно ќе се осврнеме на врските меѓу овие единици.

Пример 1. На цртежот е претставен квадар чии рабови се со должини $a = 5 cm$, $b = 8 cm$ и $c = 3 cm$.

На работ со должина $a = 5 cm$ можеме една до друга да наредиме ред кој содржи 5 коцки со раб $1 cm$. Потоа, одејќи по работ со должина $b = 8 cm$ можеме да наредиме 8 реда со по 5 коцки во еден ред. Значи, најдолу можеме да наредиме $5 \cdot 8$ коцки со раб $1 cm$. Сега, бидејќи $c = 3 cm$ за да го пополниме целиот квадар треба нагоре да ставиме 3 реда со по $5 \cdot 8$ коцки со раб $1 cm$, што значи целиот квадар содржи $8 \cdot 5 \cdot 3$ коцки со раб $1 cm$. Конечно, волуменот на дадениот квадар е $V = 8 \cdot 5 \cdot 3 = 120 cm^3$.



На потполно ист начин, како во пример 1, може да се докаже дека за волуменот на квадар важи следново тврдење.

Ако должините на рабовите на квадарот a, b, c се мерени во иста единица за должина, тогаш волуменот на квадарот е $V = abc$.

Пример 2. Даден е квадар со должини на рабови $a = 1 dm$, $b = 4 cm$ и $c = 2 cm$. Пресметај го неговиот волумен.

Решение. Забележуваме дека должините на рабовите се дадени во различни мерни единици. Затоа прво треба да ги претвориме во иста мерна единица. Имаме $a = 10 cm$, $b = 4 cm$ и $c = 2 cm$, па затоа $V = 10 \cdot 4 \cdot 2 = 80 cm^3$.

Пример 3. Должините на два раба на еден квадар се $a = 3,2 \text{ cm}$ и $b = 5 \text{ cm}$, а неговиот волумен е $V = 36,8 \text{ cm}^3$. Определи ја должината на третиот раб.

Решение. Имаме, $V = abc = 3,2 \cdot 5 \cdot c = 16c$ и како $V = 36,8 \text{ cm}^3$, добиваме $16c = 36,8$. Оттука следува $c = 36,8 : 16 = 2,3 \text{ cm}$.

Како што знаеме, коцка е квадар кај кој сите рабови се со еднаква должина, т.е. $a = b = c$. Според тоа, важи:

Ако должината на работ на коцката е a , тогаш волуменот на коцката е $V = a^3$.

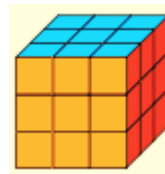
Пример 4. Пресметај го волуменот на коцка со раб:

а) $a = 3 \text{ cm}$, б) $a = 1,2 \text{ cm}$.

Решение. а) Имаме: $V = 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \text{ cm}^3$.

б) Имаме, $a = 1,2 \text{ cm}$, па затоа

$$V = 1,2^3 = 1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2 = 1,728 \text{ cm}^3.$$



Пример 5. Пресметај ја должината на работ на коцката која има еднаков волумен како квадар со рабови $a = 8 \text{ dm}$, $b = 2,5 \text{ dm}$ и $c = 6,25 \text{ dm}$.

Решение. Волуменот на дадениот квадар е $V = 8 \cdot 2,5 \cdot 6,25 = 125 \text{ dm}^3$. Ако должината на работ на коцката е d , тогаш $V = d^3$, па затоа $d^3 = 125 = 5^3$, од каде добиваме $d = 5 \text{ dm}$.

Пример 6. Дали постои коцка со раб $a \text{ cm}$, $a \in \mathbb{N}$, чиј волумен е еднаков на збирот на волумените на квадари со рабови

$6 \text{ cm}, 7 \text{ cm}, 18 \text{ cm}; 11 \text{ cm}, 12 \text{ cm}, 13 \text{ cm}$ и $14 \text{ cm}, 15 \text{ cm}, 16 \text{ cm}$?

Ако постои определи ја должината на работ на таа коцка.

Решение. Збирот на волумените на трите квадари е еднаков на

$$6 \cdot 7 \cdot 18 + 11 \cdot 12 \cdot 13 + 14 \cdot 15 \cdot 16 = 756 + 1716 + 3360 = 5832 \text{ cm}^3.$$

Сега, од

$$5832 = 2^3 \cdot 3^6 = (2 \cdot 3^2) \cdot (2 \cdot 3^2) \cdot (2 \cdot 3^2) = 18^3$$

добиваме дека збирот на волумените е еднаков на волуменот на коцка со раб 18 cm .

Задачи за вежби

54. Определи го волуменот на квадар со димензии:

а) $5 \text{ cm}, 6 \text{ cm}$ и 9 cm , б) $16 \text{ cm}, 1 \text{ dm}$ и 3 dm .

55. Училницата има форма на квадар со должина 6 m , ширина 5 m и висина 3 m .

Колку кубни метри простор има училницата?

56. Пресметај го волуменот на коцка што има раб:

а) 6 cm , б) 20 cm во dm^3 , в) 31 dm во m^3 .

57. Што има поголем волумен – коцка со раб 13 cm или квадар со рабови 12 cm , 13 cm и 14 cm ?
58. Едниот раб на квадарот е 8 cm , а другите два се еднакви и се поголеми за 2 cm . Колку е волуменот на квадарот?
59. Волуменот на една просторија во форма на квадар е 108 m^3 . Должината е 9 m , а ширината е 4 m . Колку метри е висока оваа просторија?

За оние што сакаат да знаат повеќе.

Ана залепила шест сликички на сидовите на една коцка. Потоа ја покажала коцката на нејзиниот другар Адем, кој два пати видел по три зида кои формираат по еден кош (види цртеж). Која сликичка се наоѓа на сидот што е спротивен на глумчето?

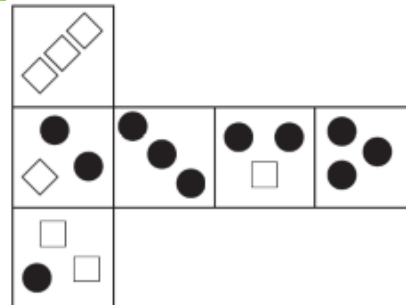
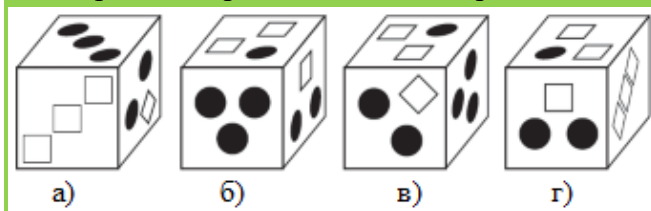


Решение. На првата коцка бубамарата е поставена така што зад неа е глумчето, а на втората коцка бубамарата е поставен така што кучето е пред неа. Според тоа, кучето и глумчето се на два спротивни зида, т.е. кучето е на сидот кој е спротивен на глумчето.

На сличен начин обиди се да ја решиш следна задача.

Илинка нацртала мрежа на коцка за играње.

Која од прикажаните коцки и соодветствува на оваа мрежа? Образложи го одговорот!



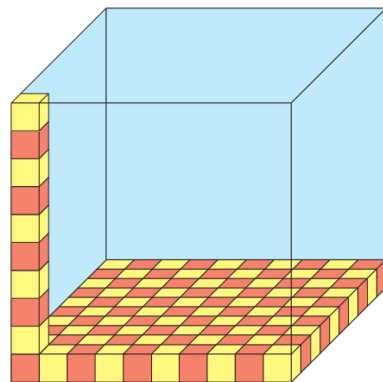
4.9 Врски меѓу мерните единици за волумен

Во претходната лекција рековме дека мерни единици за волумен се 1 mm^3 , 1 cm^3 , 1 dm^3 и 1 m^3 . Логично е да се запрашаме дали, како и во случај на другите мерни единици, и овде една мерна единица можеме да ја изразиме преку друга. Како што ќе видиме подолу, одговорот на ова прашање е позитивен.

Како што рековме, волуменот на коцка со раб $a = 1\text{ m}$ е $V = 1\text{ m}^3$. Од друга страна должината на работ на оваа коцка е $a = 10\text{ dm}$, што значи дека волуменот на коцката е $V = 10^3\text{ dm}^3 = 1000\text{ dm}^3$. Според тоа, $1\text{ m}^3 = 1000\text{ dm}^3$.

На цртеж е прикажано поставувањето на првиот ред коцки при преминот од поголема кон првата помала единица, како и бројот на редовите кои треба да се постават еден над друг.

Сега да разгледаме коцка со раб $b = 1 \text{ dm}$, која има волумен $V' = 1 \text{ dm}^3$. Должината на работ на оваа коцка изразена во сантиметри е $b = 10 \text{ cm}$, па затоа нејзиниот волумен е $V' = 10^3 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$. Значи, $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$.



Понатаму, да разгледаме коцка со раб $c = 1 \text{ cm}$, која има волумен $V'' = 1 \text{ cm}^3$. Должината на работ на оваа коцка изразена во милиметри е $c = 10 \text{ mm}$, па затоа нејзиниот волумен е $V'' = 10^3 \text{ mm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$. Според тоа, $1 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$.

Од претходните разгледувања следува дека

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3 = 1000000 \text{ cm}^3 = 1000000000 \text{ mm}^3,$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3 = 1000000 \text{ mm}^3,$$

$$1 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ mm}^3.$$

На крајот уште да споменеме дека, всушност зафатнината е волумен и дека $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$. Тоа значи дека $1 \text{ kl} = 1 \text{ m}^3$ и $1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$.

Задачи за вежби

60. Колку m^3 има во: а) 9000 dm^3 , б) 180000 cm^3 , в) 1250 dm^3 .

61. Колку dm^3 има во: а) $1,3 \text{ m}^3$, б) 18000 cm^3 , в) 1250000 mm^3 .

62. Волуменот 35250 mm^3 запиши го во cm^3 .

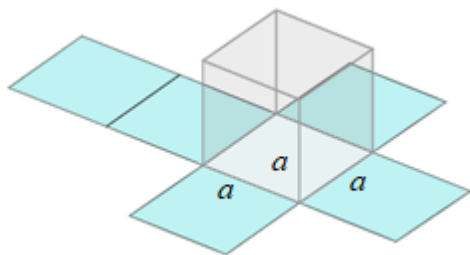
63. Аквариум со должина 25 cm , ширина 12 cm и висина 32 cm , наполнет е со вода до висина 20 cm . Колку литри вода има во аквариумот?

