ТЕОРЕМА ЗА МИНИМАКС

Во оваа работа е разработена теоремата за минимакс, која е откриена во средината на деведесетите години. Теоремата всушност се однесува на проблемот на постоење на максимална вредност на минимумот и наоѓање потребниo и доволни услови за егзистенција на максималната вредност на минимумот.

Самата тема содржи и дел во кој оваа теорема се применува, како и нејзината врска со полиномите на Чебишев и комплексните функции. Сакам да напоменам дека во врска со оваа проблематика постојат низа отворени прашања, како што е следниот **отворен проблем.**

Да се реши задачата на MAXIMUM MINIMORUM ако наместо функцијата (11*), ја разгледуваме функцијата*

$$E_k(P)=\frac{1}{|PP_1|^k}+...+\frac{1}{|PP_n|^k},\quad k\geq 1.$$

Пред да преминеме на разгледување на теоремата за минимакс ќе разгледаме еден пример.

Нека $x_1, x_2 \in (0,1)$ се такви што $0<x_1<x_2<1$. Да ја разгледаме функцијата

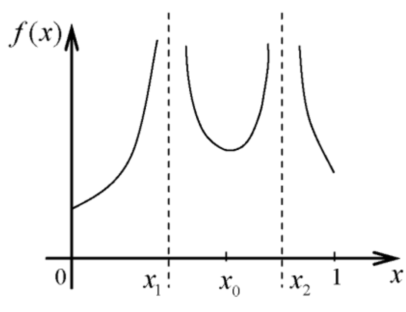
$$f(x)=\frac{1}{|x-x_1|}+\frac{1}{|x-x_2|},\quad x\in[0,1]\setminus\{x_1,x_2\}.$$

Од $\lim\limits_{x\to x_1} f(x)=\lim\limits_{x\to x_2} f(x)=+\infty$ следува дека правите $x=x_1$ и $x=x_2$ се вертикални асимптоти за функцијата $f(x)$. Јасно, функцијата $f(x)$ е непрекината на интервалите $[0,x_1); (x_1,x_2)$ и $(x_2,1]$, што заедно со претходно изнесеното значи дека таа има три локални минимуми и тоа во точките 0, 1 и во $x_0\in(x_1,x_2)$, каде $f'(x_0)=0,\quad f''(x_0)>0$. Притоа $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$.

Нека m е минимумот на функцијата $f(x)$, т.е.

$$m=\min\{f(0),\ f(1),\ f(x_0)\}.$$

Јасно, m ќе зависи од изборот на точките x_1 и x_2, $0<x_1<x_2<1$, т.е. $m=m(x_1,x_2)$.



Цртеж 1

Се поставува прашањето за кои вредности на x_1 и x_2, $0<x_1<x_2<1$ минимумот m е максимален и колкава е таа максимална вредност на минимумот $m=m(x_1,x_2)$?

Максималната вредност на минимумот $m=m(x_1,x_2)$ ќе ја наречеме MAXIMUM MINIMORUM за функцијата $f(x)$. Одговорот на претходното прашање ќе го најдеме со помош на таканаречениот асимптотски метод.

Нека $f(0) \neq f(1)$. Да ги придвижиме асимптотите $x = x_1$ и $x = x_2$ доволно малку кон помалата од вредностите $f(0)$ и $f(1)$, без да го менуваме растојанието $x_2 - x_1$ меѓу асимптотите. При ова поместување ние всушност го транслатираме делот од графикот на $f(x)$ кој се наоѓа меѓу асимптотите, па затоа $\min f(x)$ меѓу асимптотите не се менува. Меѓутоа $\min\{f(0), f(1)\}$ се зголемува, па затоа $m = m(x_1, x_2)$ не се намалува. Според тоа, ако $f(0) \neq f(1)$, тогаш $m = m(x_1, x_2)$ не ја достигнува својата максимална вредност. Значи мора да е $f(0) = f(1)$, од што следува

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2}.$$

Последното равенство е еквивалентно на равенството

$$[1-(x_1+x_2)][2x_1x_2-(x_1+x_2)] = 0,$$

од што следува $x_1 + x_2 = 1$. Според тоа асимптотите на функцијата $f(x)$ се симетрични во однос на средината на интервалот $[0,1]$, од што следува дека $x_0 = \frac{1}{2}$.

Понатаму, ако $f(\frac{1}{2}) < f(0) = f(1)$ и ако ги придвижиме асимптотите кон средината на интервалот, при што ја запазуваме симетричноста за да $f(0) = f(1)$, повторно добиваме дека $m(x_1, x_2) = f(\frac{1}{2})$ се зголемува.

Ако пак $f(0) = f(1) < f(\frac{1}{2})$ и ако ги придвижиме асимптотите кон краевите на интервалот, при што ја запазуваме симетричноста за да $f(0) = f(1)$, добиваме дека $m(x_1, x_2) = f(0) = f(1)$ се зголемува.

Од досега изнесеното следува дека максималната вредност на минимумот $m(x_1, x_2)$ се достигнува кога $f(0) = f(1) = f(\frac{1}{2})$. Од $f(0) = f(1)$ следува $x_1 + x_2 = 1$, т.е. $\frac{1}{2} - x_1 = x_2 - \frac{1}{2}$. Ако ставиме $x = \frac{1}{2} - x_1$, тогаш $x_1 = \frac{1}{2} - x$ и $x_2 = \frac{1}{2} + x$, па со смена во $f(0) = f(\frac{1}{2})$ ја добиваме равенката

$$\frac{1}{\frac{1}{2}-x} + \frac{1}{\frac{1}{2}+x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x},$$

од каде ја добиваме квадратната равенка $4x^2 + 2x - 1 = 0$ чии решенија се

$$x' = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ и } x'' = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

Но, $x_1 < \frac{1}{2}$, што значи $x = \frac{1}{2} - x_1 > 0$, па затоа $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Според тоа за,

$$x_1 = \frac{1}{2} - x = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \text{ и } x_2 = \frac{1}{2} + x = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

минимумот $m = m(x_1, x_2)$ ја достигнува својата максимална вредност која е

$$m = f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{2}{x} = \frac{2}{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}} = 2(1+\sqrt{5}) .$$

1. MAXIMUM MINIMORUM на функцијата $f(x) = \frac{1}{|x-x_1|} + \ldots + \frac{1}{|x-x_n|}$

Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0,1)$ и

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1 . \tag{1}$$

Да ја разгледаме функцијата

$$f(x) = \frac{1}{|x-x_1|} + \frac{1}{|x-x_2|} + \ldots + \frac{1}{|x-x_n|}, \quad x \in [0,1] \setminus \{x_1, \ldots, x_n\} \tag{2}$$

и нека m е апсолутниот минимум на функцијата (2), т.е. $m = m(x_1, \ldots, x_n)$, а m_n е максимумот на функцијата $m = m(x_1, \ldots, x_n)$, т.е. m_n е MAXIMUM MINIMORUM за функцијата $f(x)$.

Лема 1. Потребен услов за максималност на апсолутниот минимум на функцијата $f(x)$ е сите локални минимуми на $f(x)$ да се еднакви меѓу себе.

Доказ. Нека сите локални минимуми на $f(x)$ не се еднакви меѓу себе. Да го разгледаме најголемиот локален минимум на $f(x)$, или еден од најголемите локални минимуми ако ги има повеќе.

Ако најголемиот локален минимум се достигнува во една од точките 0 или 1, тогаш ја поместуваме асимптотата $x = x_1$ или $x = x_n$ во спротивен правец од 0 или 1 и притоа апсолутниот минимум на функцијата (2) се зголемува, што значи дека тој не бил максимален.

Ако најголемиот локален минимум не се достигнува на краевите на интервалот $[0,1]$, тогаш тој се наоѓа меѓу асимптотите $x = x_k$ и $x = x_{k+1}$, за некое $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Ги оддалечуваме асимптотите $x = x_k$ и $x = x_{k+1}$ за некој доволно мал број $\varepsilon > 0$ така што најголемиот локален минимум останува поголем од апсолутниот минимум на $f(x)$. При ова придвижување најголемиот локален минимум се намалува, а сите останати локални минимуми се зголемуваат. Според тоа, апсолутниот минимум на функцијата (2) не бил максимален. ♦

Забелешка 1. Може да се докаже дека условот од лема 1 е и доволен за да апсолутниот минимум на $f(x)$ биде максимален. При доказот на ова тврдење повторно се користи методот за придвижување на асимптотите.

Со $m^* = m^*(x_1, \ldots, x_n)$ да го означиме најголемиот од сите локални минимуми на функцијата $f(x)$, а со m_n^* минимумот на функцијата $m^* = m^*(x_1, \ldots, x_n)$, т.е. m_n^* е MINIMUM MAXIMORUM на $f(x)$. Ќе докажеме дека постои точка

$x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ во областа (1) во која најголемиот локален минимум на $f(x)$ достигнува минимум.

Навистина, најголемиот локален минимум на $f(x)$ зависи од изборот на асимптотите $x = x_1, ..., x = x_n$, $0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < 1$ и е непрекината функција $m^*(x)$ од точките $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ во областа (1). Со придвижување на x кон границата на областа (1), $m^*(x)$ тежи кон бесконечност, па затоа најголемиот локален минимум на $f(x)$ достигнува минимум m_n^* во некоја внатрешна точка $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$.

Лема 2. Потребен услов за минималност на најголемиот локален минимум на функцијата $f(x)$ е сите локални минимуми на $f(x)$ да се еднакви меѓу себе.

Доказ. Да претпоставиме дека сите локални минимуми на $f(x)$ не се еднакви меѓу себе. Да го разгледаме најмалиот (или еден од најмалите) локален минимум на $f(x)$.

Ако најмалиот локален минимум на $f(x)$ се достигнува на краевите од интервалот $[0,1]$, тогаш кон него ја доближуваме најблиската асимптота $x = x_1$ или $x = x_n$ и притоа најголемиот локален минимум на $f(x)$ се намалува, што значи дека тој не бил минимален.

