Самоил Малчески
Скопје

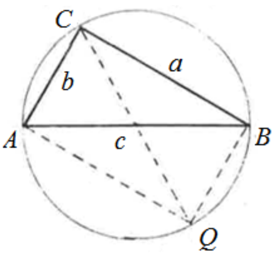
ТЕОРЕМА НА ПТОЛОМЕЈ (ВТОР ДЕЛ)

Во статијата [2] е докажана теоремата на Птроломеј. Во оваа статија, за која може да се каже дека е продолжение на статијата [2], ќе разгледаме неколку задачи во чие решавање се користи теоремата на Птоломеј. Притоа, да забележиме дека дел од разгледаните задачи се задавани на национални математички олимпијади во одделни држави или на престижни математички турнири.

1. Користејќи ја теоремата на Птоломеј докажи ја Питагоровата теорема.

Решение. При ознакиу како на цртежот десно треба да докажеме дека

$$a^2+b^2=c^2.$$



Ја конструираме опишаната кружница на триаголникот ABC и на неа определуваме точка Q симетрична на точката C во однос на центарот на кружницата. Затоа

$$\overline{CQ}=\overline{AB}=c,\ \overline{BQ}=\overline{AC}=b \text{ и } \overline{AQ}=\overline{BC}=a.$$

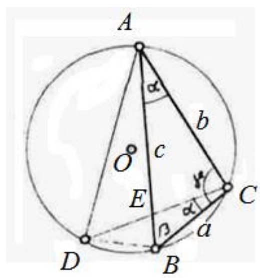
Четириаголникот (правоаголникот) е тетивен, па од теоремата на Птоломеј следува

$$\overline{AC}\cdot\overline{QB}+\overline{BC}\cdot\overline{AQ}=\overline{AB}\cdot\overline{QC}, \text{ т.е. } a^2+b^2=c^2.$$

2. Аглите α,β,γ на триаголникот ABC важи $\alpha:\beta:\gamma=1:2:4$. Докажи дека важи

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}. \qquad (1)$$

Решение. На кружницата опишана околу триаголникот ABC определуваме точка D таква што $\measuredangle BCD=\measuredangle GAB=\alpha$ (цртеж десно). Пресекот на дијагоналите на добиениот тетивен четириаголник $ADBC$ да го означиме со E. Според условот на задачата $\alpha:\beta:\gamma=1:2:4$, па затоа $\beta=2\alpha$ и $\gamma=4\alpha$.



Периферните агли над ист лак се еднакви, па затоа

$$\measuredangle BAD = \measuredangle BCD = \alpha,$$
$$\measuredangle CDB = \measuredangle CAB = \alpha,$$
$$\measuredangle ADC = \measuredangle ABC = 2\alpha.$$

Но, $\alpha + 2\alpha + 4\alpha = 180^\circ$, т.е. $7\alpha = 180^\circ$, па затоа

$$\measuredangle CEB = 180^\circ - 3\alpha = 4\alpha .$$

Понатаму,

$$\measuredangle AEC = \measuredangle BED = \measuredangle DBA = \measuredangle DCA = 3\alpha .$$

Сега, триаголниците ADB, ADC и DEC се рамнокраки, па затоа

$$\overline{BD} = \overline{BC} = a\ ,\ \overline{CD} = \overline{AC} = b \text{ и } \overline{AD} = \overline{AB} = c\ .$$

Со примена на теоремата на Птоломеј на тетивниот четириаголник $ADBC$ го добиваме равенството $bc = ca + ab$, кое е еквивалентно со равенството (1).

3. Нека $ABCD$ е квадрат впишан во кружница k и P е произволна точка на k. Докажи дека барем една од должините $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}, \overline{PD}$ е ирационален број.

Решение. Нека претпоставгиме дека должините $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}, \overline{PD}$ се рационални броеви. Нека, без ограничување на општоста, точката P припаѓа на пократкиот лак AB и $P \neq B$. Од теоремата на Птоломеј за четириаголникот $APBC$ следува

$$\overline{BC} \cdot \overline{PA} + \overline{AC} \cdot \overline{PB} = \overline{AB} \cdot \overline{PC}\ ,$$

што се сведува на $\overline{PB}\sqrt{2} = \overline{PC} - \overline{PA}$, што е противречност.

4. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник таков што

$$\frac{\overline{AC}^2}{P_{ACD}} = \frac{\overline{AB}^2}{P_{ABD}} + \frac{\overline{BC}^2}{P_{BCD}}\ .$$

Докажи дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен.

Решение. Со D' да ја означиме пресечната точка на полуправата BD и опишаната кружница $k(O,R)$ околу $\triangle ABC$. Нека $h_a, h_b, h_c\ (h_a', h_b', h_c')$ се должините на нормалите повлечени од $D\,(D')$ кон соодветните страни на $\triangle ABC$. Ставаме

$$f(D) = \frac{b}{h_b} - \frac{c}{h_c} - \frac{a}{h_a}\ .$$

Имаме,

$$\frac{h_b'}{h_b}=\frac{\overline{D'E}}{\overline{DE}}=m,\ \frac{h_c'}{h_c}=\frac{\overline{D'B}}{\overline{DB}}=\frac{h_a'}{h_a}=n,$$

каде $E=AC\cap BD$. Очигледно $m>n$ ($m<n$) ако D лежи во внатрешноста k_i (надворешноста k_e) на k. Според тоа, $f(D)>mf(D')$, ако $D\in k_i$ и $f(D)<mf(D')$, ако $D\in k_e$. Од друга страна, ако $a'=\overline{AD}, b'=\overline{BD}, c'=\overline{CD}$, тогаш од теоремата на Птоломеј следува

$$f(D')=4R(\frac{b}{a'c'}-\frac{c}{a'b'}-\frac{a}{b'c'})=4R\frac{bb'-cc'-aa'}{a'b'c'}=0.$$

Значи, $f(D)=0$ само кога $D\in k$, т.е. кога четириаголникот $ABCD$ е тетивен.

5. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник таков што $\overline{AC}=\overline{BC}$, $\overline{BD}=2\overline{AD}$ и $\overline{AB}=\overline{AE}$, каде $E=AB\cap CD$. Пресметај $\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}$.

Решение. Имаме:

$$\frac{\sin\measuredangle BED}{\sin\measuredangle BDE}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BE}}=\frac{2\overline{AD}}{2\overline{AE}}=\frac{\sin\measuredangle AED}{\sin\measuredangle ADE},$$

па затоа $\measuredangle ADE=\pi-\measuredangle BDE=\measuredangle BDC$. Ако D е внатрешна (надворешна) точка за опишаната кружница k околу $\triangle ABC$, тогаш $\measuredangle ADE<\measuredangle ABC=\measuredangle BAC<\measuredangle BDC$, ($\measuredangle ADE>\measuredangle ABC=\measuredangle BAC>\measuredangle BDC$). Значи, $D\in k$ и од теоремата на Птоломеј следува

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}-\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{BC}\cdot 2\overline{AD}-\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AD}\cdot\overline{BC}.$$

6. Даден е рамнокрак правоаголен $\triangle ABC, \measuredangle C=90^\circ$. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC, CA, AB соодветно во точките A_1, B_1, C_1. На лакот A_1B_1 кој не ја содржи точката C_1 е земена произволна точка P. Нека растојанијата од P до страните BC, CA, AB се еднакви соодветно на t_a, t_b, t_c. Докажи дека

$$\frac{\sqrt{t_a}+\sqrt{t_b}}{\sqrt{t_c}}=\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Решение. Од теоремата на Птоломеј за тетивниот четириаголник $PA_1C_1B_1$ следува

$$\overline{PA_1}\cdot\overline{B_1C_1}+\overline{PB_1}\cdot\overline{A_1C_1}=\overline{PC_1}\cdot\overline{A_1B_1},$$

од каде добиваме

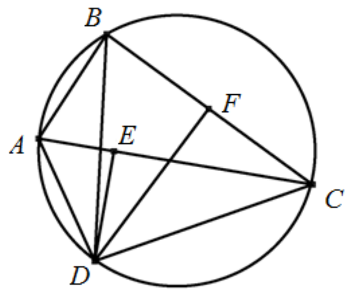
$$\frac{\overline{PA_1}+\overline{PB_1}}{\overline{PC_1}}=\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1C_1}}=2\sin\frac{45^\circ}{2}=\sqrt{2-\sqrt{2}}\,.$$

Ако дијаметарот на впишаната кружница повлечен во A_1 е $\overline{A_1A_0}=2r$, тогаш t_a е проекцијата на PA_1 на A_1A_0. Според тоа, $\overline{PA_1}=\sqrt{2rt_a}$. Аналогно, важи $\overline{PB_1}=\sqrt{2rt_b}$ и $\overline{PC_1}=\sqrt{2rt_c}$. Конечно, ако замениме во горното равенство го добиваме бараното равенство.

7. Нека D е средината на оној лак BC на опишаната кружница на $\triangle ABC$ на кој е точката A и нека $\overline{AB}<\overline{AC}$. Докажи дека подножјето E на нормалата повлечена од точката D на правата AC ја полови искршената линија составена од отсечките BA и AC.

Решение. Треба да докажеме дека

$$\overline{BA}+\overline{AE}=\overline{EC}\,.$$



Бидејќи D е средина на лакот BC важи $\overline{BD}=\overline{CD}$. Четириаголникот $ABCD$ е тетивен, па от теоремата на Птоломеј следува

$$\overline{AD}\cdot\overline{BC}+\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\overline{BD}\cdot\overline{AC}\,,$$

т.е.

$$\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{BD}\cdot(\overline{AC}-\overline{AB})\,. \qquad (1)$$

Нека F е подножјето на висината од темето D на страната BC. Важи

$$\overline{BF}=\overline{FC}$$

и $\triangle AED\sim\triangle BFD$ ($\measuredangle AED=\measuredangle BFD=90^\circ,\ \measuredangle DAE=\measuredangle DBF$). Затоа

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{DB}}{\frac{\overline{BC}}{2}}\,,$$

т.е.

$$\overline{AD}\cdot\overline{BC}=2\overline{AE}\cdot\overline{DB}\,. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува

$$\overline{AC}-\overline{AB}=2\overline{AE},$$
$$\overline{AE}+\overline{EC}-\overline{AB}=2\overline{AE},$$
$$\overline{EC}=\overline{AB}+\overline{AE}.$$

Литература

1. Mitrović, M.; Ognjanović, S.; Veljković, M.; Petković, Lj.; Lazarević, N.: *Geometrija za* I *razred Matematičke gimnazije*, Krug, Beograd, 1998
2. Малчески, А., Малчески, С.: Теорема на Птоломеј, Сигма/Математички талент, Скопје