4.10 Плоштина на коцка и квадар

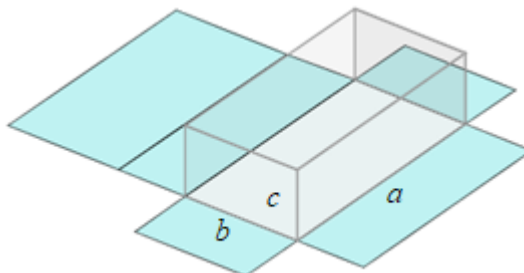
Во претходните лекции подетално се запозна со поимот плоштина на 2Д форма (рамнинска фигура). Притоа повтори како се пресметува плоштина на правоаголник, квадрат и правоаголен триаголник, но и научи како се добиваат формулите за пресметување на овие 2Д форми (рамнински фигури). Исто така, стекнатите знаења ги применуваше за пресметување плоштини на 2Д форми составени од правоаголници, квадрати и правоаголни триаголници.

Од претходните одделенија знаеш како изгледаат мрежата на коцката и квадарот. Начинот на добивање на истите е прикажан на цртежите.

Сега ќе видиме како со помош на формулите за плоштина на квадрат и правоаголник, користејќи ги мрежите на коцката и квадарот може да се пресметаат плоштините на овие 3Д форми (геометриски тела).



Расекување коцка и добивање мрежа



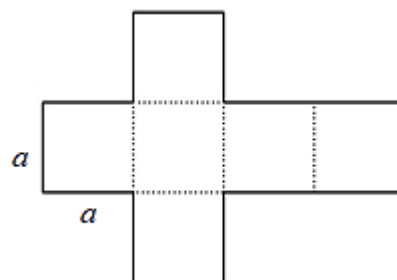
Расекување квадар и добивање мрежа

Пример 1. Пресметај ја плоштината на коцка со раб $a = 4 \text{ cm}$.

Решение. Како што видовме мрежата на коцката е составена од шест квадрати со страна a .

Значи, мрежата на коцката е составена од нејзините сидови, па затоа плоштината на коцката е еднаква на плоштината на мрежата. Значи, плоштината на коцката е $P = 6a^2$. Во нашиот случај добиваме

$$P = 6 \cdot 4^2 = 6 \cdot 24 = 144 \text{ cm}^2.$$



Во претходниот пример ние всушност утврдивме дека:

Плоштината на коцка со раб a се пресметува според формулата $P = 6a^2$.

Пример 2. Плоштината на коцката е еднаква на 96 cm^2 . Определи го нејзиниот раб.

Решение. Со a да ја означиме должината на работ на коцката. Нејзината плоштина е $P = 6a^2$, па од условот на задачата следува $6a^2 = 96$. Значи, $a^2 = 96 : 6 = 16$, од каде добиваме $a = 4 \text{ cm}$.

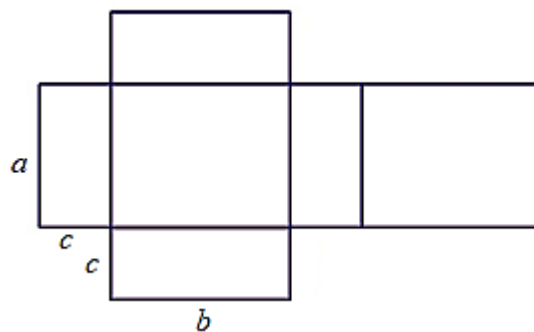
Пример 3. Пресметај ја плоштината на квадар со рабови $a = 8 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$ и $c = 3 \text{ cm}$.

Решение. Како што знаеме мрежата на квадарот се состои од шест правоаголници, два по два со еднакви страни: a и b , b и c , c и a . Оттука и од формулата за плоштина на правоаголник добиваме дека плоштината на мрежата на квадарот, т.е. плоштината на квадарот е

$$P = 2(ab + bc + ca).$$

Во нашиот случај

$$P = 2(8 \cdot 6 + 6 \cdot 3 + 3 \cdot 8) = 180 \text{ cm}^2.$$



Во претходниот пример ние всушност утврдивме дека:

Плоштината на квадар со рабови a, b, c се пресметува според формулата

$$P = 2(ab + bc + ca).$$

Забелешка. Ако земеме предвид дека коцката всушност е квадар со еднакви рабови, т.е. $a = b = c$, со замена во формулата за плоштина на квадар ја добиваме формулата за плоштина на коцка.

Пример 4. Пресметај ја плоштината на квадар со рабови $a = 3\text{ cm}$, $b = 3\text{ cm}$ и $c = 6\text{ cm}$.

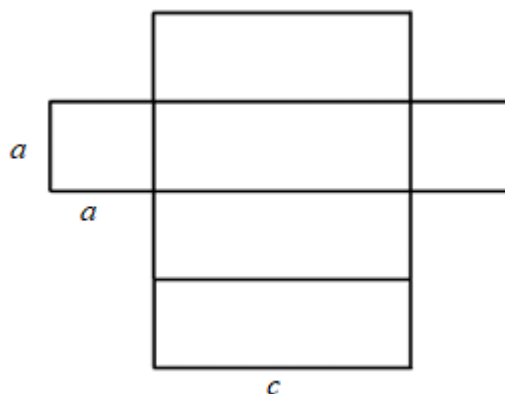
Решение. Со замена во формулата за плоштина на квадар добиваме

$$P = 2(3 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 3) = 90\text{ cm}^2.$$

Забелешка. Формулата за плоштина на квадар може да се запише во обликот

$$P = 2ab + 2bc + 2ca.$$

Сега, ако во последната формула ставиме $b = a$, добиваме дека формулата за плоштина на квадар со рабови a, a и c е: $P = 2a^2 + 4ac$.



Пример 5. Кој има поголема плоштина, квадар со рабови $a = 5\text{ cm}$, $b = 6\text{ cm}$ и $c = 7\text{ cm}$ или коцка со раб $d = 6\text{ cm}$.

Решение. Плоштината на коцка со раб $d = 6\text{ cm}$ е $P = 6 \cdot 6^2 = 216\text{ cm}^2$. Плоштината на квадар со рабови $a = 5\text{ cm}$, $b = 6\text{ cm}$ и $c = 7\text{ cm}$ е $P = 2(5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 5) = 214\text{ cm}^2$. Значи, коцката има поголема плоштина.

Пример 6. Од пет коцки секоја со плоштина 12 cm^2 составен е квадар. Колкава е плоштината на тој квадар?

Решение. Плоштината на еден сид на дадените коцки е еднаква на $12 : 6 = 2\text{ cm}^2$

Единствена можност од пет еднакви коцки да се состави квадар е тие да се наредат една до друга како што е прикажано на цртежот. Добиениот квадар има четири сида кои се составени од по 5 сида на дадените коцки и 2 сида кои се еднакви на сидовите на дадените коцки. Значи, мрежата на квадарот се состои од $4 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 22$ квадрати со плоштина 2 cm^2 . Конечно, плоштината на квадарот е еднаква на $22 \cdot 2 = 44\text{ cm}^2$.



Пример 7. Дали постои коцка со раб a , $a \in \mathbb{N}$, чија плоштина е еднаква на збирот на плоштините на квадарите со рабови 1 cm , 2 cm , 3 cm , 4 cm , 5 cm , 6 cm и 7 cm , 8 cm , 9 cm .

Решение. Збирот на плоштините на трите квадари е

$$P = 2(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1) + 2(4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 4) + 2(7 \cdot 8 + 8 \cdot 9 + 9 \cdot 7) = 552 \text{ cm}^2$$

Сега, ако постои коцка со саканото својство потребно е да важи $6a^2 = 552$, односно $a^2 = 92$. Меѓутоа, како што знаеме бројот 92 не е квадрат на природен број, па затоа заклучуваме дека не постои коцка со саканото својство.

Задачи за вежби

64. Пресметај ја плоштината на коцка ако:

а) плоштината на едниот нејзин сид е 49 cm^2 ,

б) збирот на должините на сите нејзини рабови е 48 cm .

65. Пресметај ја плоштината на квадар со должини на рабови 5 cm , 4 cm и 3 cm .

66. Плоштината на квадарот е 460 cm^2 . Пресметај го неговиот волумен ако два негови рабови се 5 cm и 12 cm .

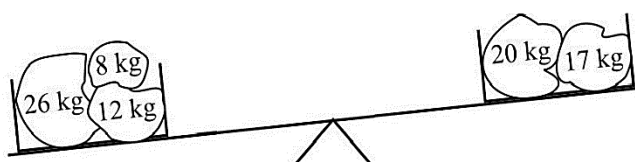
67. Една коцка има плоштина 150 cm^2 . Определи го нејзиниот волумен!

68. Волуменот на една коцка е 64 cm^3 . Определи ја нејзината плоштина!

69. Колку различни квадари може да се состават од 12 еднакви коцки со должина на раб 2 cm ? Кој од овие квадари има најголема плоштина?

Провери го своето знаење 8

1. На двата таса на вагата Доротеј ставил по неколку вреќи компири. Колку килограми компири треба да се стават на вагата за да на двете страни има еднакви маси?



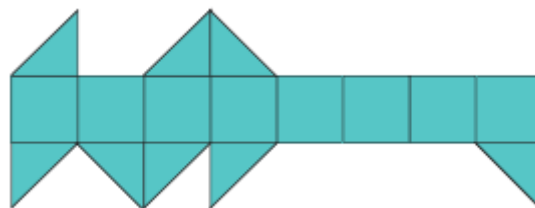
2. Хари Потер учествува на натпревар во летање со метла, при што се летаат пет круга. Времето кога Хари ја поми-нува почетната (стартната) точка е прикажан во табелата. Кој круг тој го поминал за најкратко време?
3. Колку е периметарот на четириаголникот со страни 4 cm , 5 cm , 8 cm и 7 cm .

	ВРЕМЕ
старт	09:55
по прв круг	10:26
по втор круг	10:54
по трет круг	11:28
по четврт круг	12:03
по петти круг	12:32

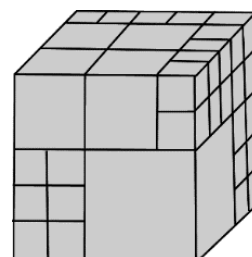
4. Во правоаголник е повлечена симетралата на еден од неговите агли, која што ја дели страната на отсечки 17 cm и 13 cm . Колку е периметарот на правоаголникот?

5. Даден е рамностран триаголник со страна 18 cm . Должината на едната страна на делтоид кој има периметар еднаков на периметарот на триаголникот е 16 cm . Пресметај ја должината на другата страна на делтоидот.

6. 2Д формата е составена од рамнокраки правоаголници со катети 1 cm , правоаголници и квадрати. Пресметај ја нејзината плоштина.