Ако најмалиот локален минимум не се достигнува на краевите на интервалот $[0,1]$, тогаш тој се наоѓа меѓу асимптотите $x = x_k$ и $x = x_{k+1}$, за некое $k = 1, 2, ..., n-1$. Ги приближуваме асимптотите $x = x_k$ и $x = x_{k+1}$ за некој доволно мал број $\varepsilon > 0$, но така што најмалиот локален минимум останува помал од најголемиот локален минимум на $f(x)$. При ова приближување најмалиот локален минимум се зголемува, а сите останати локални минимуми се намалуваат. Според тоа, најголемиот локален минимум на функцијата $f(x)$ не бил минимален. ♦

Забелешка 2. Може да се докаже дека условот од лема 2 е и доволен за да најголемиот локален минимум на $f(x)$ биде минимален. При доказот на ова тврдење повторно се користи методот на придвижување на асимптотите.

Лема 3. При претходно воведените ознаки важи $m_n^* \le m_n$.

Доказ. Нека $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ е точка од областа (1) во која најголемиот локален минимум достигнува минимум. Според лема 2 сите локални минимуми на $f(x)$ се еднакви, па затоа $m(x_1^*, ..., x_n^*) = m_n$. Од друга страна, за секој $x = (x_1, ..., x_n)$ од областа (1) важи $m(x_1, ..., x_n) \le m_n$, па затоа последното неравенство важи и за $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$, односно $m(x_1^*, ..., x_n^*) \le m_n^*$, т.е. $m_n^* \le m_n$. ♦

Лема 4. При претходно воведените ознаки важи $m_n^* = m_n$.

Доказ. Нека $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ е точка од областа (1) во која најголемиот локален минимум достигнува минимум. Според лема 2 имаме $m(x_1^*, ..., x_n^*) = m_n^*$. Од друга страна според забелешка 1 еднаквоста на локалните минимуми е доволен услов за да апсолутниот минимум на $f(x)$ биде максимален и како во точката $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ сите локални минимуми се еднакви, добиваме дека во оваа точка најмалиот локален минимум на $f(x)$ е максимален, т.е. $m(x_1^*, ..., x_n^*) = m_n$. Значи, $m_n^* = m_n$. ♦

На крајот од овој дел ќе ја докажеме следната теорема која ни овозможува ефективно да го оцениме m_n.

Теорема 1. При произволен распоред на асимптотите

$$x = x_1, ..., x = x_n, \quad 0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < 1,$$

најголемиот локален минимум на $f(x)$ е поголем или еднаков на m_n, MAXIMUM MINIMORUM на $f(x)$.

Доказ. Нека $x = (x_1, ..., x_n)$ е произволна точка од областа (1) и нека m^* е најголемиот локален минимум на $f(x)$. Бидејќи за секој $x = (x_1, ..., x_n)$ од областа (1) важи $m^*(x_1, ..., x_n) \geq m_n^*$, а од лема 4 имаме $m_n^* = m_n$, добиваме $m^* \geq m_n$. ♦

2. Теорема за минимакс

Во овој дел ќе ја изложиме теоремата со која се дава оценка за MAXIMUM MINIMORUM - от на функцијата

$$E_k(x) = \frac{1}{|x-x_1|^k} + ... + \frac{1}{|x-x_n|^k}, \quad x \in [-1,1] \setminus \{x_1, ..., x_n\}, \quad k \geq 1 \tag{3}$$

со вертикални асимптоти $x = x_1, ..., x = x_n, \quad -1 < x_1 < ... < x_n < 1$.

Теорема за минимакс. Ги фиксираме k и n и означуваме со $m_{k,n}$ MAXIMUM MINIMORUM - максимален од минимумите на функцијата $E_k(x)$ на $[-1,1] \setminus \{x_1, ..., x_n\}$ по било која положба на асимптотите

$$x = x_1, ..., x = x_n, \quad -1 < x_1 < ... < x_n < 1.$$

Тогаш,

1) постои идеална положба на асимптотите при која минимумот на $E_k(x)$ на $[-1,1] \setminus \{x_1, ..., x_n\}$ е еднаков на $m_{k,n}$;
2) таквата идеална положба на асимптотите е единствена;
3) положбата на асимптотите е идеална ако и само ако сите локални минимуми на $E_k(x)$ на $[-1,1] \setminus \{x_1, ..., x_n\}$ се еднакви меѓу себе;

4) при произволна положба на асимптотите најголемиот локален минимум на $E_k(x)$ на $[-1,1]\setminus\{x_1,...,x_n\}$ е поголем или еднаков на $m_{k,n}$.

За да ја докажеме теоремата за минимакс може да се искористи начинот на размислување како во параграф 1 за функцијата $f(x)$ (формула (2)), која е добиена од $E_k(x)$ за $k=1$ и е дефинирана на $[0,1]\setminus\{x_1,...,x_n\}$. Единствен проблем може да претставува тврдењето 2) односно единственоста на идеалната положба. Ќе ја докажеме неговата точност, но повторно за функцијата $f(x)$ (формула (2)).

Нека $x=(x_1,...,x_n)$ и $\overline{x}=(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)$ се две различни точки од областа $0<x_1<...<x_n<1$, и нека

$$m=(m_0,m_1,...,m_n) \text{ и } \overline{m}=(\overline{m}_0,\overline{m}_1,...,\overline{m}_n)$$

се соодветно по координати од лево на десно локалните минимуми на $f(x)$.

Лема 1. Ако x и $\overline{x}$ се различни точки, тогаш $\overline{m}\neq m$ за

а) за $n=1$;

б) за $n=2$.

Доказ. а) Од $x\neq\overline{x}$ имаме дека $x_1\neq\overline{x}_1$, па може да земеме дека $x_1<\overline{x}_1$. Точно е и тоа дека со растење на x_1, m_0 опаѓа, а m_1 расте. Значи од $x_1<\overline{x}_1$ имаме дека $m_0>\overline{m}_0$, а $m_1<\overline{m}_1$, па затоа $(m_0,m_1)\neq(\overline{m}_0,\overline{m}_1)$, т.е. $\overline{m}\neq m$.

б) Ако $m_1=\overline{m}_1$, тогаш $x_2-x_1=\overline{x}_2-\overline{x}_1$ (т.е. растојанието меѓу асимптотите при двете положби x и $\overline{x}$ е еднакво), па со растење на x_1, m_0 опаѓа, а m_2 расте. Значи повторно $\overline{m}\neq m$. ♦

Задача 1. Да ги фиксираме сите $x_1,...,x_n$ освен еден, на пример x_k. Како се менуваат координатите m_j на точката m при зголемување на x_k?

Решение. Сите m_j, $j<k$ се намалуваат, а сите m_j, $j\geq k$ се зголемуваат. ♦

Задача 2. Да ги фиксираме сите $x_1,...,x_n$ освен две соседни, на пример x_k и x_{k+1}, $1\leq k\leq n-1$. Што се случува со координатите m_j на m, ако x_k и x_{k+1} се придвижуваат за исто растојание $r\neq 0$ во спротивни насоки т.е. x_k преминува во x_k+r, а x_{k+1} преминува во $x_{k+1}-r$?

Решение. За $r>0$, x_k и x_{k+1} се доближуваат, па сите m_j, $j\neq k$ се намалуваат, а m_k се зголемува. За $r<0$, се случува обратното, т.е. x_k и x_{k+1} се оддалечуваат, па сите m_j, $j\neq k$ се зголемуваат, а m_k се намалува. ♦

Забелешка. Како во претходните, така и во натамошните разгледувања при придвижувањето на x_k и x_{k+1} редоследот на асимптотите не смее да се менува, па затоа треба r да го избереме така што $|r|$ е доволно мала величина.

Нека $x=(x_1,...,x_n)$ е точка од областа $0<x_1<...<x_n<1$. Дефинираме

$$r(x)=\min\{x_1,x_2-x_1,x_3-x_2,...,x_n-x_{n-1},1-x_n\}\,. \tag{4}$$

Избираме броеви $r_1,r_2,...,r_n$, не сите еднакви на нула и такви што

$$|r_k|<\frac{r(x)}{4}\text{, за сите } k,1\le k\le n\,. \tag{5}$$

Од точката x со следните n операции ја наоѓаме точка $\overline{x}$:

1) x_1 преминува во $\overline{x}_1=x_1+r_1$, а x_2 во $x_2^*=x_2-r_1$,

2) x_2^* преминува во $\overline{x}_2=x_2^*+r_2$, а x_3 во $x_3^*=x_3-r_2$,

3) x_3^* преминува во $\overline{x}_3=x_3^*+r_3$, а x_4 во $x_4^*=x_4-r_3$,

.... (6)

n-1) x_{n-1}^* преминува во $\overline{x}_{n-1}=x_{n-1}^*+r_{n-1}$, а x_n во $x_n^*=x_n-r_{n-1}$,

n) x_n^* преминува во $\overline{x}_n=x_n^*+r_n$.

Лема 2. Ако за броевите $r_1,r_2,...,r_n$ важи неравенството (5), тогаш после секоја од n-те операции од (6), новодобиените асимптоти не излегуваат од областа $0<x_1<...<x_n<1$.

Доказ. Секоја асимптота се менува не повеќе од два пати (на пример $x_k, 2\le k\le n-1$ прво преминала во x_k^*, а потоа во $\overline{x}_k$), при што во секој чекор истата се поместува за помалку од $\frac{r}{4}$ каде што r е минималното растојание $|x_{j-1}-x_j|$, $0=x_0<x_1<...<x_n<x_{n+1}=1$, $1\le j\le n+1$. Затоа, после секоја операција асимптотите не излегуваат од областа $0<x_1<...<x_n<1$. ♦

Во следните три леми и задача 3 ќе претпоставиме дека броевите $r_1,r_2,...,r_n$ го задоволуваат неравенството (5).

