

Регионален натпревар 1994

I година

1. Еден селанец одејќи по пат ги сретнал Итар Пејо и Насрадин Оца. Еве го нивниот разговор:

Селанецот: - Добар ден.

Пејо и Насрадин: -Добар ден.

Селанецот: - Кој ден е денес?

Насрадин: - Утре ќе зборувам вистина.

Селанецот: - А, кој ден е утре?

Насрадин: - Утре не е недела.

Селанецот се врти кон Пејо: - Пејо, дај барем ти кажи кој ден е денес?

Пејо прозборува нешто и оди.

Селанецот се врти кон Насрадин: - Ете ти сега, не слушнав добро. Што рече Пејо?

Насрадин: - Рече дека не е понеделник.

Селанецот: - Е, сега знам кој ден е денес. Ајде догледање.

Можете ли да утврдите кој ден во неделата е воден разговорот, ако го знаете она што и селанецот го знае, а тоа е дека Пејо лаже во понеделник, вторник и среда, а другите денови зборува вистина, додека Насрадин лаже во четврток, петок и сабота, а другите денови зборува вистина?

Решение. Со оглед на условите од задачата, својата прва изјава Насрадин не може да ја даде во среда, затоа што во среда зборува вистина, а изјавата би била лажна и не може да ја даде во сабота, затоа што во сабота лаже, а изјавата би била вистинита. Во сите други денови оваа изјава е можна.

Втората изјава Насрадин не може да ја даде во четврток и петок, затоа што во тие денови лаже, а изјавата би била вистинита. Во сите други денови изјавата на Насрадин е можна.

Значи, разговорот е воден во недела, понеделник или вторник. Во сите овие денови Насрадин зборува вистина, па значи Пејо навистина рекол дека е понеделник.

Но, Пејо во недела не би рекол дека е понеделник, затоа што во недела не лаже, а во понеделник не би рекол дека е понеделник, затоа што тогаш лаже.

Значи, останува единствената можност разговорот да е воден во вторник. Лесно се проверува дека во вторник ниту една од дадените изјави не е невозможна, па значи вторник е бараниот ден.

2. Нека $ABCDT$ е пирамида чија основа $ABCD$ е квадрат и работ TA е нормален на основата.

а) Докажи дека околу пирамидата може да се опише сфера.

б) Ако плоштината на опишаната сфера е 11π , а основниот раб е 1, да се определи волуменот на пирамидата.

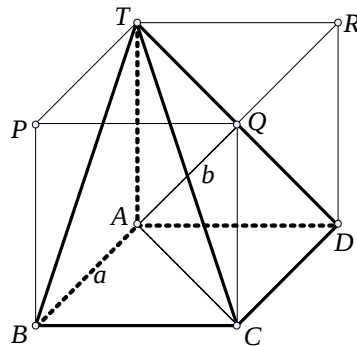
Решение. а) Во темињата B , C и D повлекуваме нормали на основата и на нив избираме точки P , Q и R соодветно, така што $ABCDTPQR$ е квадар. Околу

секој квадар може да се опише сфера со центар во пресекот на главните дијагонали на истиот. Во дадениот случај центарот е во пресекот на дијагоналите AQ и TC . Сферата опишана околу $ABCDTPQR$ е опишана и околу пирамидата $ABCDT$.

б) Да ја означиме со r должината на радиусот на опишаната сфера, со P плоштината на истата, со h должината на работ TA , со a должината на основниот раб и со b должината на работ TC .

Според првиот дел на задачата, центарот на сферата е на половина на работ TC , па, значи, $b = 2r$. Бидејќи работ TA е нормален на основата, според Питагорината теорема, добиваме $h^2 = b^2 - (a\sqrt{2})^2$, односно $h^2 = 4r^2 - 2a^2$. Бидејќи $P = 4r^2\pi$ и $P = 11\pi$, добиваме $4r^2 = 11$,

од каде што добиваме $h^2 = 11 - 2 = 9$, односно $h = 3$. За волуменот на пирамидата $ABCDT$, конечно, добиваме $V = \frac{1}{3}a^2h = 1$.