7. Како ќе се промени плоштината на еден правоаголен триаголник ако едната катета се зголеми петпати, а другата катета се намали двапати.
8. Што има поголем волумен – коцка со раб 10 cm или квадар со рабови 9 cm , 10 cm и 11 cm ?
9. Колку различни квадари може да се состават од 6 еднакви коцки со должина на раб 2 cm ? Кој од овие квадари има најголема плоштина?
10. На цртежот е прикажана коцка која е расечена на помали коцки на следниот начин: 1 коцка со раб 3, 4 коцки со раб 2, а останатите коцки се со раб 1. Колку коцки се со раб 1?



5 РАБОТА СО ПОДАТОЦИ

- 5.1 Собирање податоци
- 5.2 Сливовит и кружен дијаграм
- 5.3 Линиски и столбест дијаграм
- 5.4 Аритметичка средина, мода, медијана и ранг
- 5.5 Експеримент и настан. Експериментална веројатност
- 5.6 Елементарни настани. Веројатност
- 5.7 Споредување експериментална и теоретска веројатност

Во претходните одделенија се запозна со работата со податоци, при што научи за средувањето податоци и нивното претставување со дијаграми. Исто така научи да определуваш мода, и да пресметуваш медијана, ранг и аритметичка средина на податоци. Со усвојувањето на содржините од оваа тема ќе ги прошириш своите знаења и ќе можеш:

- да правиш план за истражување, изработуваш и користиш прашалник за собирање податоци,
- да собираш и средуваш податоци, со што ќе добиваш табели за групирани податоци и по потреба податоци групирани во еднакви интервали,
- податоците да ги претставуваш со пиктограми, кружни, столбести и линиски дијаграми,
- да читаш податоци од различните видови дијаграми,
- да наоѓаш мода и модална класа за податоци групирани во еднакви интервали,
- да пресметуваш аритметичка средина, ранг и медијана,
- да определуваш дали настан е невозможен, сигурен или има веројатност поголема од 0 и помала од 1,
- за поедноставни експерименти да го определуваш множеството елементарни настани,
- во поедноставни случаи да определуваш веројатност врз основа на еднаквоверојатни елементарни настани, и
- во поелементарни случаи да споредуваш експериментална и теоретска веројатност.

5.1 Собирање податоци

Да се потсетиме!

Податоците може да се приберат на различни начини, но најчесто до нив доаѓаме со набљудување, мерење, споредување, броење и со поставување прашање, односно со пополнување прашалник. Меѓутоа, до податоци може да се дојде и со пребарување списанија, енциклопедии и друга научна и стручна литература.

Понатаму, знаеме дека прибраните податоци ги обработуваме, што првенствено подразбира нивно претставување во *низи*, *табели* и со помош на *дијаграми*. Табелата е составена од правоаголници (полиња) кои се подредени во колони и редови, во кои се внесуваат податоците. Притоа, ако еден податок x е застапен k пати велиме дека има честота (фреквенција) k .

Честота (фреквенција) е бројот што покажува колку пати е застапен некој податок во групата податоци која ја разгледуваме.

Дијаграм е графичкото претставување на податоците со точки, прави, 2Д форми и 3Д форми.

Пример 1. Марко во текот на една седмица бележел колку часови секој ден греело сонце. Тој податоците ги внесол во следнава табела:

Ден	По.	Вт.	Ср.	Че.	Пе.	Са.	Не.
Број на часови	7	6	5	8	4	5	6

Од податоците гледаме дека во текот на набљудуваната седмица вкупно имало: $7+6+5+8+4+5+6=41$ сончев час. Најсончев ден бил четврток, најмалку сончеви часови имало во петок, а во вторник и недела имало еднаков број сончеви часови.

Пример 2. Марко ја продолжил својата активност со бележењето сончевите часови во текот на еден ден. Тој го набљудувал и го бележел бројот на сончевите часови во текот на 60 денови и ја добил низата броеви:

7, 6, 5, 8, 4, 5, 6, 9, 6, 5, 4, 7, 3, 0, 0, 8, 5, 4, 5, 6, 9, 7, 7, 6, 3, 5, 6, 4, 4, 8,
7, 7, 9, 5, 3, 7, 7, 4, 8, 8, 5, 7, 0, 2, 1, 2, 1, 4, 5, 7, 8, 6, 5, 3, 6, 7, 4, 3, 7, 5.

Ако ги преброиме добиените податоци ќе ја добиеме табелата:

Сончеви час. (x_i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Честота (n_i)	3	2	2	5	8	11	8	12	6	3

Од податоците во табелата можеме да видиме дека најмногу денови имало со 7 сончеви часови, а најмалку денови имало со 1 и 2 сончеви часови.

Во претходниот пример ние всушност ги групиравме податоците во десет групи: од 0 до 9 сончеви часови. Притоа во секоја група ги ставивме еднаквите податоци, со што всушност ја добивме честотата на секој податок.

Пример 3. Селма решила да прибере податоци за каков вид филм најмногу сакаат да гледаат учениците од седмо одделение во нејзиното училиште. Таа на 80 ученици им поделила картончиња на кои требало да запишат една од буквите: А (акционен), К (комедија), Ф (фантастика), Т (трилер), Ц (цртан) и И (историски). Откако децата ги пополниле картончињата и ги вратиле назад, таа ја добила низата:

А, Ф, К, А, Ф, Т, К, И, Ц, Ц, И, А, Т, И, Ф, К, И, Т, А, Ф,
И, Т, А, И, К, Ц, И, А, И, Ф, И, Т, И, Ф, И, Ц, А, Ф, А, Ц,
К, А, Ф, Ц, Т, А, И, Ф, Ц, И, Т, А, И, К, И, Т, И, Ф, А, К,
Ф, А, Ц, А, Ф, К, А, Ц, Ф, Т, А, Ф, А, Ц, Т, А, Т, А, Ц, А,

Ако ги преброиме добиените податоци ќе ја добиеме табелата:

Вид на филм	Акционен	Комедија	Фантастика	Трилер	Цртан	Историски
	/// /// /// ///	///	/// ///	/// ///	/// ///	/// /// ///
Честота (n_i)	20	8	14	11	11	16

Од податоците во табелата можеме да видиме дека децата најмногу сакаат да гледаат акциони филмови, а најмалку комедии.

Пример 4. Податоците за оддалеченоста, изразени во метри, на 100 ученици од училиштето се:

60, 150, 175, 143, 40, 470, 430, 515, 760, 370, 210, 40, 230, 610, 300,
625, 755, 625, 440, 380, 420, 610, 120, 130, 465, 890, 255, 460, 900,
640, 615, 670, 770, 190, 320, 520, 580, 625, 505, 345, 770, 244, 530,
185, 330, 525, 920, 560, 630, 750, 650, 780, 700, 740, 340, 470, 177,
184, 750, 288, 780, 230, 540, 280, 618, 550, 390, 860, 490, 298, 360,
880, 720, 595, 590, 990, 365, 570, 740, 960, 660, 595, 380, 550, 620,
480, 345, 920, 580, 305, 670, 730, 840, 385, 930, 790, 332, 490, 940, 330.

Како што гледаме во многу голем распон од 40 до 990 метри имаме само 100 податоци. Овие податоци се многу расфрлени, па затоа во ваков случај податоците ги групираме во интервали, кои најчесто се со еднаква должина. Во нашиот случај ние интервалот од 0 до 1000 ќе го поделиме на пет интервали и во нив ќе ги групираме податоците. Така ја добиваме табелата:

Оддалеченост од училиштето					
Интервал	0 – 200	200 – 400	400 - 600	600 - 800	800 - 1000
Ученици	12	24	25	28	11

Како што можеме да видиме во групата кои од училиштето се оддалечени помеѓу 600 и 800 метри има најмногу ученици, а во групата кои од училиштето се оддалечени од 800 до 1000 метри има најмалку ученици.

Како што рековме за да добиеме податоци ние најчесто набљудуваме, мериме и поставуваме прашања, што значи дека ние истражуваме проблем кој сме го задале. Истражувањето е сложена активност, па за истото да биде успешно треба да направиме *план за истражувањето*.

Со планот за истражувањето ние ја организираме нашата работа и определубаме што ќе користиме при истражувањето. Да разгледаме еден пример.

Чекор 1. Што се истражува?

Наставникот Петар сака да организира летен пливачки камп, за што на своите ученици сака да им понуди три локации: Охрид, Струга и Дојран. Понатаму, тој знае дека меѓу неговите ученици има кои знаат да пливаат и ученици кои не знаат да пливаат. Вообичаено е во текот на кампот да се организира екскурзија, но Петар сака да знае дали тоа го сакаат учениците, кои се заинтересирани за кампот, бидејќи за тоа се потребни дополнителни средства. Исто така, Петар сака да знае дали е потребно да се ангажираат игралишта за други спортови: баскет, тенис и мал фудбал, за што повторно дополнително се доплаќа.

Чекор 2. Како Петар ќе добие одговор на сите овие прашања?

Во овој случај нема што да мериме, споредуваме, броиме и набљудуваме. Затоа, Петар треба да состави прашалник, во кој за работите што сака да ги знае ќе постави соодветни прашања.

Чекор 3. Петар го составува прашалникот, при што прашањата мора се јасни, прецизни, разбирливи и да се во врска со тоа што истражува. Понатаму, прашалникот мора да содржи упатство за тоа како треба да се одговара на прашањата.

Еве како може да изгледа прашалникот на наставникот Петар.

ПРАШАЛНИК

за учениците од седмо одделение од ОУ _____.

Упатство за пополнување на прашалникот:

- На прашањето на кое се понудени повеќе одговори пред твојот одговор во квадратчето стави го знакот X.

- На прашањето на кое треба да дополниш на линијата запиши го твојот одговор.

1. Пол: ☐ машки, ☐ женски

2. Во кој град сакаш да се организира летниот камп за пливање

☐ Охрид

☐ Струга

☐ Дојран

3. Дали знаеш да пливаш:

☐ ДА

☐ НЕ

4. Дали сакаш во текот на кампот да има едnodневна екскурзија (се доплаќа 500 денари):

☐ ДА

☐ НЕ

5. Заокружи го спортот со кој дополнително сакаш да се занимаваш (се доплаќа 1000 денари):

☐ тенис

☐ баскет

☐ мал фудбал

☐ ниту еден

Чекор 4. Петар го дели прашалникот на учениците и откако ќе ги добие пополнетите прашалници пристапува кон средување на податоците, на начин како што претходно покажавме. Јасно, во случајот ќе имаме групирани податоци.

Чекор 5. Петар ги анализира добиените податоци, по што на учениците им ги сопштува резултатите од истражувањето. При анализата пожелно е да користи дијаграми, мода и слично.