Лема 3. Ако броевите $r_1,r_2,...,r_n$ се ненегативни при што не се сите еднакви на нула, тогаш за точките m и $\overline{m}$ соодветни на x и $\overline{x}$ важи неравенство $m_0>\overline{m}_0$

Доказ. Во секој од првите $n-1$ чекори од (6) се повторува постапката од задача 2 при што од $r_k\ge 0, 1\le k\le n-1$ следува дека m_0 постојано се намалува или останува непроменет (ако $r_k=0$). Сега од задача 1 следува дека во n-от чекор m_0 повторно се намалува или останува непроменет (ако $r_n=0$). Меѓутоа, бидејќи барем еден од броевите $r_1,r_2,...,r_n$ не е еднаков на нула добиваме дека важи строго неравенство т.е. $m_0>\overline{m}_0$. ♦

Лема 4. Ако броевите $r_1,r_2,...,r_n$ се негативни и еднакви меѓу себе, тогаш за соодветните локални минимуми при распоредите x и $\overline{x}$ важат строгите неравенства $m_0<\overline{m}_0$ и $m_j>\overline{m}_j$ за секој $j,1\le j\le n$.

Доказ. Бидејќи $r_1, r_2, ..., r_n$ се еднакви меѓу себе, при премин на x во $\overline{x}$ се менува само првата координата што значи дека важи $\overline{x}_1 = x_1 + r_1$, и $\overline{x}_k = x_k, 2 \le k \le n$. Од $r_1 < 0$ следува $\overline{x}_1 < x_1$, па според задача 1 добиваме дека $\overline{m}_0 > m_0$, а $\overline{m}_j < m_j$ за секој $j, 1 \le j \le n$. ♦

Лема 5. Нека бројот r_0 го додадеме кон броевите $r_1, r_2, ..., r_n$. Ако меѓу броевите $r_0 = 0, r_1, r_2, ..., r_n$ бројот r_j е најмал, тогаш $m_j > \overline{m}_j$.

Доказ. Ако $j = 0$, тогаш броевите $r_1, r_2, ..., r_n$ се ненегативни, па тврдењето следува од лема 3.

Нека $j > 0$. Според тоа $r_j < 0$. Со помош на n- те операции од (6), ја доведуваме точката x во меѓуточка $\overline{x}^*$ при што $r_1, r_2, ..., r_n$ ги земаме да се сите негативни и еднакви на r_j. Според лема 4 имаме дека $m_j > \overline{m}_j^*$. Сега со n-те операции од (6) $\overline{x}^*$ ја трансформираме во $\overline{x}$, при што оперираме со ненегативни броеви $r_k - r_j, 1 \le k \le n$. Според задача 2 во секој k - ти чекор $k \ne j$, $\overline{m}_j^*$ се намалува додека пак во j -тиот чекор немаме поместување на асимптотите, па $\overline{m}_j^*$ не се менува. Значи, $\overline{m}_j^* \ge \overline{m}_j$, од што следува дека $m_j > \overline{m}_j$. ♦

Задача 3. Да се изразат броевите $r_1, r_2, ..., r_n$, со помош на координатите x_j и $\overline{x}_j$ на точките x и $\overline{x}$?

Решение. Под претпоставка броевите $r_1, r_2, ..., r_n$ да го задоволуваат неравенството (5), доволно е да ги земеме

$$r_k = (\overline{x}_1 - x_1) + (\overline{x}_2 - x_2) + ... + (\overline{x}_k - x_k), 1 \le k \le n$$

Последното равенство непосредно следува од равенството (6). ♦

Лема 6. За произволни точки x и $\overline{x}$ од областа $0 < x_1 < ... < x_n < 1$, $\overline{x} \ne x$, може да се најде таков N и точки $x_0 = x, x_1, x_2, ..., x_N = \overline{x}$ од областа $0 < x_1 < ... < x_n < 1$ такви што за секој $k, 1 \le k \le N$, точката x_k, со помош на n-те операции од (6), е добиена од точката x_{k-1}, при што се користат едни и исти броеви $r_1, r_2, ..., r_n$ и без да се излегува надвор од областа $0 < x_1 < ... < x_n < 1$.

Доказ. Нека $\rho = \frac{1}{4}\min\{r(x), r(\overline{x})\}$, каде $r(x)$ и $r(\overline{x})$ се дефинирани со (4). Нека $r_1, r_2, ..., r_n$ се броевите од решението на задача 3 и нека природниот број N е таков што $r_j^0 = \frac{r_j}{N}, 1 \le j \le n$ се по апсолутна вредност помали од ρ. Ги поврзуваме x и $\overline{x}$ со точките

$$x(t)=(x_1+t(\overline{x}_1-x_1),\ x_2+t(\overline{x}_2-x_2),...,\ x_n+t(\overline{x}_n-x_n)),\ \ 0\le t\le 1,$$

и означуваме со $x_k=x(\frac{k}{N}),\ k=0,1,...,N$ (каде $x_0=x$ и $x_N=\overline{x}$).

За приозволна точка $x(t),\ 0\le t\le 1$ важи $r(x(t))\ge \min\{r(x),r(\overline{x})\}$.

Значи

$$|\,r_j^0\,|<\rho<\tfrac{1}{4}r(x_k)\text{, за секои } j \text{ и } k\ \ (1\le j\le n, 1\le k\le N\,).$$

Сега, од задача 3 следува дека со n - те операции од (6) и броевите $r_1^0, r_2^0,...,r_n^0$, точката x_{k-1} преминува во точката x_k $(1\le k\le N)$. Притоа, од лема 2 следува дека овие точки не се надвор од областа $0<x_1<...<x_n<1$. ♦

Лема 7. Ако x и $\overline{x}$ се точки од областа $0<x_1<...<x_n<1$, $\overline{x}\ne x$, тогаш $m_j>\overline{m}_j$ за некое $j, 0\le j\le n$.

Доказ. Според лема 6 ги наоѓаме броевите $r_1^0, r_2^0,...,r_n^0$ со кои и со операциите дадени во (6) x преминува во $\overline{x}$ преку $N-1$ меѓуточка. Ако на броевите $r_1^0, r_2^0,...,r_n^0$ го додадеме бројот $r_0^0=0$ и со r_j^0 го означиме најмалиот меѓу броевите $r_0^0, r_1^0, r_2^0,...,r_n^0$, тогаш при секој премин на x_k во x_{k+1}, $0\le k\le N-1$, m_j се намалува т.е. $m_j^k>m_j^{k+1}, 0\le k\le N-1$ (лема 5). Значи, за почетното m_j и крајното $\overline{m}_j$ имаме дека $m_j>\overline{m}_j$. ♦

Лема 8. Ако x и $\overline{x}$ се точки од областа $0<x_1<...<x_n<1$, $\overline{x}\ne x$, тогаш $m_j-m_{j-1}>\overline{m}_j-\overline{m}_{j-1}$, за некој $j, 0\le j\le n$.

Доказ. Од тоа што $x\ne\overline{x}$, следува дека постои $k, 1\le k\le n$ таков што $x_k\ne\overline{x}_k$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x_k>\overline{x}_k$. Нека j е индексот за кој разликата $x_j-\overline{x}_j=\varDelta_j$ е максимална (или j е најмалиот од таквите индекси, ако $\varDelta_j$ прима максимална вредност при неколку индекси j), и да докажеме дека $m_j-m_{j-1}>\overline{m}_j-\overline{m}_{j-1}$.

Да ги поместиме сите асимптоти $x=x_k$ за $\varDelta_j$ во лево, со што x_k преминува во $\tilde{x}_k=x_k-\varDelta_j$. При тоа локалните минимуми m_k не се менуваат; j -та асимптота се поклопува со $x=\overline{x}_j$, а за краевите од интервалот $x_0=0$ и $x_{n+1}=1$ и за сите асимптоти исполнети се неравенствата $\tilde{x}_k\le\overline{x}_k, 0\le k\le n+1$. Сега да ги поместиме сите $\tilde{x}_k$ во $\overline{x}_k$. Тогаш се менува и разликата m_j-m_{j-1}.

Да докажеме дека за секој k за кој $\tilde{x}_k < \overline{x}_k$, со придвижување на $\tilde{x}_k$ во $\overline{x}_k$ се намалува разликата $m_j - m_{j-1}$.

За $1 \le k < j$, според задача 1 и двата броја (m_j и m_{j-1}) се зголемуваат, но m_{j-1} бидејќи е поблиску до асимптотата што се придвижува, се зголемува повеќе од m_j, па разликата $m_j - m_{j-1}$ се намалува.

За $j < k \le n$, според задача 1 и двата броја (m_j и m_{j-1}) се намалуваат, но m_j бидејќи е поблиску до асимптотата што се придвижува, се намалува повеќе од m_{j-1}, па разликата $m_j - m_{j-1}$ се намалува.

Останува да се разгледа случајот кога сите $\tilde{x}_k \equiv \overline{x}_k$ ($1 \le k \le n$). Во тој случај од дефиницијата на j следува дека $j = 1$, па при придвижување на $\tilde{x}_0 = -\Delta_1$ во $\overline{x}_0 = 0$, вредноста на m_1 не се менува, а m_0 се зголемува што значи дека разликата $m_1 - m_0$ се намалува.

Значи, $m_j - m_{j-1} > \overline{m}_j - \overline{m}_{j-1}$, што требаше и да се докаже. ♦

Конечно, може да преминеме на потврдување на точноста на тврдењето 2) во теоремата за минимакс.