3A. Некоја стока, која чини 455 денари, е платена со монети од 5 денари и банкноти од 10 и 50 денари, при што вкупно се дадени 23 монети и банкноти. Бројот на монетите од 5 денари е помал од бројот на банкнотите од 10 денари. Со колку монети од 5 денари и банкноти од 10 и 50 денари е платена стоката?

Решение. Го означуваме бројот на монети од 5 денари со x , а броевите на банкнотите со 10 и 50 денари со y и z соодветно.

За избрано z , најмала можна сума што може да се плати со расположивите банкноти и монети е $50z + (23 - z) \cdot 5 = 45z + 115$. Ако $z \geq 8$ оваа сума ќе ја надмине сумата од 455 денари, па значи, $z \leq 7$.

Слично, за избрано z , најголема сума што може да се плати е $50z + (23 - z) \cdot 10$ односно $40z + 230$. Ако $z \leq 5$ оваа сума ќе биде помала од 455 денари, па, значи, $z \geq 6$.

Нека $z = 7$. Од условите на задачата го добиваме системот:

$$\begin{cases} 5x + 10y = 105 \\ x + y = 16 \end{cases}$$

чие што решение $x = 11$, $y = 5$ не ги задоволува условите од задачата, бидејќи е познато дека $x < y$.

Нека $z = 6$. Од условите на задачата го добиваме системот:

$$\begin{cases} 5x + 10y = 155 \\ x + y = 17 \end{cases}$$

чиешто решение е $x = 3$, $y = 14$. Ова решение ги задоволува сите услови на задачата.

Значи, стоката е платена со 3 монети од 5 денари, 14 банкнотите од 10 денари и 6 банкнотите од 50 денари.

4А. На мудрецовот S му го кажал само збирот на три последователни природни броеви, а на мудрецовот P само нивниот производ, но ниеден од нив не бил во состојба да утврди кои се трите почетни броеви.

“Ако јас знаев, рекол” S , “дека твојот број е поголем од мојот, ќе ги определев броевите”.

“Но мојот број е помал од твојот” заклучил P , и “броевите се ..., ... и ...”.

Опреди ги трите броеви.

Решение. Да ја означиме сумата на трите броеви со s , а производот со p . Јасно е дека $s \geq 3$.

Мудрецовот S ја знае сумата s , но таа е таква да тој не може да ги одреди броевите знаејќи ја само оваа сума без дополнителна информација.

Ако $s = 3$, трите дадени броеви се еднакви на 1, во тој случај мудрецовот S веднаш би ги одредил броевите. Значи, s не е 3.

Ако $s = 4$, трите броеви се 2, 1 и 1, но и во овој случај мудрецовот S веднаш би ги одредил броевите. Значи, s не е 4.

Ако $s = 5$, трите броеви се 3, 1 и 1, или, пак 2, 2 и 1. Во првиот случај $p = 3$, а во вториот $p = 4$. Во двата случаи $p < s$; што значи дека S во овој случај знае дека производот е помал од сумата и не би ја дал изјавата дадена во текстот. Значи, s не е 5.

Нека $s \geq 7$. Освен другите можности, трите броеви можат да бидат 2, 2 и $s - 4$, како и 2, 1 и $s - 3$. Во првиот случај:

$$p = 4s - 16 = s + 3s - 16 \geq s + 21 - 16 = s + 5 > s,$$

а во вториот:

$$p = 2s - 16 = s + s - 16 \geq s + 7 - 6 = s + 1 > s.$$

Во двата случаи производот е поголем од збирот, па мудрецовот S дури и ако знае дека производот е поголем од збирот, не може да одреди кои се трите броеви (има барем две можности). Значи, $s \leq 6$.

Останува можноста $s = 6$. Во овој случај трите броеви се 4, 1 и 1 или 3, 2 и 1 или 2, 2 и 2. Во првиот случај $p = 4$, во вториот $p = 6$ а во третиот $p = 8$. Мудрецовот S ги знае овие три можности и доколку знае дека производот е поголем, може да заклучи дека трите дадени броеви се 2, 2 и 2. Значи, $s = 6$.