Задачи за вежби

1. Јанко прибрал податоци за видот на домашните миленичиња: мачка (М), куче (К), птица (П) и риба (Р), што ги има секој ученик во седмо одделение во неговото училиште и ја добил низата:

М, К, П, К, Р, П, К, К, Р, М, К, П, Р, К, М, К, Р, М, П, Р, К, Р, П, К,
К, П, К, М, Р, П, М, П, Р, П, М, Р, П, М, Р, Р, П, Р, М, П, М, Р, Р, К,
М, П, М, Р, М, М, К, Р, М, П, Р, К, Р, М, Р, Р, П, Р, М, П, П, К, Р, М.

Состави табела од добиените податоци.

2. На тест по математика максималниот број поени е 20. Учениците од седмо одделение на кои им предава наставникот Алит ги освоиле следниве поени:

6, 15, 17, 14, 4, 7, 10, 15, 16, 7, 20, 14, 20, 10, 13, 15, 17, 16, 4, 18, 12, 16, 12, 13, 16,
19, 12, 14, 19, 14, 11, 7, 17, 9, 12, 15, 18, 12, 5, 13, 7, 14, 13, 18, 13, 12, 9, 16, 16, 17,
15, 8, 11, 17, 13, 14, 11, 14, 5, 18, 8, 12, 15, 12, 11, 15, 13, 8, 9, 8, 13, 8, 7, 9, 15, 19,
13, 7, 14, 16, 6, 9, 18, 15, 6, 8, 13, 9, 8, 15, 7, 13, 8, 15, 9, 10, 12, 14, 9, 13

а) Состави табела од добиените податоци.

б) Добиените податоци групирај ги во пет интервали со еднаква должина.

3. Михаил живее во зграда во која има 50 станови во кои живеат двочлени, тричлени и повеќечлени семејства. Тој сакал да знае колку вода има потрошено во текот на месец декември 2025 година секое семејство во неговата зграда, па затоа ги собрал податоците: 11, 7, 14, 11, 5, 11, 13, 5, 11, 11, 5, 14, 14, 7, 4, 6, 12, 12, 15, 14, 6, 12, 14, 5, 11, 10, 12, 12, 6, 10, 12, 14, 5, 13, 6, 5, 13, 13, 14, 11, 5, 14, 12, 6, 14, 6, 12, 12, 13 и 13.

а) Состави табела од добиените податоци.

б) Добиените податоци групирај ги во пет интервали со еднаква должина.

5.2 Сливовит и кружен дијаграм

Да се потсетиме! Во секојдневниот живот често пати се среќаваме со податоци, за чие претставување користиме табели и дијаграми. Табелите ги добиваме со броење и средување на податоците, а потоа податоците ги претставуваме со дијаграми. Веќе знаеш дека за претставување на податоците се користат четири типа дијаграми и тоа: сликовит, кружен, линиски и столбест дијаграм. Во оваа лекција ќе повториме за сликовитиот дијаграм и ќе научиме нешто ново за истиот.

Сликовит дијаграм (пиктограм) е начин на претставување на податоци со користење слики и симболи.

Пример 1. Податоците за бројот на учениците кои во текот на една работна седмица по денови ја посетиле училишната библиотека се прикажани во табелата. Претстави ги овие податоци со пиктограм!

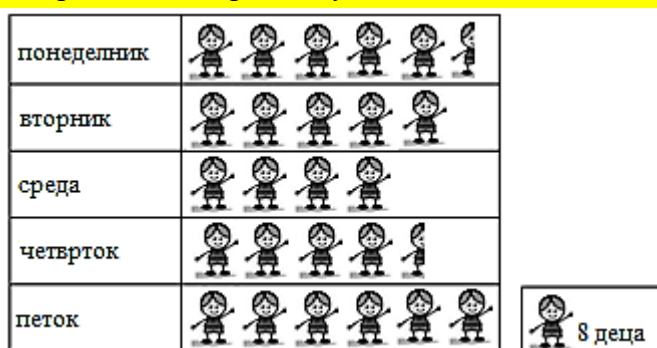
Решение. Како што можеме да забележиме броевите 44, 40, 32, 36 и 48 се деливи со 4 и тоа е нивниот најголем заеднички делител. Затоа можеме за 4 деца да користиме еден знак. Но, тогаш за 48 деца треба да користиме 12 знаци. Затоа за претставување на 8 деца ќе користиме еден знак, а половина знак ќе користиме за претставување на 4 деца.

За претставување на група од 8 деца ќе го користиме знакот . Сега од

$$\begin{aligned} 44 &= 5 \cdot 8 + 4, & 40 &= 5 \cdot 8, \\ 32 &= 4 \cdot 8, & 36 &= 4 \cdot 8 + 4, \\ 48 &= 6 \cdot 8, \end{aligned}$$

следува прикажаниот пиктограм.

	издадени книги
понеделник	44
вторник	40
среда	32
четврток	36
петок	48



Пример 2. Група деца учествувале во анкета за омилениот вкус на сладолед. Добие-ните податоци од анкетата се прикажани со помош на пиктограм и се дадени на цртежот.

- Колку деца најмногу сакаат сладолед од ванила?
- Колку деца најмногу сакаат сладолед од банана?
- За колку е бројот на децата кои најмногу сакаат сладолед од чоколадо е поголем од бројот на децата кои најмногу сакаат сладолед од малина?

г) Колку деца учествувале во анкетата?

Решение. Од пиктограмот гледаме дека еден корнет означува група од 4 деца.

а) Сладолед од ванила најмногу сакаат 3 групи од по четири деца, односно $3 \cdot 4 = 12$ деца.

в) Сладолед од банана најмногу сакаат 2 групи од 4 деца, односно $2 \cdot 4 = 8$ деца.

в) Сладолед од чоколадо најмногу сакаат $5 \cdot 4 = 20$ деца, а сладолед од малина најмногу сакаат $4 \cdot 4 = 16$ деца. Според тоа, бараниот број е $20 - 16 = 4$ деца.

г) Со пиктограмите се прикажани $5 + 3 + 4 + 1 + 2 = 15$ групи од 4 деца и една група од $4 : 2 = 2$ деца. Значи, во анкетата учествувале $15 \cdot 4 + 2 = 62$ деца.



Сите видови дијаграми имаат свои предности и недостатоци. Предности при користење на пиктограмите се:

- лесно се читаат податоците и
- едноставно се споредуваат податоците,

а нивни недостатоци се:

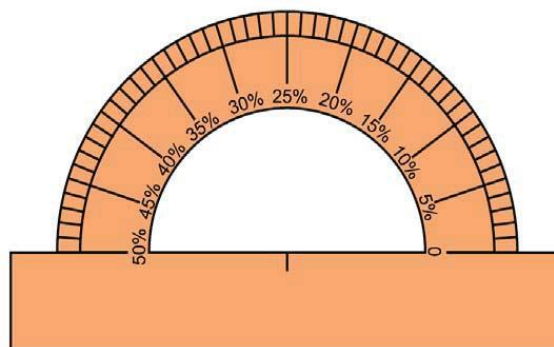
- за да се утврди точниот број мора да се пресметува и
- за да се прикаже точен број понекогаш мора да се користат и делови од знакот (симболот).

Податоците дадени во проценти или како дел од целото најчесто се претставуваат со таканаречениот кружен (секторски) дијаграм.

Секторскиот (кружниот) дијамаграм е круг во кој со кружни исечоци се претставуваат делови од целото, кои прво се изразуваат во проценти.

За да нацртаме секторски дијаграм користиме процентен агломер на кој е дадена скала од која се читаат проценти, како на цртежот, или пак користиме обичен агломер и пресметуваме.

Како што знаеме половина од кругот е 50% од целиот кругот и има 180° . Значи, 1% се претставува со агол од $180 : 50 = 3,6^\circ$. Се-



га, ако сакаме да претставиме 15%, тогаш цртаме централен агол од $15 \cdot 3,6 = 54^\circ$, а за да претставиме 18%, цртаме агол од $18 \cdot 3,6 = 64,8^\circ \approx 65^\circ$ итн.

Пример 3. Распределбата на буџетот на едно семејство е дадена во табелата.

Месечни трошоци							
леб	месо	млечни производи	растителни производи	облека	транспорт	станбени трошоци	друго
8000	8000	12000	20000	8000	4000	12000	8000

Претстави го буџетот на ова семејство со кружен дијаграм.

Решение. Ако собереме сите трошоци на ова семејство, добиваме дека неговиот месечен буџет : $4 \cdot 8000 + 2 \cdot 12000 + 20000 + 4000 = 80000$ денари. Според тоа, за леб, месо, облека, и други трошоци ова семејство издвојува по $\frac{8000}{80000} \cdot 100 = 10\%$, за станбени трошоци и млечни производи издвојува по $\frac{12000}{80000} \cdot 100 = 15\%$, за растителни производи из-



двојува $\frac{20000}{80000} \cdot 100 = 25\%$ и $\frac{4000}{80000} \cdot 100 = 5\%$ за транспорт. Кружниот дијаграм е прикажан на цртежот.

Пример 4. Елвис работи во компанија во која има 150 вработени. Во акција за подобра животна средина било побарано вработените да пополнат анкета за начинот на кој доаѓаат на работа. Резултатите од анкетата се дадени на секторскиот дијаграм. Пресметај го бројот на вработените за секој од дадените начини на доаѓање на работа.

Решение. Од 150 вработени 10% на работа доаѓале пеш, а тоа е $\frac{150 \cdot 10}{100} = 15$ вработени. Со автобус доаѓале $\frac{150 \cdot 18}{100} = 27$ луѓе, со автомобил $\frac{150 \cdot 24}{100} = 36$, со велосипед $\frac{150 \cdot 36}{100} = 54$ и со такси $\frac{150 \cdot 12}{100} = 18$ вработени.



Предноста на секторскиот дијаграм е во тоа што одлично се споредуваат целото и деловите од целото, а главни негови недостатоци се:

- за да се утврди точниот број мора да се пресметува и
- тешко се користи кога деловите од целото се многу мали.

Задачи за вежби

4. Еден фудбалски клуб пред почетокот на сезоната се засилил со неколку познати фудбалери. Заради тоа продажбата за дресови во неговата продавница за сувенири се зголемила. Продажбата е прикажана со пиктограмот. Колку маици во секој од дадените месеци се продавале? Колку маици вкупно се продале?



5. Податоците за бројот на туристите кои престојувале во Охрид во месеците мај, јуни, јули, август, септември и октомври се дадени во табелата. Претстави ги овие податоци со пиктограм користејќи ја сликата !

Употреби што е помалку можно сликички!