Да претпоставиме дека постојат две различни идеални положби на асимптотите, т.е. постојат две различни точки x и $\overline{x}$ во кои според тврдењето 3) сите локални минимуми на $f(x)$ се еднакви меѓу себе, т.е. $m_0 = ... = m_n$ и $\overline{m}_0 = ... = \overline{m}_n$. Ако $m_j = \overline{m}_j, 0 \le j \le n$, тогаш тоа противречи на лема 7. Ако пак $m_j \ne \overline{m}_j, 0 \le j \le n$, тогаш бидејќи

$$m_j - m_{j-1} = 0, \overline{m}_j - \overline{m}_{j-1} = 0, 1 \le j \le n$$

(од еднаквост на координатите на m и $\overline{m}$ соодветно), добиваме противречност на лема 8.

Од добиените противречности следува дека идеалната положба на асимптотите мора да е единствена. ♦

На крајот на овој дел ќе презентираме една непосредна последица на претходните разгледувања.

Лема 9. Ако $n = (m_1, ..., m_m)$ и $\overline{n} = (\overline{m}_1, ..., \overline{m}_m)$ се добиени од m и $\overline{m}$ со отстранување на нултата координата, тогаш n и $\overline{n}$ не може да се еднакви, ако x и $\overline{x}$ се различни.

Доказ. Нека $x \ne \overline{x}$. Според лема 7 имаме дека постои $j, 0 \le j \le n$ таков што е исполнето неравенството $m_j > \overline{m}_j$. Ако сега ги смениме местата на x и $\overline{x}$, тогаш повторно од лема 7 следува дека за некој $k, 0 \le k \le n$ исполнето е неравенството

$m_k < \overline{m_k}$. Да забележиме дека $k \neq j$. Според принципот на Дирихле, барем еден од j и k се наоѓа меѓу 1 и n. Значи за некое $i, 1 \leq i \leq n$, броевите m_i и $\overline{m_i}$ не се еднакви т.е. $n \neq \overline{n}$. ♦

3. Последици од теоремата за минимакс

Теоремата за минимакс со себе влече многу убави последици. Да разгледаме некои од нив решавајќи ги следниве задачи.

Задача 1. Докажете дека $m_{k,n}$ - MAXIMUM MINIMORUM на функцијата $E_k(x)$ расте (формула (3)), кога n расте.

Решение. При некоја положба на $n+1$-та асимптота, минимумот на $E_k(x)$ на $[-1,1] \setminus \{x_1, ..., x_n\}$ е еднаков на $m_{k,n+1}$ и според лема 1 од параграф 1, сите локални минимуми се еднакви меѓу себе. Да отстраниме една асимптота. Тогаш сите локални минимуми ќе се намалат. Значи и $m*$ - најголемиот од новодобиените локални минимуми ќе биде помал од $m_{k,n+1}$. Но, од теоремата за минимакс (тврдење 4)), имаме дека $m* \geq m_{k,n}$. Па така $m_{k,n+1} > m_{k,n}$, т.е. $m_{k,n}$ расте кога расте n. ♦

Задача 2. а) Докажете дека за $k > 1$ постојат некои броеви $0 < c < C$ т.ш важи $cn^k \leq m_{k,n} \leq Cn^k$.

б) Докажете дека за некои позитивни броеви c и C важи

$$cn \ln n \leq m_{1,n} \leq Cn \ln n .$$

Решение. Нека $k \geq 1$, за $n = 2p$ да ги поместиме асимптотите во точките $\pm(2j-1), 1 \leq j \leq p$ и да ја разгледаме функцијата $E_k(x)$ на $[-n,n] \setminus \{\pm(2j-1) \,|\, 1 \leq j \leq p\}$. Да означиме со

$$S^1_{k,p} = 1 + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{5^k} + ... + \frac{1}{(2p-1)^k} ,$$

$$S^1_{k,n} = 1 + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{5^k} + ... + \frac{1}{(2n-1)^k} .$$

При таа положба на асимптотите имаме дека $E_k(0) = 2S^1_{k,p}$ е најголемиот локален минимум на $E_k(x)$ на $[-n,n] \setminus \{\pm(2j-1) \,|\, 1 \leq j \leq p\}$ и $E_k(n) = S^1_{k,n} = S^1_{k,2p}$ - минимумот на $E_k(x)$ на $[-n,n] \setminus \{\pm(2j-1) \,|\, 1 \leq j \leq p\}$.

Со пресликувањето $t : [-n,n] \to [-1,1]$, $t(\alpha) = \frac{\alpha}{n}$, сите растојанија се делат со n, од што следува дека вредноста на $E_k(x)$ се множи со n^k т.е. добиваме дека

$E_k(0) = 2S^1_{k,p}\; n^k$ е најголемиот локален минимум на $E_k(x)$ на $[-1,1]\setminus\{x_1,...,x_n\}$ и $E_k(1) = S^1_{k,n}\; n^k = S^1_{k,2p}\; n^k$ - минимумот на $E_k(x)$ на множеството $[-1,1]\setminus\{x_1,...,x_n\}$

Од теоремата за минимакс (тврдење 4)) и дефиниција на $m_{k,n}$ кој е MAXIMUM MINIMORUM на $E_k(x)$ на $[-1,1]\setminus\{x_1,...,x_n\}$ имаме дека

$$S^1_{k,n}\; n^k \le m_{k,n} \le 2S^1_{k,p}\; n^k ,$$

и

$$S^1_{k,n} \le \frac{m_{k,n}}{n^k} \le 2S^1_{k,p} .$$

а) За $k > 1$, ако земеме $c = 1$ и $C = 2S^1_k$ каде S^1_k е збирот на редот

$$1 + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{5^k} + ... + \frac{1}{(2N-1)^k} + ...$$

и ако се искористи дека $1 \le S^1_{k,n}$ и $S^1_{k,p} \le S^1_k$ добиваме дека

$$1 \le S^1_{k,n} \le \frac{m_{k,n}}{n^k} \le 2S^1_{k,p} \le 2S^1_k , \quad cn^k \le m_{k,n} \le Cn^k .$$

б) Нека сега $k = 1$. Редот

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{(2N-1)} + ...$$

дивергира, но притоа за n - тата парцијална сума важи неравенството

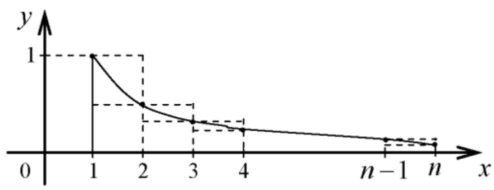
$$\ln n < S_n < 1 + \ln n \qquad (7)$$

каде

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} .$$

За да го докажеме неравенството (7) ќе ја разгледаме плоштината на под графикот на функцијата $\frac{1}{x}, 1 \le x \le n$. Имено, оваа плоштина изнесува

$$P = \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln x\,|_1^n = \ln n - \ln 1 = \ln n$$



Цртеж 2

Од друга страна, за плоштината P имаме

$$P < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} \text{ и}$$

$$P > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} ,$$

т.е.

$$P < S_{n-1} < S_n \text{ и } 1 + P > S_n ,$$

т.е. $\ln n < S_n$ и $1 + \ln n > S_n$, со што го докажавме неравенството (7).

За $k = 1$ имаме дека $S^1_{1,n} \le \frac{m_{1,n}}{n} \le 2S^1_{1,p}$.

Од $S_n = S^1_{1,p} + S^0_{1,p}$ каде $S^0_{1,p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2p}$ и од $S^1_{1,n} > S^0_{1,n}$ следува

$$\frac{m_{1,n}}{n} \geq S_{1,n}^1 > S_{1,n}^0 = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}S_n > \frac{1}{2}\ln n\,,$$

т.е.

$$m_{1,n} \geq \frac{1}{2}n\ln n\,,$$

па може да се земе $c=\frac{1}{2}$. Потоа од

$$S_{1,p}^1 = 1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2p-1} \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2p-1}+\frac{1}{2p} = 1+S_{1,p}^0\,,$$

добиваме

$$\frac{m_{1,n}}{n} \leq 2S_{1,p}^1 = S_{1,p}^1 + S_{1,p}^1 \leq 1+S_{1,p}^0 + S_{1,p}^1 = 1+S_n < 1+1+\ln n = 2+\ln n\,,$$

т.е. $\frac{m_{1,n}}{n\ln n} < 1+\frac{2}{\ln n}$.

Ако земеме $n\to\infty$, тогаш низата $\{\frac{m_{1,n}}{n\ln n}\}$ е ограничена т.е. постои $C>0$ таков што $\frac{m_{1,n}}{n\ln n} < C$, односно $m_{1,n} < Cn\ln n$. ♦

Задача 3. а) За $k>1$ докажете дека кога n тежи кон бесконечност, количникот $\frac{m_{k,n}}{n^k}$ тежи кон $(2-\frac{1}{2^{k-1}})S_k$ каде S_k е збирот на редот

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+...+\frac{1}{N^k}+...\,,$$

или кон $2S_k^1$ каде S_k^1 е збирот на редот $1+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{5^k}+...+\frac{1}{(2N-1)^k}+...$.

б) Докажете дека кога n тежи кон бесконечност, тогаш количникот $\frac{m_{1,n}}{n\ln n}$ тежи кон 1.

Решение. Односите $\frac{m_{k,n}}{n^k}$ и $\frac{m_{1,n}}{n\ln n}$ во задача 2 беа оценети од горе со броевите $2S_k^1$ и $1+\frac{2}{\ln n}$ соодветно, од кои последниот тежи кон 1, кога n тежи кон бесконечност. Останува уште да се покаже дека за овие количници важи истата оцена и од долу.

Нека q е произволен природен број и да го претставиме n во обликот

$$n=(q+2)p+r,\quad 0\leq r<q+2\,.$$

Го делиме интервалот $[-1,1]$ на q еднакви делови. Во $q-2$ дела кои лежат во внатрешноста на интервалот $[-1,1]$ сместуваме по p на еднакво растојание точки, а во два дела кои се по краевите на $[-1,1]$, по $2p$ еднакво оддалечени точки (значи вкупно $(q+2)p$ точки).