Мудрецовот P размислува на претходно изложениот начин и заклучува дека $s = 6$. P го знае производот и тврди дека тој е помал од збирот. Значи, $p = 4$ и дадените броеви се 4, 1 и 1.

4Б. Во златарската работилница треба да се направи 5 kg смеса во која односот на количествата на злато и сребро е 22:41. Во залиха има две смеси. Во едната количествата злато и сребро се наоѓаат во однос 4:5, а во втората 2:5. Колку треба да се земе од секоја смеса за да се добие бараната смеса?

Решение. Во новата смеса од 5 kg треба да има $5 \cdot \frac{22}{63}$ kg злато. Да земеме x kg од првата и y kg од втората смеса.

Количеството злато што треба да се добие на овој начин е $x \cdot \frac{4}{9} + y \cdot \frac{2}{7}$. Според условите на задачата го добиваме системот

$$\begin{cases} x \cdot \frac{4}{9} + y \cdot \frac{2}{7} = 5 \cdot \frac{22}{63} \\ x + y = 5 \end{cases}$$

чиешто решение е $x=2$ и $y=3$.

Според тоа, треба да земеме 2 kg од првата и 3 kg од втората смеса.

4Б. Најди ги сите цели броеви m за кои дробката $\frac{m^3+1}{m-1}$ е исто така цел број.

Решение. Имаме $\frac{m^3+1}{m-1} = m^2 + m + 1 + \frac{2}{m-1}$, па $(m-1) \mid 2$. Од овде се добива дека $m-1 \in \{-2, -1, 1, 2\}$, односно $m \in \{-1, 0, 2, 3\}$.

II година

1. Нека O е внатрешна точка во $\triangle ABC$. Понатаму, нека правите p, q и r минуваат низ точката O при што $p \parallel AC$, $q \parallel AB$ и $r \parallel BC$ и нека K, L и M се пресечните точки на p, q и r со правите AB, BC и AC соодветно. Точките P, Q и R се пресечните точки на правите CK и AL , AL и BM , BM и CK , соодветно. Докажи дека збирот на плоштините на триаголниците AKP , BLQ и CMR е еднаков на плоштината на триаголникот PQR .

Решение. Имаме

$$P_{PQR} = P_{ABC} - P_{ABL} - P_{BCM} - P_{CAK} + P_{AKP} + P_{BLQ} + P_{CMR}. \quad (1)$$

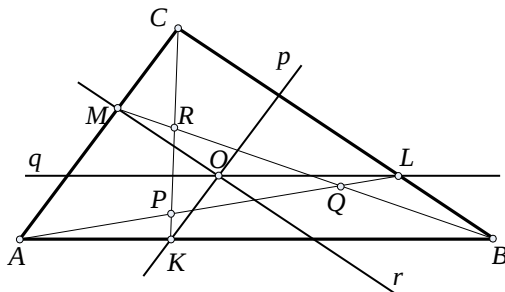
Претходното важи бидејќи плоштината на PQR може да се пресмета на тој начин што од плоштината на $\triangle ABC$ ќе се одземат плоштините на $\triangle ABL, \triangle BCM$ и $\triangle ACK$, а потоа, бидејќи со ваквото одземање на плоштините на $\triangle AKP$, $\triangle BLQ$ и $\triangle CMR$ се одземени по два пати, истите плоштини се додадат по еднаш. Триаголниците ABL и ABO имаат иста основа AB и еднаква висина ($q \parallel AB$), па значи $P_{\triangle ABL} = P_{\triangle ABO}$. Аналогно, важи и $P_{\triangle BCM} = P_{\triangle BCO}$, како и $P_{\triangle CAK} = P_{\triangle CAO}$. Но, бидејќи

$$P_{\triangle ABO} + P_{\triangle BCO} + P_{\triangle CAO} = P_{\triangle ABC},$$

добиваме

$$P_{\triangle ABL} + P_{\triangle BCM} + P_{\triangle CAK} = P_{\triangle ABC},$$

од каде што со замена во (1) се добива бараното тврдење.



2. Нека a, b и c се позитивни реални броеви при што $a+b+c=1$ и еден корен на равенката $ax^2+bx+c=x$ е во интервалот $(0,1)$.