	издадени книги
мај	55000
јуни	60500
јули	88000
август	82500
септември	66000
октомври	49500

6. Производството на овошје во едно земјоделско стопанство е дадена со кружниот дијаграм. Колку овошје е произведено од секој вид ако се знае дека производството на праски е 750 тони?
7. Семејниот буџет на Симонови го сочинуваат 58000 денари платата на таткото, 48000 денари плата на мајката, 42000 пензијата на дедото, 44000 пензијата на бабата и 8000 денари степендијата на Марко. Прикажи ги со кружен дијаграм вкупните месечни приходи на семејството Симонови.



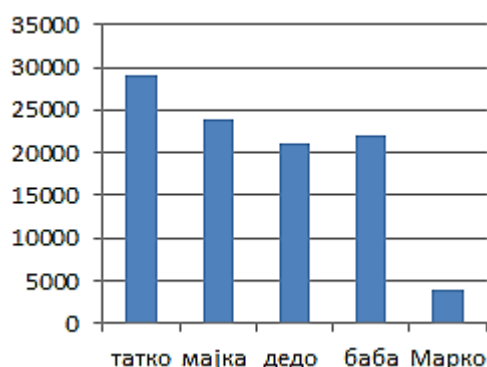
5.3 Линиски и столбест дијаграм

Во претходната лекција ги разгледавме пиктограмите и кружните дијаграми. Во оваа лекција повториме и ќе ги прошириме знаењата за линискиот и столбестиот дијагра.

Столбестиот дијаграм се состои од вертикални (хоризонтални) правоаголници кои имаат иста основа, а висината го претставува бројот на податоците.

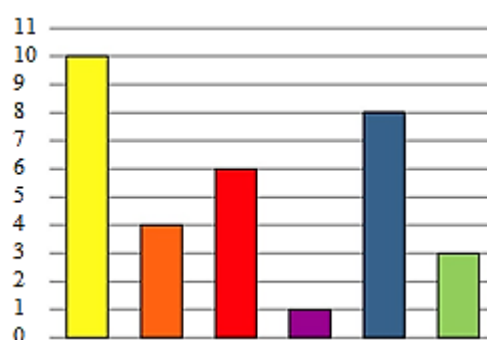
Пример 1. Семејниот буџет на Стојанови го сочинуваат: 29000 денари платата на таткото, 24000 денари плата на мајката, 21000 пензијата на дедото, 22000 пензијата на бабата и 4000 денари степендијата на Марко.

На цртежот е прикажан столбестиот дијаграм за семејниот буџет на ова семејство. Истиот е нацртан така што за сите правоаголници се избрани еднакви основи, а висините се еднакви на приходите на одделните членови на ова семејство.



Пример 2. Лирим, Марко, Ангел, Фуад, Иван и Борис во минатата година биле стрелци за фудбалската екипа на своето училиште. Дијаграмот прикажува колку вкупно голови постигнал секој од нив, но имињата недостасуваат. Определи кој колку голови постигнал, ако се знае дека:

- 1) Марко постигнал два гола помалку од Лирим,
- 2) Иван постигнал најмалку голови,
- 3) Бројот на головите на Лирим е еднаков на бројот на головите кои заедно ги постигнале Фуад и Ангел,



4) Фуад постигнал два пати повеќе голови од Борис.

Решение. На дијаграмот се прикажани броевите 1, 3, 4, 6, 8 и 10. Најмал број е 1, што значи дека Иван постигнал еден гол. Од броевите 3, 4, 6, 8 и 10 само збирот на 4 и 6 е еднаков на трет од дадените броеви, што значи дека Лирим постигнал 10 голови, а Фуад и Ангел постигнале 4 и 6 голови во некој редослед. Значи, Борис и Марко постигнале 3 и 8 голови во некој редослед. Сега, бидејќи Фуад постигнал два пати повеќе голови од Борис, заклучуваме дека Борис постигнал 3 гола, Фуад постигнал 6 гола. Конечно, останува Ангел да постигнал 4 гола, а Марко 8 гола.

Како што можеме да видиме предности на столбестиот дијаграм се:

- лесно се читаат податоците,
- едноставно се споредуваат големините,

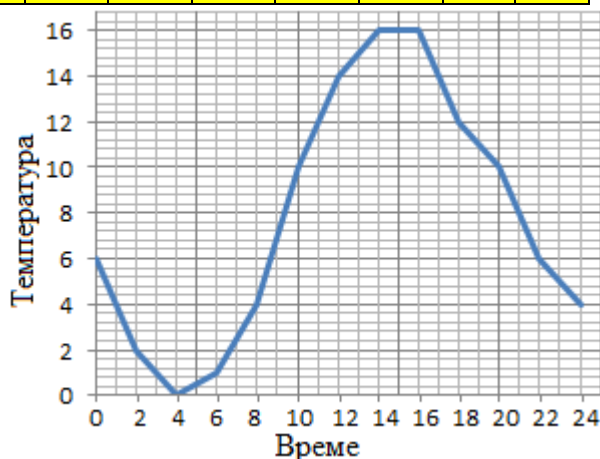
а додека недостатоци се:

- ако столбовите се со блиска висина, тешко се читаат податоците,
- зависно од скалата може да настане забуна за вистинските разлики на некои податоци.

Пример 3. Марија на секои два часа ја мерела температурата на воздухот (во $^{\circ}\text{C}$) во текот на едно деноноќие и ги добила податоците прикажани во табелата:

Температура во текот на едно деноноќие													
час	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
температура	6°	2°	0°	1°	4°	10°	14°	16°	16°	12°	10°	6°	4°

Потоа таа во координатен систем со хоризонталната оска – времето, а вертикалната оска - температурата ги означила точките и соседните точки ги поврзала со отсечки. На тој начин Марија го добила линискиот дијаграм прикажан на цртежот.



Како што можеме да видиме предности на линискиот дијаграм се:

- лесно се читаат податоците,
- едноставно се споредуваат големините,

а додека недостатоци се:

- зависно од скалата може да настане забуна за вистинските разлики на некои податоци.

Задачи за вежби

8. На дадениот линиски дијаграм се дадени податоците за тоа колку часови во текот на едно деноноќие треба да спијат луѓето од различните возрасни групи.

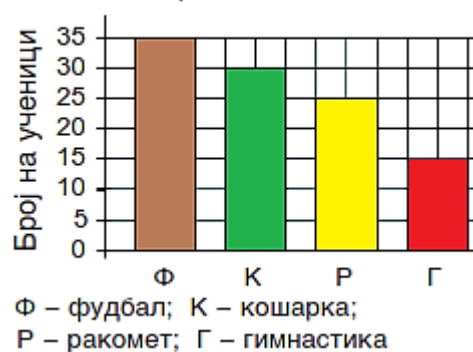
- а) Податоците од линискиот дијаграм претстави ги во табела.
б) Што можеш да кажеш за потребата од спиење на луѓето од 15 до 25-годишна возраст, а што за оние од 30 до 40-годишна возраст?



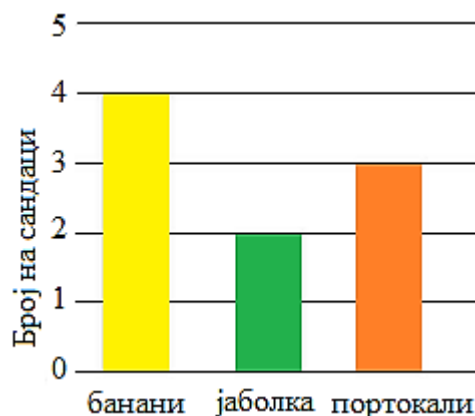
9. Газменд направил анкета за омилениот спорт на учениците од седмо одделение во неговото училиште.

- а) Податоците претставени на дијаграмот внеси ги во табела.
б) Колку ученици анкетирал Газменд?
в) Дали повеќе ученици сакаат фудбали и гимнастика, или пак кошарка и ракомет?

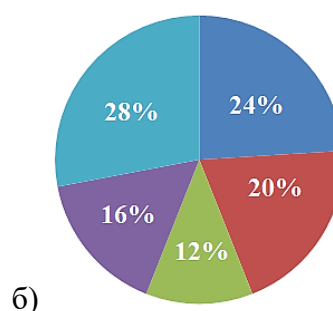
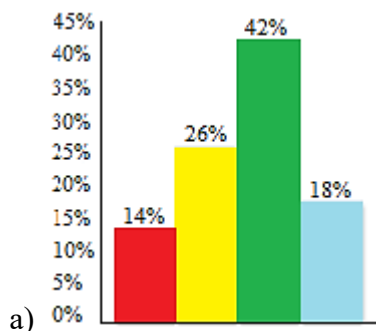
Омилен спорт



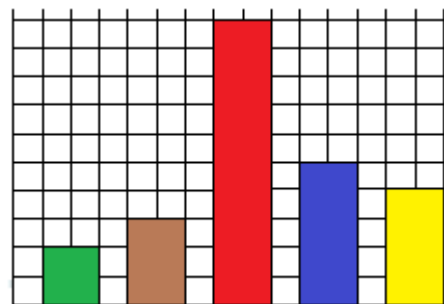
10. Во складиште се наоѓаат вкупно 315 kg овошје запакувано во сандаци. Во секој сандак се наоѓа еднакво количество овошје. Бројот на сандаци на одделните видови овошје е прикажан на дијаграмот. По колку килограми овошје имало од секој вид во складиштето?



11. а) Податоците од столбестиот дијаграм претстави ги на секторски (кружен) дијаграм.
б) Податоците што се прикажани на секторскиот (кружниот) дијаграм прикажи ги со столбест дијаграм.



12. По анкетата која ја реализирал со 96 ученици од седмо одделение од своето училиште Горазд нацртал столбест дијаграм но на вертикалната оска на која го прикажувал бројот на учениците не ги запишал броевите, а не ги запишал ниту спортовите на хоризонталната оска. Запамтил дека со пливање се занимава пет пати повеќе ученици отколку со тенис, а двојно повеќе ученици отколку со ракомет. Кошаркари има помалку отколку фудбалери. Колку ученици се занимаваат со кошарка?



5.4 Аритметичка средина, мода, медијана и ранг

Да се потсетиме!

Аритметичка средина на два или повеќе броја е количникот од збирот на тие броеви и бројот на собирачите.

Ако се дадени податоците $x_1, x_2, \dots, x_n$, тогаш нивната аритметичка средина е

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Ако податокот x_1 се јавува n_1 пати, податокот x_2 се јавува n_2 пати, ..., податокот x_k се јавува n_k пати, тогаш имаме вкупниот број податоци е еднаков $n_1 + n_2 + \dots + n_k$, а нивниот збир е $n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k$, па затоа нивната аритметичка средина е

$$\frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}.$$

Пример 1. Библиотекарката Ана во табела секоја позајмена книга ја бележела со вертикална или коса црта. Потоа преброила колку книги позајмила секој работен ден.