Да ги оцениме од долу локалните минимуми на $E_k(x)$ со асимптоти во избраните точки. Локалните минимуми во двата крајни дела се поголеми од $(2qp)^k S_{k,2p}^1$, а внатрешните локални минимуми поголеми од $2(qp)^k S_{k,p}^1$. Затоа,

$$m_{k,n} > 2(qp)^k S_{k,p}^1$$

и

$$\frac{m_{k,n}}{n^k} > \frac{2(qp)^k S_{k,p}^1}{((q+2)(p+1))^k} = 2\Lambda S_{k,p}^1 .$$

Бидејќи множителот $\Lambda = \frac{(qp)^k}{((q+2)(p+1))^k}$ тежи кон $\frac{q^k}{(q+2)^k}$, кога $n \to \infty$, а q е произволен број, значи за $k > 1$ е докажано.

За $k = 1$ ќе го искористиме тоа дека $2S_{1,p}^1 > S_{2p} > \ln 2p$, па

$$\frac{m_{1,n}}{n \ln n} > \frac{2\Lambda S_{1,p}^1}{\ln n} > \frac{\Lambda(\ln 2p)}{\ln n} .$$

Од $n = (q+2)p + r < (q+2)(p+1)$ имаме дека

$$\ln n < \ln(q+2) + \ln(p+1) .$$

Па, при $n \to \infty$, односот $\frac{\Lambda(\ln 2p)}{\ln n} \to \frac{q}{q+2}$, а бидејќи q е произволен број се добива $\frac{m_{1,n}}{n \ln n} \to 1$. ♦

Понатаму во текстот ќе биде изложен алгоритамот за доаѓање до идеалната положба на асимптотите.

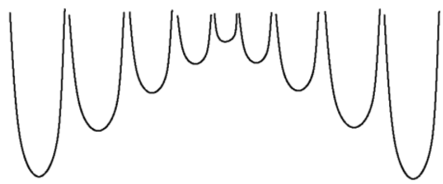
Забелешка. Алгоритамот ќе важи за произволни функции од видот

$$f(|x - x_1|) + ... + f(|x - x_n|),\ x \in [-1,1] \setminus \{x_1, ..., x_n\}$$

каде функцијата $f(x)$ опаѓа на полуправата $x > 0$, $f(x)$ и $-f'(x)$ се конвексни и $f'(x) \to -\infty$, кога $x \to 0$.

Пред да го презентираме алгоритамот ќе го разгледаме случајот на симетрично поставени асимптоти во однос на нулата. Нумерирањето ќе биде изведено така што паровите симетрични асимптоти и паровите симетрични локални минимуми ќе бидат нумерирани од средината кон краевите на интервалот со индекси $j \geq 1$, а централната асимптота или централниот локален минимум (во зависност од парноста на n) со индексот 0.

Дефиниција. Велиме дека локалните минимуми m_j образуваат "рид" ако последователно m_j не растат (цртеж 3).



Цртеж 3

Лема 1. Ако асимптотите на интервалот $[-1,1]$ се рамномерно распоредени, тогаш локалните минимуми образуваат "рид".

Доказ. Нека $f(x)$ опаѓа на полуправата $x > 0$ и $f'(x) \to -\infty$, кога $x \to 0$. Ја разгледуваме функцијата

$F(x),\ x \in [-1,1] \setminus \{\pm x_1, ..., \pm x_n\}$ еднаква на

$$f(|x+x_1|) + f(|x-x_1|) + ... + f(|x+x_n|) + f(|x-x_n|),$$

ако бројот на асимптоти е парен, и еднаква на

$$f(|x|) + f(|x+x_1|) + f(|x-x_1|) + ... + f(|x+x_n|) + f(|x-x_n|),$$

за $x \in [-1,1] \setminus \{0, \pm x_1, ..., \pm x_n\}$ ако бројот на асимптоти е непарен.

Нека асимптотите се распоредени рамномерно на $[-1,1]$. Да докажеме дека тогаш локалните минимуми образуваат “рид”.

Нека $y_k \geq 0$ е точка на локален минимум на $F(x)$ во интервалот $[0,1]$ т.е. $F(y_k) = m_k,\ k \geq 0$. Да ги споредиме вредностите на функцијата F во точките y_k и $y_k + \Delta,\ 0 \leq k < n$ каде Δ е растојанието меѓу две соседни асимптоти ($\Delta = \frac{2}{2n+1}$ ако бројот на асимптоти е парен и $\Delta = \frac{1}{n+1}$ ако бројот на асимптоти е непарен). Користејќи дека $x_0 = 0,\ x_k = x_{k-1} + \Delta,\ 1 \leq k \leq n$ ако бројот на асимптоти е непарен, $x_1 = \frac{\Delta}{2},\ x_k = x_{k-1} + \Delta,\ 1 < k \leq n$ ако бројот на асимптоти е парен и $f(x)$ е опаѓачка функција, добиваме

$$F(y_k) - F(y_k + \Delta) = f(x_n - y_k) - f(y_k + x_n + \Delta) > 0.$$

Вредноста $F(y_{k+1})$ во соседната со y_k точка на минимум, не е поголема од вредноста $F(y_k + \Delta)$ бидејќи $y_k + \Delta$ и y_{k+1} не се разделени со асимптота. Значи,

$$0 < F(y_k) - F(y_k + \Delta) < F(y_k) - F(y_{k+1}) = m_k - m_{k+1},\ 0 \leq k < n.$$

Од монотоност на $f(x)$ следи и тоа дека секоја точка $y_k, 1 \leq k < n$ се наоѓа точно на средината на интервалот меѓу најблиските асимптоти. Затоа точката y_n^* симетрична на y_{n-1} во однос на асимптотата $x = x_n$ се наоѓа лево од точката $y_n = 1$. Како $y_n^* = y_{n-1} + \Delta$ имаме дека $f'(x)$, па

$$m_{n-1} = F(y_{n-1}) > F(y_n^*) > F(1) = m_n.$$

Значи локалните минимуми $m_j, 0 \leq j \leq n$ не растат со растење на j, т.е. формираат “рид”. ♦

Задача 4. Нека локалните минимуми формираат “рид”. Да оддалечиме било кој пар на симетрично поставени асимптоти така што соодветните на нив локални минимуми да останат еднакви. Докажете дека новите локални минимуми повторно образуваат “рид”.

Решение. Ја определуваме функцијата $F(x)$ исто како во лема 1, но така што додаваме дополнителни услови: $f(x)$ да е конвексна, а $f'(x)$ конкавна на полуправата $x > 0$.

Нека локалните минимуми на $F(x)$ образуваат “рид”. Раздалечуваме еден пар на симетрични асимптоти со произволен индекс j така што соодветните локални минимуми m_j остануваат непроменети. При тоа поместување локалните минимуми со индекси $i < j$ се намалуваат, а сите локални минимуми со индекси $k > j$ се зголемуваат, при што измената е поголема доколку i или k се поблиску до j. Значи, новите локални минимуми повторно образуваат "рид". ♦

Алгоритам за добивање на идеалната положба на асимптотите. Да ги распоредиме асимптотите рамномерно на $[-1,1]$. Го раздалечуваме секој пар на симетрични асимптоти како во задача 4 (секој пар не помалку од N пати). Докажете дека при доволно големо N, добиениот распоред на асимптотите $x = x_j$ се стреми кон идеалниот.

Доказ. За секој пар на симетрични асимптоти со индекс j, при нивно поместување од средината кон крајот на интервалот $[-1,1]$ се добива низа од нивни положби

$$x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_N}, ...$$

која е монотона (растечка) и ограничена, па затоа истата конвергира кон некоја вредност x_{j_0}.

Значи, точката $x_N = (x_{1_N}, x_{2_N}, ..., x_{n_N})$ ако бројот на асимптоти е парен или $x_N = (0, x_{1_N}, x_{2_N}, ..., x_{n_N})$ ако бројот на асимптоти е непарен, при $N \to \infty$ конвергира кон точката x_0 со координати x_{j_0}.

Имено точката x_0 го претставува идеалниот распоред на асимптотите, затоа што тогаш сите локални минимуми се еднакви меѓу себе. ♦

4. Проблемот на MAXIMUM MINIMORUM и полиномите на Чебишев

Во овој дел ќе го разгледаме проблемот на MAXIMUM MINIMORUM за функцијата

$$L(x) = \ln \frac{1}{|x-x_1|} + ... + \ln \frac{1}{|x-x_n|} \tag{8}$$

каде $-1 < x_1 < x_2 < ... < x_n < 1$ и $x \in [-1,1] \setminus \{x_1, ..., x_n\}$. При тоа, за решавање на овој проблем ќе ги користиме полиномите на Чебишев, за кои ќе докажеме неколку својства.

Лема 1. За секој $n = 0, 1, 2, ...$ функцијата

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \tag{9}$$

е полином со целобројни коефициенти.

Доказ. За $n = 0$ имаме $T_0(x) = \cos 0 = 1$, а за $n = 1$ важи

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x .$$

Од тригонометрискиот идентитет

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2},$$

следува

$$\cos(n-1)\alpha+\cos(n+1)\alpha=2\cos n\alpha\cos\alpha,$$

па затоа

$$T_{n-1}(x)+T_{n+1}(x)=\cos[(n-1)\arccos x]+\cos[(n+1)\arccos x]=$$
$$=2\cos(n\arccos x)\cos(\arccos x)=2x\,T_n(x)$$

што значи

$$T_{n+1}(x)=2x\,T_n(x)-T_{n-1}(x). \qquad (10)$$

Сега тврдењето следува од $T_0(x)=1, T_1(x)=x$, релацијата (10) и принципот на математичка индукција. ♦

Забелешка. Од релацијата (10) добиваме

$$T_2(x)=2x^2-1,\; T_3(x)=4x^3-3x,\; T_4(x)=8x^4-8x^2+1 \text{ итн.}$$

Да забележиме дека од релацијата (10), принципот на математичка индукција и од $T_0(x)=1, T_1(x)=x$ следува дека $T_n(x)$ е полином од n - ти степен. Да ги определиме нулите и екстремите на полиномот $T_n(x)$ на интервалот $[-1,1]$.