Докажи дека $2a + b > 1$.

Решение. Веднаш се гледа дека едно решение на дадената равенка е 1. Да го означиме ова решение со x_1 , а другото со x_2 . Од Виетовите врски имаме $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, а бидејќи $x_1 = 1$, добиваме $x_2 = \frac{c}{a}$. Од двете решенија само x_2 може да се наоѓа во интервалот $(0,1)$, па значи $\frac{c}{a} < 1$. Оттука добиваме $c < a$ и

$$1 = a + b + c < a + b + a = 2a + b.$$

3A. Нека a, b и c се комплексни броеви такви што $|a| = |b| = |c| = 1$. Докажи дека

$$\left| \frac{ab+bc+ac}{a+b+c} \right| = 1.$$

Решение. Ако z е комплексен број, тогаш $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$. За произволни комплексни броеви z и w важи $\overline{(z+w)} = \bar{z} + \bar{w}$ и $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$. Користејќи ги овие својства добиваме $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 1$. Понатаму:

$$\begin{aligned} |ab+bc+ac|^2 &= (ab+bc+ac) \overline{(ab+bc+ac)} \\ &= (ab+bc+ac)(a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c}) \\ &= 3 + a\bar{b} + \bar{a}b + b\bar{c} + \bar{b}c + a\bar{c} + \bar{a}c \end{aligned}$$

$$|a+b+c|^2 = (a+b+c) \cdot \overline{(a+b+c)} = 3 + a\bar{b} + \bar{a}b + b\bar{c} + \bar{b}c + a\bar{c} + \bar{a}c;$$

и конечно

$$\left| \frac{ab+bc+ac}{a+b+c} \right|^2 = 1,$$

од каде што директно следува бараното равенство.

4A. Да се одредат реалните решенија на равенката $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = a$ каде што a е произволен реален број. Во зависност од параметарот a да се определи бројот на решенија на равенката и тие да се наведат.

Забелешка. Корените се сметаат за аритметички, т.е. вредностите на корените се ненегативни.

Решение. Јасно е дека равенката нема решение ако $a < 0$, затоа што левата страна на равенката никогаш не е негативна. Поради тоа претпоставуваме $a \geq 0$.

Да воведеме смена $\sqrt{x-1} = t$, каде што $t \geq 0$ (поради ненегативноста на корените). Од смената добиваме $x = t^2 + 1$. Со замена во дадената равенка добиваме:

$$\sqrt{t^2 + 1 + 3 - 4t} = a \Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 4t + 4} = a \Leftrightarrow \sqrt{(t-2)^2} = a \Leftrightarrow |t-2| = a \quad (1)$$

Поради знакот на апсолутна вредност, разгледуваме два случаи:

I. $t \geq 2$. Во овој случај $|t-2| = t-2$ и равенката (1) добива облик $t-2 = a$, од каде што $t = a+2$.

Но поради условите $t \geq 0$ и $t \geq 2$, за параметарот a треба да важи $a+2 \geq 0$ и $a+2 \geq 2$, односно $a \geq -2$ и $a \geq 0$. Значи, $t = a+2$ за $a \geq 0$.

II. $t < 2$. Во овој случај $|t-2| = 2-t$ и равенката (1) го добива обликот $2-t = a$, од каде што $t = 2-a$.

Но, поради условите $t \geq 0$ и $t < 2$, за параметарот a треба да важи $2-a \geq 0$ и $2-a < 2$, односно $a \leq 2$ и $a > 0$. Значи, $t = 2-a$ за $a \in (0, 2]$.

Се враќаме на смената $\sqrt{x-1} = t$, односно $x = t^2 + 1$ и конечно добиваме:

- ако $a < 0$ равенката нема решение.
- ако $a = 0$ равенката има единствено решение $x = 5$;
- ако $a \in (0, 2]$ равенката има две решенија $x = a^2 \pm 4a + 5$;
- ако $a > 2$ равенката има единствено решение $x = a^2 + 4a + 5$.