а) Кој ден Ана позајмила најмногу книги?

б) Колку книги таа седмица вкупно биле позајмени?

в) Колку книги Ана позајмувала просечно на ден?

Ден	Позајмени книги	
Понеделник		27
Вторник		25
Среда		24
Четврток		30
Петок		34

Решение. а) Од податоците во табелата гледаме дека Ана најмногу книги позајмила во петокот и тоа 34.

б) Вкупниот број позајмени книги е $27 + 25 + 24 + 30 + 34 = 140$.

в) За да пресметаме колку книги Ана просечно позајмувала на ден треба да најдеме аритметичка средина на броевите 27, 25, 24, 30 и 34. Имаме $\frac{27+25+24+30+34}{5} = \frac{140}{5} = 28$, што значи дека Ана просечно позајмувала 28 книги на ден.

Пример 2. На тестовите по биологија Елвис ги постигнал следниве резултати: прв тест 86 поени, втор тест 82 поени, трет тест 79 поени, четврт тест 78 поени и петти тест 98 поени, шести тест 88 поени, седмо тест 76 поени и осми тест 93 поени.

а) Претстави ги податоците во табела.

б) За да на крајот од учебната година Елвис добие петка, тој треба да просечно да освои 85 и повеќе поени. Дали Елвис ќе добие петка?

Решение. а) Податоците се претставени во следнава табела:

тест	1	2	3	4	5	6	7	8
поени	86	82	79	78	98	88	76	93

б) Просечниот број поени што го освоил Елвис на тестовите е еднаков на аритметичката средина на освоените бодови на сите тестови, односно на

$$\frac{86+82+79+78+98+88+76+93}{8} = \frac{680}{8} = 85.$$

Значи, Елвис на крајот на учебната година ќе добие петка.

Пример 3. Учениците Иван, Елвис, Михаела, Ана и Мерлинда на крајот на учебната година го покажале следниов успех по одделни предмети:

ученик	мајчин јазик	англиски јазик	матема.	билог.	истор.	геогр.	лик. восп.	муз. восп.	физ. восп.
Иван	4	3	3	4	5	5	5	4	5
Елвис	3	4	3	3	4	5	5	4	5
Михаела	5	5	4	5	5	3	4	4	5
Ана	4	5	5	4	4	5	5	5	5
Мерлинда	5	5	4	4	4	5	5	5	4

Со точност до две децимални места определи го средниот успех на секој ученик одделно и рангирај ги според покажаниот среден успех.

Решение. Збирите на оценките на учениците и средниот успех (аритметичката средина на добиените оценки) на секој ученик се дадени во табелата. Бидејќи

$$4,00 < 4,22 < 4,44 < 4,56 < 4,67$$

редоследот од најмал до најголем просечен успех е: Елвис, Ива, Михаела, Мерлинда и Ана.

ученик	збир	среден успех
Иван	38	4,22
Елвис	36	4,00
Михаела	40	4,44
Ана	42	4,67
Мерлинда	41	4,56

Податокот кој што се јавува најчесто во една низа податоци го нарекуваме *мода* и го означуваме со *Мо*. Ако податоците се групирани во интервали со еднаква должина, тогаш интервалот кој содржи најмногу податоци го нарекуваме *модална класа*.

Податокот кој се наоѓа во средината на низата, кога членовите на низата ќе се подредат почнувајќи од најмалиот го нарекуваме *медијана* и го означуваме со *Ме*. Ако

низата има парен број членови, тогаш за медијана се зема аритметичката средина на два-та средни членови на низата, а при непарен број членови тоа е средниот член

Разликата меѓу најголемата вредност на податоците и најмалата вредност на податоците ја нарекуваме *ранг (опсег)*.

Пример 4. Ако оценките на Иван од пример 3 ги подредиме по големина почнувајќи од најмалата добиваме: 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5. Бројот 3 се јавува два пати, бројот 4 се јавува три пати и бројот 5 се јавува четири пати. Значи, $M_o = 5$. Понатаму, од деветте оценки петта е 4, што значи дека $M_e = 4$.

Пример 5. Арлинда ја истражувала цената на чоколадото *Вкус*. За таа цел направила истражување со посета на продавници и ги забележила следните цени:

66	65	68	70	68	65	69	67	67	68	70	67	66	65	67	69	68	65	67	65
66	68	66	65	66	65	68	70	66	67	69	65	67	68	70	67	66	67	69	67

Опреди ги аритметичката средина, модата, медијаната и рангот на податоците кои ги добила Арлинда.

Решение. Ако ги преброиме податоците кои ги добила Арлинда, добиваме

65: /// III , 66: /// II , 67: /// III , 68: /// II , 69: IIII , 70: IIII .

Значи, имаме групирани податоци кои се прикажани во табелата и за кои на цртежот е даден линискиот дијаграм:

x_i	65	66	67	68	69	70
n_i	8	7	10	7	4	4

Од табелата гледаме дека најчесто се јавува цената 67, што значи дека $M_o = 67$.

Најголемата цена е 70, а најмалата цена е 65, па затоа рангот (опсегот) на податоците е еднаков на $70 - 65 = 5$.

Вкупно имаме $8 + 7 + 10 + 7 + 4 + 4 = 40$ податоци. Значи низата има парен број членови. Два-та средни членови на подредената низа се дваесеттиот и дваесет и првиот. Од табелата е јасно дека двата члена се еднакви на 67, па затоа $M_e = \frac{67+67}{2} = 67$.

Збирот на податоците кои ги добила Арлинда е:

$$65 \cdot 8 + 66 \cdot 7 + 67 \cdot 10 + 68 \cdot 7 + 69 \cdot 4 + 70 \cdot 4 = 2674,$$

па затоа нивната аритметичка средина е еднаква на $\frac{2674}{40} = 66,85$.



Пример 6. Климент направил истражување за бојата на очите на учениците од седмо одделение. Тој анкетираше 120 учениците и добиените податоци ги внесол во табелата:

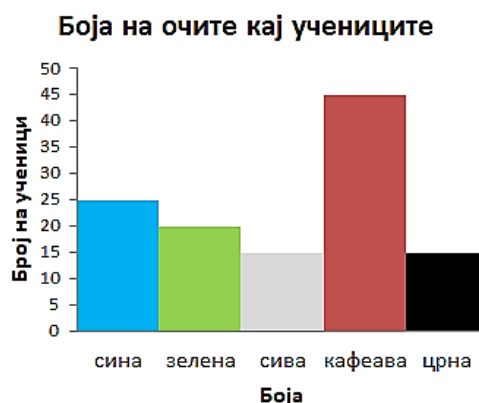
	Боја на очите				
	сина	зелена	сива	кафеава	црна
Ученици	25	20	15	45	15

- а) За добиените податоци состави столбест дијаграм.
б) Определи ја модата за податоците кои ги добил Климент?

Решение. а) Столбестиот дијаграм за дадените податоци е прикажан на цртежот.

б) Како што можеме да видиме најмногу ученици имаат кафеава боја на очите, што значи дека во случајот $M_o = 45$.

Забележуваме дека во столбестиот дијаграм на модата модата и соодветствува правоаголник со најголем висина. Што можеш да заклучиш ако податоците ги прикажеш во кружен дијаграм.



Пример 7. На систематскиот преглед на учениците од седмо одделение докторката Маринела ги измерила колку е висок секој од прегледаните 150 ученици. Мерењата ги извршила со точност до $0,5\text{ cm}$ и забележала дека најнискиот ученик е висок $131,5\text{ cm}$, а највисокиот ученик е висок 158 cm . Затоа решила податоците да ги групира во шест интервали со еднаква должина, при што ја добила табелата.

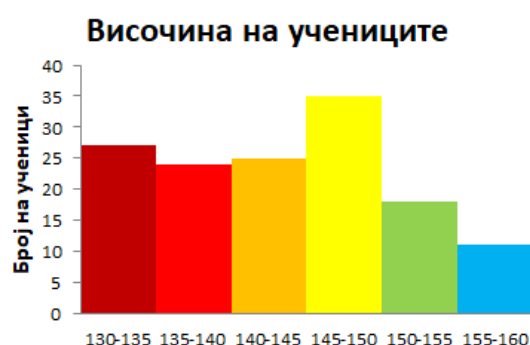
Височина на учениците						
Интервал	130-135	135-140	140-145	145-150	150-155	155-160
Ученици	27	24	25	35	18	11

а) За добиените податоци состави столбест дијаграм.

б) Најди ја модалната класа за податоците кои ги добила докторката Маринела?

Решение. а) Столбестиот дијаграм за дадените податоци е прикажан на цртежот.

б) Како што можеме да видиме најмногу ученици има во интервалот од $145 - 150\text{ cm}$, што значи дека овој интервал е модалната класа.



Задачи за вежби

13. За низата податоци определи ги модата, медијаната, рангот и аритметичката средина: а) 1, 4, 4, 4, 3, 6, 2, 4, 3, 3; б) 2, 2, 1, 5, 2, 8, 4, 1, 9, 4, 5,
14. Учениците Илина, Бајрам и Коста во текот на учебната година направиле осум теста по математика и ги освоиле следниве бодови:

	I тест	II тест	III тест	IV тест	V тест	VI тест	VII тест	VIII тест
Илина	79	78	80	81	79	80	78	80
Бајрам	81	79	78	79	82	80	81	78
Коста	80	82	79	78	81	81	80	78

Со точност до две децимални места определи го просечниот број освоени бодови на секој ученик одделно и рангирај ги според покажаниот успех.

15. Теодора ја истражувала цената на млекото *Шаренка*. За таа цел направила истражување со посета на продавници и ги забележила следните цени:

79	78	80	81	82	81	79	78	82	80
78	79	78	80	81	79	80	78	80	80
80	81	79	78	79	82	80	81	78	81
81	80	82	79	78	81	81	80	78	80

Опреди ги аритметичката средина, модата, медијаната и рангот на податоците кои ги добила Теодора.

16. Опреди ја модалната класа за податоците дадени во табелата

Маса на учениците во килограми							
Интевал	43-45	45-48	48-51	51-54	54-56	56-58	58-60
Ученици	22	25	34	36	16	9	8

17. Климент направил истражување за бојата на косата на учениците од седмо одделение. Тој анкетирал 90 учениците и ги добил податоците:

црна коса – 28, кафеава коса 34, црвена коса – 12 и жолта коса – 16.

а) За добиените податоци состави столбест дијаграм.

б) Опреди ја модата за податоците кои ги добил Климент?