Од $T_n(x)=0$ следува $\cos(n\arccos x)=0$, па затоа

$$n\arccos x=\tfrac{\pi}{2}+k\pi,\quad k=0,1,2,\dots,n-1$$

односно

$$x=\cos\tfrac{\pi+2k\pi}{2n},\quad k=0,1,2,\dots,n-1$$

се n - те нули на $T_n(x)$ на интервалот $[-1,1]$.

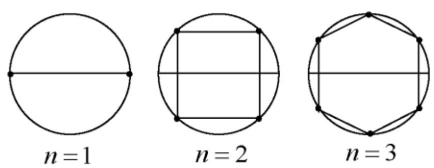
Бидејќи $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ добиваме дека екстремите на $T_n(x)$ на $[-1,1]$ ги добиваме во точки за кои $T_n(x)=\pm1$. Според тоа

$$n\arccos x=k\pi,\quad k=0,1,2,\dots,n$$

односно

$$x=\cos\tfrac{k\pi}{n},\quad k=0,1,2,\dots,n$$

се точките во кои $T_n(x)$ на интервалот $[-1,1]$ прима екстремни вредности.



Цртеж 4

Задача 1. Впишете во кружница со дијаметар $-1\le x\le 1$ правилен $2n$ - аголник поставен како на цртеж 4. Докажете дека нулите на полиномот $T_n(x)$ се совпаѓаат со проекциите на темињата на $2n$ - аголникот врз дијаметарот, $n\ge1$.

Решение. Темињата на правилниот $2n$ - аголник вписан во кружница со радиус 1 во комплексна рамнина се дадени со формулата

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{2n} + i\sin\frac{2k\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, 2, ..., 2n-1,$$

при што едно теме на $2n$ - аголникот се наоѓа во точката $z_0 = 1$. Секој од правилните $2n$ - аголници прикажан на цртеж 4 се добива од веќе разгледаниот $2n$ - аголник со ротација за згол $\frac{\pi}{2n}$, па затоа на неговите темиња соодветствуваат комплексните броеви

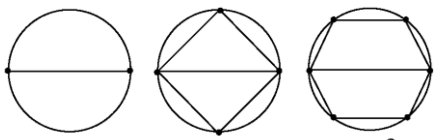
$$u_k = z_k\, e^{i\frac{\pi}{2n}} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{2n} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, ..., 2n-1.$$

Нивните проекции врз дијаметарот (x - оската) се точките

$$\cos\frac{\pi + 2k\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, ..., 2n-1,$$

а тоа се нулите на полиномот $T_n(x)$, при што секоја нула е броена двапати. ♦

Задача 2. Впишете во кружница со дијаметар $-1 \le x \le 1$ правилен $2n$ - аголник поставен како на цртеж 5. Докажете дека точките во кои полиномот $T_n(x)$ има екстреми се совпаѓаат со проекциите на темињата на $2n$ - аголникот врз дијаметарот, $n \ge 1$.



$n=1$ $n=2$ $n=3$

Цртеж 5

Решение. Темињата на секој од правилните $2n$ - аголници ($n \ge 1$) прикажани на цртеж 5 се дадени со формулата

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{2n} + i\sin\frac{2k\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, ..., 2n-1$$

т.е. со формулата

$$z_k = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, ..., 2n-1.$$

Нивните проекции врз дијаметарот (x - оската) се точките

$$\cos\frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, ..., 2n-1,$$

а тоа се точките во кои полиномот $T_n(x)$ има екстреми, при што $n-1$ - те точки се броени двапати. ♦

Лема 2. Нека $T_n(x)$ е n - тиот полином на Чебишев. Ако

$$t_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x),$$

тогаш водечкиот коефициент на $t_n(x)$ (коефициентот пред највисокиот степен) е 1 и

$$\max_{x\in[-1,1]} |t_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}, \; n \ge 1.$$

Доказ. За $T_1(x) = x$ и $T_2(x) = 2x^2 - 1$ водечките коефициенти се 2^0 и $2^1 = 2^{2-1}$ соодветно. Нека претпоставиме дека за $T_{n-2}(x)$ и $T_{n-1}(x)$ водечките коефициенти се 2^{n-3} и 2^{n-2}. Тогаш од (10) добиваме $T_n(x) = 2x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ и како $T_n(x)$ е полином од n - ти степен, од претходната релација и од претпоставката следува дека коефициентот пред x^n во $T_n(x)$ е $2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$.

Сега од принципот на математичка индукција следува дека водечкиот коефициент во $T_n(x)$ е 2^{n-1}. Од дефиницијата на $t_n(x)$ следува дека водечкиот коефициент за овој полином е $\frac{1}{2^{n-1}} \cdot 2^{n-1} = 1$, што требаше да се докаже.

Понатаму,

$$\max_{x\in[-1,1]} |t_n(x)| = \max_{x\in[-1,1]} \left|\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)\right| = \frac{1}{2^{n-1}} \max_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}. \ \blacklozenge$$

Лема 3. За секој полином $P(x)$ од n - ти степен и главен коефициент 1 важи

а) $\max\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$, и

б) ако $\max\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$, тогаш $P(x) \equiv t_n(x)$.

Доказ. а) Нека претпоставиме дека постои полином $P(x)$ од n - ти степен и водечки коефициент 1 таков што

$$\max_{x\in[-1,1]} |P(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Да ја разгледаме разликата $R(x) = t_n(x) - P(x)$. Полиномот $R(x)$ е со степен помал или еднаков на $n-1$. Ќе докажеме дека $R(x)$ има најмалку n нули, од каде ќе следува дека $R(x) \equiv 0$, т.е. $P(x) \equiv t_n(x)$. Графикот на функцијата $y = t_n(x),\ x \in [-1,1]$ се наоѓа меѓу правите $y = \pm\frac{1}{2^{n-1}}$ и наизменично ги допира овие прави во точките на максимум и минимум кои се во интервалот $(-1,1)$, при што се формирани n лаци $d_1, d_2, ..., d_n$. Понатаму, графикот на функцијата $y = P(x),\ x \in [-1,1]$ се наоѓа меѓу истите прави, но не ги допира, па затоа истиот ги сече лаците $d_1, d_2, ..., d_n$. Според тоа графиците на функциите $y = t_n(x)$ и $y = P(x)$ имаат најмалку n заеднички точки, од што следува дека функцијата $y = R(x)$ има најмалку n нули од што следува дека $P(x) \equiv t_n(x)$, што е противречност со

$$\max_{x\in[-1,1]} |P(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Од добиената противречност следува

$$\max_{x\in[-1,1]} |P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

б) Се постапува аналогно како под а), само што сега не треба да се разгледува бројот на корените, туку збирот на нивните кратности. ♦

Лема 4. Минимумот на функцијата (8) на множеството

$$x \in [-1,1] \setminus \{x_1, ..., x_n\}$$

достигнува максимална вредност кога $x_1, ..., x_n$ се совпаѓаат со нулите на полиномот $T_n(x)$ и таа вредност е $(n-1)\ln 2$.

Доказ. Нека $x_1, ..., x_n$ се нулите на $T_n(x)$. Според тоа, $x_1, ..., x_n$ се нули и на $t_n(x)$ и како водечкиот коефициент на $t_n(x)$ е еднаков на 1 добиваме

$$t_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n).$$

Од последното равенство добиваме

$$L(x) = \ln\frac{1}{|x-x_1|} + ... + \ln\frac{1}{|x-x_n|} = \ln\frac{1}{|x-x_1|...|x-x_n|} = \ln\frac{1}{|t_n(x)|}.$$

Од лема 3 следува дека минимумот на $L(x)$ има максимална вредност кога $x_1, ..., x_n$ се совпаѓаат со нулите на $t_n(x)$ и само во тој случај.

Понатаму, бидејќи $\ln x$ е монотоно растечка и непрекината функција од

$$\max_{x\in[-1,1]} |t_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

следува

$$\min_{x\in[-1,1]} \frac{1}{|t_n(x)|} = 2^{n-1}$$

односно

$$\min_{x\in[-1,1]} \ln\frac{1}{|t_n(x)|} = \ln 2^{n-1} = (n-1)\ln 2.$$

Значи, MAXIMUM MINIMORUM на $L(x)$ е $(n-1)\ln 2$. ♦

5. Задачи на MAXIMUM MINIMORUM за точки во рамнина

Да фиксираме n точки $P_1, ..., P_n$ во рамнината (или во просторот) и да земеме произволна точка P. Со $|PP_1|, |PP_2|, ..., |PP_n|$ да го означиме растојанието од точката P до $P_1, P_2, ..., P_n$, соодветно и да ја разгледаме функцијата $L(P)$ дефинирана со:

$$L(P) = \ln\frac{1}{|PP_1|} + \ln\frac{1}{|PP_2|} + ... + \ln\frac{1}{|PP_n|}. \tag{11}$$

И овде се поставува прашањето, како треба да бидат избрани точките $P_1, ..., P_n$ во круг K (или во топка T) за да минимумот на функцијата $L(P)$ во кругот K (во топката T) биде максимален? За да одговориме на поставеното прашање ќе докажеме неколку помошни тврдења.

Лема 1. Нека z_j, $j = 1, 2, ..., n$ се n - те корени на единицата, т.е.

$$z_j = \cos\frac{2\pi j}{n} + i\sin\frac{2\pi j}{n}, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Тогаш збирот

$$S_k = z_1^k + z_2^k + ... + z_n^k$$

е еднаков на нула за секој $k = 1, 2, ..., n-1$.

Доказ. Збирот S_k го множиме со z_1^k. Од $z_j \, z_1 = z_{j+1}$ за $j = 1, ..., n-1$ и $z_n \, z_1 = z_1$ следува

$$S_k \, z_1^k = (z_1 \, z_1)^k + (z_2 \, z_1)^k + ... + (z_{n-1} \, z_1)^k + (z_n \, z_1)^k =$$
$$= z_2^k + z_3^k + ... + z_n^k + z_1^k = S_k$$

односно

$$S_k (z_1^k - 1) = 0 .$$

Но, за секој $k = 1, 2, ..., n-1$ важи $z_1^k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n} \neq 1$, па од последното равенство следува $S_k = 0$. ♦

Последица 1. За секој полином

$$Q(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + ... + c_{n-1} z \, , \; c_i \in \mathbf{C}, \, i = 1, 2, ..., n-1$$

точно е равенството

$$Q(z_1) + Q(z_2) + ... + Q(z_n) = n \, , \tag{12}$$

каде $z_1, z_2, ..., z_n$ се n - те корени на единицата.

Доказ. За секој $j = 1, 2, ..., n$ важи $z_j^n = 1$. Според тоа

$$Q(z_1) + Q(z_2) + ... + Q(z_n) = n + c_1 S_{n-1} + c_2 S_{n-2} + ... + c_{n-1} S_1 = 0 \, .♦$$

Лема 2. За секој полином

$$Q(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + ... + c_{n-1} z \, , \; c_i \in \mathbf{C}, \, i = 1, 2, ..., n-1$$

важи:

а) $\max\limits_{|z| \leq 1} | Q(z) | \geq 1$;

б) Ако $| Q(z) | \leq 1$ за $| z | = 1$, тогаш $Q(z) \equiv z^n$.

Доказ. а) Нека претпоставиме дека $\max\limits_{|z| \leq 1} | Q(z) | < 1$. Тогаш $| Q(z_j) | < 1$, каде z_j, $j = 1, 2, ..., n$ се n - те корени на единицата, па од последица 1 следува

$$n = Q(z_1) + Q(z_2) + ... + Q(z_n) = | Q(z_1) + Q(z_2) + ... + Q(z_n) |$$
$$\leq | Q(z_1) | + | Q(z_2) | + ... + | Q(z_n) | < n \, ,$$

што е противречност. Според тоа, $\max\limits_{|z| \leq 1} | Q(z) | \geq 1$.

б) Нека $| Q(z) | \leq 1$ за $| z | = 1$. Тогаш, од (12) следува

$$Q(z_1) = Q(z_2) = ... = Q(z_n) = 1$$

(ако збирот на n комплексни броеви по модул помали или еднакви на 1 е еднаков на n, тогаш секој собирок е еднаков на 1, неравенство на триаголник). Значи полиномот $Q(z)-1$ има n различни нули $z_j,\ j=1,2,...,n$ и како $Q(z)$ е полином од n - ти степен добиваме дека

$$Q(z)-1=(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_n)=z^n-1$$

т.е. $Q(z)\equiv z^n$. ♦

Последица 2. Ако

$$Q(z)=z^n+c_1z^{n-1}+...+c_{n-1}z+c_n,\ c_i\in\mathbf{C},\ i=1,2,...,n$$

и $Q(z)\le 1$, кога $|z|=1$, тогаш $Q(z)\equiv z^n$.

Доказ. Да го помножиме $Q(z)$ со z. Бидејќи $|zQ(z)|\le 1$, кога $|z|=1$, од лема 2 следува $zQ(z)\equiv z^{n+1}$, па затоа $Q(z)\equiv z^n$. ♦

Теорема 1. Нека $P_1,...,P_n$ се n точки во рамнината. Тогаш минимумот на функцијата (11) кога P припаѓа на произволна кружница прима најголема вредност ако и само ако точките $P_1,...,P_n$ се совпаѓаат со нејзиниот центар.

Доказ. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека кружницата е единечна, па затоа на секоја нејзина точка P соодветствува комплексен број $z=\cos\varphi+i\sin\varphi,\ \varphi\in[0,2\pi]$. Растојанијата $|PP_j|$ за $j=1,2,...,n$ се еднакви на $|z-z_j|,\ j=1,2,...,n$, соодветно, каде $z_j,\ j=1,2,...,n$ се комплексните броеви кои соодветствуваат на точките $P_j,\ j=1,2,...,n$.

Ако $z_j,\ j=1,2,...,n$ се нулите на полиномот

$$Q(z)=z^n+c_1z^{n-1}+...+c_{n-1}z,\ c_i\in\mathbf{C},\ i=1,2,...,n-1,$$

тогаш $Q(z)=(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_n)$, па затоа

$$|Q(z)|=|z-z_1|\cdot|z-z_2|\cdot...\cdot|z-z_n|=|PP_1|\cdot|PP_2|\cdot...\cdot|PP_n|.$$

Според лема 2 имаме $\max\limits_{|z|=1}|Q(z)|\ge 1$, од каде $\max\limits_{|z|=1}|Q(z)|=1$ ако $Q(z)=z^n$ т.е. $z_1=z_2=...=z_n=0$.

Од $\max\limits_{|z|=1}|Q(z)|\ge 1$ следува

$$\min_{|z|=1}\frac{1}{|Q(z)|}=\frac{1}{\max\limits_{|z|=1}|Q(z)|}\le\frac{1}{1}=1,$$

што значи дека $\min\limits_{|z|=1}\frac{1}{|Q(z)|}$ достигнува најголема вредност 1 кога $Q(z)=z^n$ т.е. $z_1=z_2=...=z_n=0$, односно кога точките $P_1,...,P_n$ се совпаѓаат со центарот на кружницата. Понатаму,

$$\min L(P)=\min[\ln\frac{1}{|PP_1|}+\ln\frac{1}{|PP_2|}+...+\ln\frac{1}{|PP_n|}]=\min\ln\frac{1}{|PP_1|\cdot|PP_2|\cdot...\cdot|PP_n|}$$

$$=\min_{|z|=1}\ln\frac{1}{|Q(z)|}=\ln\min_{|z|=1}\frac{1}{|Q(z)|},$$

па добиваме дека минимумот на функцијата $L(P)$ прима најголема вредност кога точките $P_1,...,P_n$ се совпаѓаат со центарот на кружницата.

6. Дополнителни забелешки

Претходните разгледувања ќе ги комплетираме како со забелешки за разработуваната тема, така и со тврдења во врска со полиномите на Чебишев.

Теорема 1. За секој полином

$$Q(z) = z^n + d_1 z^{n-1} + ... + d_{n-1} z + d_n, \quad d_i \in \mathbf{R}$$

важи

а) $\max_{|z|\le 1} |\operatorname{Re} Q(z)| \ge 1$, и

б) ако $|\operatorname{Re} Q(z)| \le 1$, кога $|z| = 1$, тогаш $Q(z) = z^n$.

Доказ. Имаме $\operatorname{Re} Q(z) = \frac{1}{2}[Q(z) + Q(\overline{z})]$. За $|z| = 1$ важи $\overline{z} = \frac{1}{z}$ па затоа $\operatorname{Re} Q(z) = \frac{1}{2}[Q(z) + Q(\frac{1}{z})]$, односно

$$z^n \cdot \operatorname{Re} Q(z) = M(z) = \frac{1}{2} z^{2n} + P(z) + \frac{1}{2}$$

каде $P(z)$ е полином со степен помал или еднаков на $2n-1$ и нулти слободен член.

Според лема 1 од параграф 5 за $2n$ - те корени на единицата: $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{2n}$ важи

$$P(\theta_1) + P(\theta_2) + ... + P(\theta_{2n}) = 0,$$

а од последица 1 од истиот параграф имаме

$$M(\theta_1) + M(\theta_2) + ... + M(\theta_{2n}) = 2n.$$

Конечно,

а) $\max_{|z|\le 1} |M(z)| \ge 1 \quad \Leftrightarrow \quad \max_{|z|\le 1} |\operatorname{Re} Q(z)| \ge 1$

б) ако $|M(z)| \le 1$, кога $|z| = 1$, тогаш $M(\theta_j) = 1$ за секој $j = 1, 2, ..., 2n$, што значи $M(z) = \frac{1}{2} z^{2n} + \frac{1}{2}$ од што следува $Q(z) = z^n$. ♦

Забелешка. Бидејќи при $|z| = 1$, т.е. $z = \cos\varphi + i\sin\varphi, \varphi \in [0, 2\pi]$ важи $z^k = \cos k\varphi + i \sin k\varphi$, односно

$$\operatorname{Re} Q(z) = \cos n\varphi + d_1 \cos(n-1)\varphi + ... + d_k \cos(n-k)\varphi + ... + d_{n-1} \cos\varphi + d_n$$

теорема 1 може да се преформулира на следниот начин:

Теорема 1*. За секој тригонометриски полином

$$f(\varphi) = \cos n\varphi + d_1 \cos(n-1)\varphi + ... + d_n$$

каде $d_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, ..., n$ важи а) $\max\limits_{\varphi\in[0,2\pi)} |f(\varphi)|\geq 1$

б) ако $|f(\varphi)|\leq 1$, кога $\varphi\in(0,2\pi)$, тогаш $f(\varphi)=\cos n\varphi$.

Забелешка. Во последниот облик теоремата е еквивалентна на лема 3 од параграф 4, бидејќи секој полином од x со степен n со реални коефициенти и коефициент 2^{n-1} пред x^n со смената $x=\cos\varphi$ се сведува на тригонометрискиот полином $f(\varphi)$.

Бидејќи со смената $x=\cos\varphi$ полиномот на Чебишев $T_n(x)$ по дефиниција се сведува на $\cos n\varphi$, претходната теорема го добива обликот:

Секој полином $P(x)$ од n - ти степен со реални коефициенти и коефициент 2^{n-1} пред x^n може еднозначно да се запише во обликот

$$T_n(x)+d_1T_{n-1}(x)+...+d_kT_{n-k}(x)+...+d_{n-1}T_1(x)+d_n.$$

Притоа, ако $|x|\leq 1$, тогаш $|P(x)|\geq 1$, а ако пак

$$\max_{|x|\leq 1}|P(x)|=1,$$

тогаш $d_j=0$, $j=1,2,...,n$ т.е. $P(x)=T_n(x)$.