5.5 Експеримет и настан. Експериментална веројатност

Многу појави и настани во природата се случуваат по определени закони и секогаш кога се исполнети определени услови. Законите од ваков вид ни овозможуваат да ги објасниме настаните од минатото и да ги предвидуваме настаните во иднината. На пример, Земјата околу Сонцето, како и Месечината околу Земјата се движат по точно определени закони. Затоа врз основа на овие закони можеме да пресметаме кога во иднината ќе имаме помрачување на Сонцето, односно помрачување на Месечината, но и да се пресмета кога во минатото се случиле такви помрачувања.

Меѓутоа, постојат појави и настани кои при определени услови некогаш се реализираат, а некогаш не се реализираат. Да разгледаме еден ваков пример.

Пример 1. Михаил на рамна површина фрла правилна и хомогена монета, при што монетата ротира околу својата оска која не е нормална на површината. Во секое посебно фрлање може да падне глава (Г) или број (Б). Михаил прво направил серија од 20 фрлања на монетата и ја добил следнава низа на паѓање на број и глава:

Б, Б, Г, Б, Г, Б, Г, Г, Б, Г, Б, Б, Г, Г, Б, Г, Г, Б, Г.

Тој забележал дека 9 пати паднал број, а 11 пати паднала глава, но притоа не можел да забележи некоја законитост во редоследот на паѓањето број или глава.



Во примерот, фрлањето на монетата се реализира при точно определено *множество услови* S :

- монетата е правилна и хомогена,

- површината е рамна и
- оската на ротација на монетата не е нормална на површината.

Ваквите и слични случувања се причина за следнава дефиниција.

Секоја реализација на точно определено множество услови S се нарекува *експеримент* S . Секој резултат (исход) на експериментот S го нарекуваме *настан* во врска со експериментот S .

Настаните ги означуваме со големите букви од латиничната азбука $A, B, C, \dots$.

Пример 2. Михаил го разгледал настанот A : „падна глава“. Тој при n фрлања на монетата со $n(A)$ означил колку пати се случил настанот A , т.е. колку пати паднала глава и добил $n = 20$ и $n(A) = 11$.

Михаил дополнително направил пет серии од по $n = 100$ фрлања на монетата и за секоја серија во табела го забележал бројот $n(A)$. Притоа, тој добил различни вредности за бројот $n(A)$, но забележал дека добиените броеви приближно се еднакви на половина од вкупниот број фрлања на монетата.

Потоа тој за секоја серија го пресметал количникот $\frac{n(A)}{n}$ и добиените резултати ги запишал во следнава табела:

Серија	1	2	3	4	5
$n(A)$	51	49	48	52	52
$\frac{n(A)}{n}$	0,51	0,49	0,48	0,52	0,52

Како што рековме во сите пет серии на експериментот на Михаил при фрлањето на монетата приближно во половина од вкупниот број фрлања монетата паднала глава, односно количникот $\frac{n(A)}{n}$ на настанот A многу не се разликува од бројот $\frac{1}{2} = 0,5$. Значи, при едно фрлање не може да се предвиди дали ќе падне број или глава, но кога имаме голем број експерименти имаме законитост во појавување на настанот A : „падна глава“. Законитост од ваков вид има кај многу експерименти.

Нека при n повторувања на експериментот S се разгледува настанот A . Бројот на реализации на настанот A го нарекуваме *фреквенција (честота) на настанот* A и го означуваме со $n(A)$. Количникот $\frac{n(A)}{n}$ го нарекуваме *релативна фреквенција (честота) на настанот* A во n експерименти.

Ако релативните честоти на настанот A , на секоја од повеќе реализирани серии на експериментот S , се броеви кои се приближно еднакви меѓу себе, тогаш велиме дека настанот A е *случаен настан*. Бројот до кој се приближуваат количниците $\frac{n(A)}{n}$ од наве-

дените серии го нарекуваме *статистичка (експериментална) веројатност* на настанот A . Се означува со $P(A)$.

Пример 3. а) Според резултатите на експериментот на Михаил заклучуваме дека статистичката веројатност на настанот A : „падна глава“ е $P(A) = 0,5$.

б) Учениците Петар, Елвис и Марија експериментирале со коцка за играње. Секој од нив на рамна површина 240 пати фрлили хомогена коцка за играње така што коцката ротира, т.е. не се лизга по површината. Притоа тие ги запишувале броевите на појавувањата на 1, 2, 3, 4, 5 и 6 точки, при што ја добиле следнава табела:



Ученик	Број на паѓања на број на точки					
	1	2	3	4	5	6
Петар	38	43	39	42	39	39
Елвис	41	39	42	40	38	40
Марија	42	39	41	39	41	38

Потоа, секој од нив ја пресметал релативната честота на бројот на паднатите точки, при што ја добиле следнава табела:

Ученик	Број на паѓања на број на точки					
	1	2	3	4	5	6
Петар	0,1583	0,1792	0,1625	0,1750	0,1625	0,1625
Елвис	0,1708	0,1625	0,1750	0,1667	0,1583	0,1667
Марија	0,1750	0,1625	0,1708	0,1625	0,1708	0,1584

Забележуваме дека релативните честоти на бројот на паднатите точки се броеви кои се поголеми или еднакви на 0,1583, а се помали или еднакви на 0,1750. Но, ако ги разгледаме сите фрлања на коцката заедно и со n_i означиме колку пати паднале i точки, тогаш имаме $n = 720$ фрлања и ја добиваме табелата:

	Број на паѓања на број на точки					
	1	2	3	4	5	6
n_i	121	121	122	121	118	117
$\frac{n_i}{n}$	0,168056	0,168056	0,169444	0,168056	0,163889	0,162500

Сега, ако со $A_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ го означиме настанот „паднале i точки“, тогаш релативните честоти на настаните се приближно еднакви на $0,16 \approx \frac{1}{6}$. Ова ни дава за право да претпоставиме дека $P(A_i) = \frac{1}{6}$, за $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Како што можеме да видиме и во двата разгледани експерименти, ние определуваме статистичка (експериментална) веројатност. Со тоа, всушност, податоците од реализираните експерименти ги искористивме за *проценка* на веројатноста на настани во врска со овие експерименти.

Во врска со експериментот на Петар, Елвис и Марија да го разгледаме настанот B : „паднатиот број точки е помал од 1“. На коцката има 1, 2, 3, 4, 5 и 6 точки, па затоа никогаш не може да падне помалку од 1 точка, што значи невозможно е настанот B да се случи, т.е. $n(B) = 0$, од каде следува $P(B) = \frac{n(B)}{n} = 0$. Сега, да го разгледаме настанот C : „паднатиот број точки е помал или еднаков на 6“. Јасно, настанот C ќе се случува при секоја реализација на експериментот, што значи сигурно ќе се случи настанот C , т.е. $n(C) = n$, па затоа $P(C) = \frac{n(C)}{n} = 1$.

Невозможен настан за експериментот S е настанот што не се појавува при реализација на S и неговата веројатност е еднаква на 0.

Сигурен настан за експериментот S е настанот што се појавува при секоја реализација на S и неговата веројатност е еднаква на 1.

Ако во експериментот на Петар, Елвис и Марија разгледаме било кој друг настан во врска со фрлање коцка за играње, на пример, E : „паднал парен број точки“, или F : „паднал сложен број точки“, тогаш е $0 < n(E) = 359 < 720$ и $0 < n(F) = 238 < 720$, од каде добиваме $0 < P(E) < 1$ и $0 < P(F) < 1$, т.е. веројатностите на овие настани се меѓу 0 и 1. Но, не само за овие два настани, туку и сите настани кои се различни од сигурниот и невозможниот настан имаат веројатност меѓу 0 и 1.

Задачи за вежби

18. Определи го множеството услови S во експериментот фрлање коцка за играње.

19. Фрламе две коцки за играње, при што се исполнети условите од пример 3. Кој од настаните е невозможен, сигурен, има веројатност меѓу 0 и 1:

- а) збирот на падните броеви точки е помал од 2,
- б) збирот на паднатите броеви точки е поголем од 12,
- в) збирот на паднатите броеви точки е парен број,
- г) збирот на паднатите броеви точки е помал од 13,
- д) збирот на паднатите броеви точки е прост број.



20. Костадинка има играчка наречена вртелешка. Таа стрелката ја врти и го бележи полето на кое стрелката ќе застане. Кој од следниве настани е невозможен, сигурен, има веројатност меѓу 0 и 1:

- а) стрелката застанува на црвено поле,
- б) стрелката застанува на зелено поле,
- в) стрелката застанува на жолто, сино или црвено поле,
- г) стрелката застанува на жолто и сино поле.



21. Земи две коцки за играње и фрли ги 120 пати, при што се исполнети условите од пример 3.

а) Бележи ги честотите на зборовите на паднатиот број точки и пресметај ги релативните честоти.

б) Здружете ги добиените резултати заедно со уште четири другарчиња кои го направиле експериментот и пресметајте ги релативните честоти на зборовите на паднатиот број точки. Што забележуваш?

5.6 Елементарни настани. Веројатност

При фрлањето коцка за играње видовме дека во секое посебно фрлање може да паднат 1, 2, 3, 4, 5 или 6 точки. Јасно при секое изведување на овој експеримент се случува еден и само еден од настаните „бројот на паднатите точки е i “, каде $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Слична е состојбата со фрлањето монета, каде при секое изведување на експериментот се појавува еден и само еден од настаните *паѓа глава* или *паѓа број*.



Претходно кажаното може да се направи за секој експеримент. Тоа значи, за секој експеримент постои множество M на поединечни настани, со својство при која било реализација на експериментот се појавува еден и само еден од тие настани. Ова множество M го нарекуваме *множество елементарни настани*, а секој негов елемент ω го нарекуваме *елементарен настан*.

Пример 1. а) За експериментот фрлање монета, множеството елементарни настани M е $\{Б, Г\}$.

б) За експериментот фрлање коцка множеството елементарни настани M е $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Пример 2. Се фрлаат монета и коцка за играње. За монетата имаме две можности Б и Г, а за коцката имаме шест можности 1, 2, 3, 4, 5, 6. Комбинирајќи ги можностите за монетата и коцката добиваме дека множеството елементарни настани M за овој експеримент е $\{Б1, Б2, Б3, Б4, Б5, Б6, Г1, Г2, Г3, Г4, Г5, Г6\}$.



Пример 3. Фрламе две коцки за играње, зелена и црвена. На секоја коцка бројот на паднатите точки може да е 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Комбинирајќи ги сите можности заклучуваме дека множеството елементарни настани M за овој експеримент е:

(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6)
(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6)
(4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6)
(5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6)
(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6),



што значи дека во овој експеримент имаме 36 елементарни настани.