На крајот од нашите разгледувања ќе презентираме уште еден доказ на лема 2 и последица 2 од параграф 5. Претходно ќе ја докажеме следната лема.

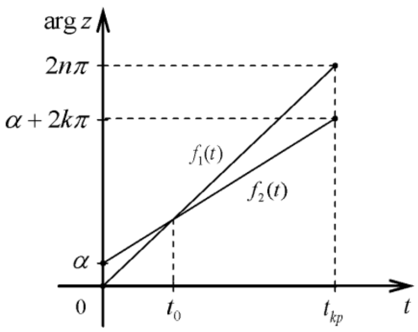
Лема 1. Нека две материјални точки со константни брзини се движат по кружница во ист правец, така што првата тргнува и завршува во точката A, при што n пати го обиколува кругот, а втората истовремено тргнува и завршува во точката B, при што k пати го обиколува кругот, $k<n$. Тогаш,

а) во некој момент точките ќе се совпаднат,

б) точките ќе се совпаднат најмалку $n-k$ пати, и

в) тврдењата под а) и б) важат и кога втората точка не се движи постојано во ист правец.

Доказ. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека точките се движат по единечната кружница $|z|=1$ и дека нивните координати се $z_i=\cos\varphi_i+i\sin\varphi_i$, $i=1,2$.



Цртеж 6

Притоа во моментот $t=0$ за првата точка нека важи $\arg z_1=0$, а за втората $\arg z_2=\alpha, \alpha\in[0,2\pi)$. Во крајниот момент $t=t_{kp}$, по поминувањето на n, односно k круга, $k<n$ имаме $\arg z_1=2n\pi$, а $\arg z_2=\alpha+2k\pi$ и важи $\alpha+2k\pi<2n\pi$.

Графиците на функциите $f_1(t)$ и $f_2(t)$ со кои се дадени промените на аргументите на првата, односно втората точка, во зависност од времето $t \in [0, t_{kp}]$, се прави (цртеж 6).

а) Од $\alpha \geq 0$ следува $f_1(0) \leq f_2(0)$, а од $k < n$ и $\alpha \in [0, 2\pi)$ следува $f_2(t_{kp}) = \alpha + 2k\pi < 2n\pi = f_1(t_{kp})$. Според тоа графиците на $f_1(t)$ и $f_2(t)$ се сечат во точка со апциса $t = t_0$, што значи дека во тој момент $\arg z_1 = \arg z_2$ т.е. точките се совпаѓаат.

б) Во моментот $t = t_{kp}$, разликата на ординатите на точките $f_1(t)$ и $f_2(t)$ со апциси $t = t_{kp}$ е $2n\pi - (\alpha + 2k\pi) = 2(n-k)\pi - \alpha$.

Ако $\alpha > 0$, тогаш $2j\pi < 2(n-k)\pi - \alpha$, за $j = 0, 1, ..., n-k-1$, што значи дека во точно $n-k$ моменти графиците на $f_1(t)$ и $f_2(t)$ се на растојание $2j\pi$, т.е. точките ќе се совпаѓаат.

Ако $\alpha = 0$, тогаш точките ќе се совпаднат $n-k+1$ пати.

в) Нека втората точка не се движи постојано во ист правец. Според тоа графикот на функцијата $f_2(t)$ ќе биде искршена линија за која повторно ќе важи $f_1(0) \leq f_2(0)$ и $f_2(t_{kp}) < f_1(t_{kp})$, што значи дека важи тврдењето под а). Точноста на тврдењето под б) следува од фактот што максималната вредност која $f_2(t)$ може да ја достигне е $\alpha + 2k\pi$, па затоа најмалата разлика на ординатите во $t = t_{kp}$ е $2(n-k)\pi - \alpha$. Во секој друг случај оваа разлика е поголема, па затоа двете точки ќе се совпаднат најмалку $n-k$ пати. ♦

Лема 2. Ако

$$Q(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + ... + c_{n-1} z + c_n, \; c_i \in \mathbf{C}, i = 1, 2, ..., n \tag{13}$$

тогаш $\max\limits_{|z|=1} |Q(z)| \geq 1$ и $\max\limits_{|z|=1} |Q(z)| = 1$ ако и само ако $Q(z) = z^n$.

Доказ. Нека $z = \cos\varphi + i\sin\varphi, \varphi \in [0, 2\pi]$ се движи по кружницата $|z| = 1$. Тогаш $z^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$ ја обиколува единечната кружница n пати, што значи функцијата $L_1(\varphi)$, со која е дадена промената на $\arg z^n$ е линеарна функција за која важи $L_1(0) = 0$ и $L_1(2\pi) = 2n\pi$. Полиномот (13) го запишуваме во облик

$$Q(z) = z^n + D(z),$$

каде

$$D(z) = c_1 z^{n-1} + ... + c_{n-1} z + c_n, \; c_i \in \mathbf{C}.$$

i) Нека $D(z)$ нема нули на кружницата $|z| = 1$. Да означиме $\arg D(1) = \alpha \in [0, 2\pi)$ и да ја разгледаме непрекинатата функција $L_2(\varphi)$ со која е дадена промената $\arg D(z)$, кога $z = \cos\varphi + i\sin\varphi, \varphi \in [0, 2\pi]$. Ако збирот на кратностите на корените на $D(z)$ во кругот $|z| < 1$ е еднаков на k, тогаш

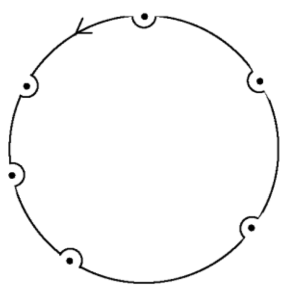
$L_2(2\pi)=\alpha+2k\pi$. Бидејќи $k\le n-1$, збирот на кратностите на корените на корените на $D(z)$ е помал или еднаков на степенот $n-1$ на $D(z)$, имаме $\alpha+2k\pi<2n\pi$, т.е. $L_2(2\pi)<L_1(2\pi)$.

Од друга страна од $\arg D(1)=\alpha$ имаме $L_2(0)=\alpha$, па како $\alpha\ge 0$ добиваме $L_2(0)\ge L_1(0)$.

Значи, графиците $L_1(\varphi)$ и $L_2(\varphi)$ се сечат во $\varphi=\varphi_0\in[0,2\pi)$, т.е. во $z_0=\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0$, комплексните броеви z^n и $D(z)$ имаат еднакви аргументи: $\arg D(z_0)=\arg z_0^n$. Но $D(z)$ нема корени на кружницата $|z|=1$, а z_0 е точка од таа кружница, па затоа $|D(z_0)|=\rho>0$. Конечно,

$$\begin{aligned}|Q(z_0)|&=|z_0^n|+|D(z_0)|\\&=|\cos(\arg z_0^n)+i\sin(\arg z_0^n)+\rho\cos(\arg D(z_0))+i\rho\sin(\arg D(z_0))|\\&=|(1+\rho)\cos(\arg z_0^n)+i(1+\rho)\sin(\arg z_0^n)|=1+\rho>1.\end{aligned}$$

ii) Нека сега $D(z)$ има r корени $z_1,z_2,...,z_r$ на кружницата, $z_j=\cos\varphi_j+i\sin\varphi_j, 1\le j\le r$ и нека збирот на кратностите на тие корени е еднаков на s, а збирот на кратностите на корените на $D(z)$ во кругот $|z|<1$ е еднаков на k. Тогаш, $s+k\le n-1$, па затоа $r\le s<n-k$.



Да ја разгледаме контурата K_ε која се совпаѓа со кружницата $|z|=1$ освен во точките $z_j,\ j=1,2,...,r$ кои ги заобиколуваме со полукружници со радиуси ε кои лежат внатре во кругот $|z|\le 1$ (цртеж 7). Но, и тука прирастот на $\arg D(z)$ при движењето на точката z по контурата K_ε е еднаков на $2k\pi$. Кога $\varepsilon\to 0$ ја опреде-луваме функцијата $L_2(\varphi)$ со која е дадена промената на $\arg D(z)$, на

$$z=\cos\varphi+i\sin\varphi,\ \varphi\in[0,2\pi].$$

Оваа функција е прекината во точките $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_r$ кои соодветствуваат на корените $z_1,z_2,...,z_r$, при што скокот на $L_2(\varphi)$ во φ_j е еднаков на $-\pi k_j$, каде што k_j е кратноста на коренот z_j.

Функциите $L_2^0(\varphi),L_2^1(\varphi),...,L_2^{n-k-1}(\varphi)$ ги добиваме од $L_2(\varphi)$ со поместување на нејзиниот график нагоре за $2j\pi, 0\le j\le n-k-1$. Овие $n-k$ функции се сечат со графикот на линеарната функција $L_1(\varphi)$. Бидејќи $n-k>r$, постои точка со апциса φ_0 таква што $\varphi_0\ne\varphi_i, i=1,2,...,r$. Точката $z_0=\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0$ припаѓа на кружницата $|z|=1$ и таа не е корен на $D(z)$, т.е. $D(z_0)\neq 0$. Сега аналогно на доказот од i) имаме

$$|Q(z_0)|=1+|D(z_0)|>1.$$

Конечно,

- ако $D(z)\neq 0$, тогаш $\max\limits_{|z|=1}|Q(z)|>1$

- ако $|Q(z)|\leq 1$, за $|z|=1$, тогаш $D(z)\equiv 0$ т.е. $Q(z)=z^n$. ♦

Забелешка. *Оваа тема всушност е дел од завршниот камп на Турнирот на градови одржан во Суботица 200* година.*

Превеле
Ирена Стојковска
Ристо Малчески