Во претходно разгледаните примери, а и за секој друг експеримент воочуваме дека, секој настан што е во врска со експериментот е определен со некое подмножество на множеството елементарни настани M . Затоа, *случајните настани* ги поистоветуваме со некои подмножества на множеството елементарни настани M . Притоа ќе велиме дека *се реализирал настанот* A , ако се појавил некој од елементарните настани со кои тој е определен, т.е. ако се реализирал елементарен настан ω за кој важи $\omega \in A$. Притоа за исходот ω ќе велиме дека е *поволен за настанот* A .

Бидејќи при секое изведување на еден експеримент се појавува еден и само еден од елементарните настани, а сите се елементи на M , логично е сигурниот настан да го означиме со M . Слично, не постои настан кој е поволен за невозможниот настан, па затоа овој настан го означуваме со $\emptyset$.

Пример 4. а) Во експериментот фрлање коцка настанот A : „паднатиот број е сложен“ запишан со елементарни настани е: $A = \{4, 6\}$.

б) Во експериментот фрлање две коцки за играње настанот B : „збирот на паднатите броеви точки е 9“ запишан со елементарни настани е: $B = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$.

Во претходната лекција научивме што е тоа статистичка (експериментална) веројатност и како истата се пресметува. Меѓутоа веројатноста на еден настан може да се пресмета со помош на елементарните настани.

Нека множеството елементарни настани M има n елементи, кои имаат подеднаква можност да се реализираат, т.е. тие се *еднаквоверојатни*. Тогаш секој настан A има k ($0 \leq k \leq n$) елементи и неговата веројатност ја наоѓаме според формулата

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

Значи, ако елементарните настани се еднаквоверојатни, тогаш веројатноста на настанот A е еднаква на количникот на бројот k на елементарните настани поволни за настанот A и вкупниот број елементарни настани n .

Пример 5. Во експериментот фрлање на коцка за играње определи ја веројатноста на настанот A : „паднатиот број е прост“.

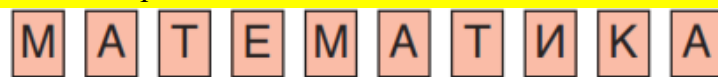
Решение. Меѓу броевите е 1, 2, 3, 4, 5 и 6, прости броеви се 2, 3 и 5. Значи, во овој експеримент множеството елементарни настани е $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, а настанот A е $A = \{2, 3, 5\}$. Значи, $n = 6$ и $k = 3$, па со замена во формулата $P(A) = \frac{k}{n}$ добиваме $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Пример 6. Во експериментот фрлање две коцки за играње определи ја веројатноста збирот на паднатиот број точки да е 8.

Решение. Според пример 3 за овој експеримент множеството M има 36 елементарни настани, што значи $n = 36$. Нека B е настанот: „збирот на паднатите броеви точки е 8“.

Тогаш, поволни елементарни настани за настанот B се: $(2, 6); (3, 5); (4, 4); (5, 3)$ и $(6, 2)$.
Значи, $k=5$ и со замена во формулата за пресметување на веројатноста добиваме $P(B) = \frac{5}{36}$.

Пример 7. Дадени се картичките:



и истите се ставени во кутија. Михаил без гледање влечи една картичка. Колкава е веројатноста да е извлечена картичка на која е буквата:

- а) А, б) М или Т, в) А или М.

Решение. Имаме вкупно 10 картички, па затоа $n=10$.

а) Буквата А е запишана на 3 картички, па затоа $k=3$ и бараната веројатност е $P(A) = \frac{3}{10}$.

б) Буквата М е запишана на 2 картички и буквата Т е запишана на две картички, па затоа $k=2+2=4$. Бараната веројатност е $P(M \text{ или } T) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

в) Буквата А е запишана на 3 картички, а буквата М е запишана на 2 картички, па затоа $k=3+2=5$. Бараната веројатност е $P(A \text{ или } M) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Задачи за вежби

22. Определи го множеството елементарни настани за експериментот вртење на стрелката на вртелешката:



а)



б)



в)

23. Имаме шпил од 52 карти за играње, од кој без гледање влечиме една карта. Пресметај ја веројатноста на настанот:

- а) извлечената карта е седумка, б) извлечена е карта со знакот детелинка.

24. Во кутија имаме 5 сини и 8 црвени топчиња. Без гледање влечиме едно топче. Пресметај ја веројатноста дека извлеченото топче е сино.

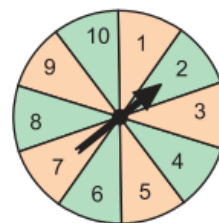
25. Во кутија имаме 5 сини, 7 црвени и 12 зелени топчиња. Без гледање влечиме едно топче. Пресметај ја веројатноста на настанот:

- а) извлечено е црвено топче,
б) извлечено е сино или црвено топче,
в) извлеченото топче не е црвено.

26. Во експериментот со фрлање на две коцки за играње пресметај ја веројатноста паднатите броеви коцки да се еднакви.

27. Кругот на вртелешката прикажана на цртежот десно е поделен на десет еднакви делови. Ја завртуваме стрелката. Пресметај ја веројатноста на настанот:

- а) стрелката да застане на поле означено со непарен број,
 б) стрелката да застане на поле означено со број поголем од 6,
 в) стрелката да застане на поле означено со прост број.
Упатство. Бидејќи полињата се еднакви елементарните настани се еднакововеројатни.



5.7 Споредуваме експериментална и теоретска веројатност

Во претходната лекција видовме дека при фрлањето коцка елементарните настани се еднакововеројатни, односно ако со $A_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ го означиме настанот „паднале i точки“, тогаш $P(A_i) = \frac{1}{6}$, за $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Од друга страна, видовме дека кога Петар, Елвис и Марија фрлањето коцка го повториле по 240 пати, секој од нив добил различни низи броеви:

Петар: 38, 43, 39, 42, 39 и 39,

Елвис: 41, 39, 42, 40, 38 и 40,

Марија: 42, 39, 41, 39, 41 и 38.

Притоа, меѓу добиените броеви најмал е бројот 38, а најголем е бројот 43, па затоа при пресметување на експерименталните веројатности тие добиле различни вредности, од кои најмалата е 0,1583, а најголемата е 0,1792. Како што можеме да забележиме отстапувањата од теоретските вредности $P(A_i) = \frac{1}{6} = 0,1(6)$ се значителни.

Дали Петар, Елвис и Марија нешто згрешиле при реализирањето на експериментот? Не! Петар, Елвис и Марија правилно го спровеле експериментот, а причината за добиените отстапувања е во тоа што тие направиле мали серии. Потврда за ова добивме кога резултатите кои тројцата ги добиле ги споивме во една серија. Тогаш ја добивме низата: 121, 121, 122, 121, 118 и 117, па така најмалата експериментална веројатност која ја добивме е 0,16250, а најголемата е 0,169444. Ова не наведува на заклучокот дека колку е поголем бројот на реализациите на еден експеримент, толку добиените експериментални веројатности ќе бидат поблиски до теоретските.

За да го потврдите претходно кажаното, постапете на следниов начин:

1) секој ученик од одделението нека земе монета и нека ја фрли по 50 пати, при што ќе забележи колку пати паднал *број* и колку пати паднала *глава*, а потоа пресметајте ги експерименталните веројатности,

2) направете групи од по пет ученици, добиените резултати на учениците од секоја група разгледувајте ги како да е направена една серија, а потоа пресметајте ги експерименталните веројатности,

3) групите од по пет ученици поделете ги така што приближно паралелката ќе ја поделите на два дела и повторете ја постапката.

Што забележувате? Дали добиените експериментални веројатности ќе се приближуваат кон теориските веројатности, кои во случајов за број и глава се еднакви на 0,5?

За оние што сакаат да знаат повеќе. За основач на теоријата на веројатност се смета францускиот математичар Пјер Ферма (1601-1665). Во тоа време главна причина за развојот на теоријата на веројатност биле игрите на среќа, но за развојот на оваа математичка дисциплина биле заинтересирани осигурителните компании и демографските заводи.

Побарај на интернет и научи за делото на Пјер Ферма.



Пјер Ферма (1601-1665)

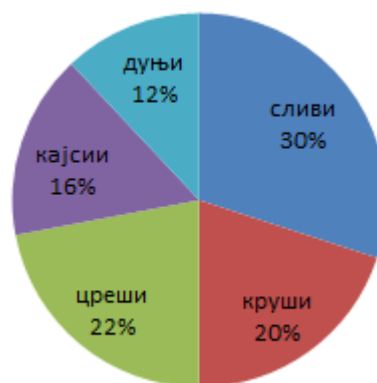
Провери го своето знаење 9

1. Јанко прибрал податоци за видот на домашните миленичиња: мачка (М), куче (К), птица (П) и риба (Р), што ги има секој ученик во седмо одделение во неговото училиште и ја добил низата:

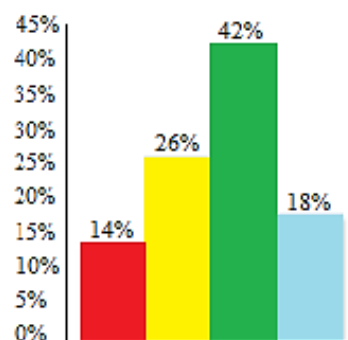
М, К, П, К, Р, П, К, К, Р, М, К, П, Р, К, М, К, Р, М, П, Р,
К, П, К, М, Р, П, М, П, Р, П, М, Р, П, М, Р, Р, П, Р, М, П.

Состави табела од добиените податоци.

2. Производството на овошје во едно земјоделско стопанство е дадена со кружниот дијаграм. Кол-ку овошје е произведено од секој вид ако се знае дека производството на праски е 600 тони?



3. На столбестиот дијаграм од лево на десно, во истиот редослед, е прикажано производството на леќа, пченка, пченица и јачмен во едно земјоделско стопанство. Ако вкупно се произведени 1000 тони житарици, колку тони е произведено од секој вид.



4. На факултет преодни оценки се од 6 до 10. Оценките кои ги добил Лулзим во текот на студирањето се:

9	8	8	8	8	8	9	7	8	10
7	9	7	8	8	9	8	8	10	10
10	10	9	8	7	8	8	8	7	10
8	8	8	9	7	8	8	10	8	8

Опредиј ја просечната оценка на Лулзим.

5. Во кутија има 9 црни, 8 бели и 3 црвени топчиња, кои не се разликуваат по маса и големина. Од кутијата без да гледаме вадиме едно топче. Пресметај ја веројатноста извлеченото топче:
- а) да е бело,
 - б) да не е црно.
6. Во експериментот со фрлање на две коцки за играње пресметај ја веројатноста паднатите броеви коцки да се еднакви.