3Б. Нека се a, b и c се комплексни броеви. Докажи дека

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |a+b+c|^2 = |a+b|^2 + |b+c|^2 + |a+c|^2.$$

Решение. Ако z е комплексен број, тогаш $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$. За произволни комплексни броеви z и w важи $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$. Користејќи ги овие својства добиваме:

$$\begin{aligned} |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |a+b+c|^2 &= a \cdot \bar{a} + b \cdot \bar{b} + c \cdot \bar{c} + (a+b+c) \cdot \overline{(a+b+c)} \\ &= 2a \cdot \bar{a} + 2b \cdot \bar{b} + 2a \cdot \bar{b} + b \cdot \bar{a} + a \cdot \bar{b} + b \cdot \bar{c} + c \cdot \bar{b} + c \cdot \bar{a} + a \cdot \bar{c} \\ |a+b|^2 + |b+c|^2 + |c+a|^2 &= (a+b)(\bar{a}+\bar{b}) + (b+c)(\bar{b}+\bar{c}) + (c+a)(\bar{c}+\bar{a}) \\ &= 2a \cdot \bar{a} + 2b \cdot \bar{b} + 2a \cdot \bar{b} + b \cdot \bar{a} + a \cdot \bar{b} + b \cdot \bar{c} + c \cdot \bar{b} + c \cdot \bar{a} + a \cdot \bar{c} \end{aligned}$$

од каде што директно следува тврдењето.

4Б. Да се определат реалните решенија на равенката

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} = \sqrt{2x-2}.$$

Забелешка. Корените се сметаат за аритметички, т.е. вредностите на корените се ненегативни.

Решение. Бидејќи $x-1 < x+1$ за секој реален број x јасно е дека за секој реален број од дефиниционата област на равенката важи $\sqrt{x-1} < \sqrt{x+1}$, односно $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} < 0$. Бидејќи левата страна на равенката е негативна, а десната е ненегативна, дадената равенка нема решение.

III година

1. Да се реши неравенката

$$\operatorname{tg}^2 x_1 + \operatorname{tg}^2 x_2 + \dots + \operatorname{tg}^2 x_{997} + \operatorname{ctg}^2 x_1 + \operatorname{ctg}^2 x_2 + \dots + \operatorname{ctg}^2 x_{997} \leq 1994$$

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката:

$$(\operatorname{tg} x_1 - \operatorname{ctg} x_1)^2 + (\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{ctg} x_2)^2 + \dots + (\operatorname{tg} x_{997} - \operatorname{ctg} x_{997})^2 \leq 0,$$

од каде добиваме дека за секој $i \in \{1, 2, \dots, 997\}$ важи:

$$\operatorname{tg} x_i - \operatorname{ctg} x_i = 0$$

односно

$$\operatorname{tg} x_i = \operatorname{ctg} x_i.$$

Од последната равенка добиваме дека за $i \in \{1, 2, \dots, 997\}$ важи:

$$x_i \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{3\pi}{4} + m\pi \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$$

За ваквите вредности на x_i , всушност во неравенката важи равенство.

2. Прав цилиндар со радиус $r = \sqrt{39}$ и прав конус со радиус $R = 9$ имаат еднаква висина $H = 15$. На која ненулта висина x , треба да се пресечат цилиндарот и конусот за да новодобиениот цилиндар со висина x и пресечениот конус со висина x имаат еднакви волумени?

Решение. Со y го означуваме радиусот на помалата основа на пресечениот конус со висина x . Од сличноста на триаголниците AOO' и ACC' , добиваме

$$\frac{y}{R} = \frac{H-x}{H} \quad (1)$$

За волуменот на пресечениот конус важи

$$\begin{aligned} V_k &= \frac{R^2 \pi H}{3} - \frac{y^2 \pi (H-x)}{3} \\ &= \frac{\pi}{2} (R^2 H - y^2 H + y^2 x) \end{aligned} \quad (2)$$

Ако од (1) го изразиме y и го замениме во (2) добиваме

$$V_k = \frac{R^2 \pi x}{3H^2} (x^2 - 3Hx + 3H^2). \quad (3)$$

Со изедначување на овој волумен и волуменот на цилиндарот со висина x ја добиваме равенката:

$$r^2 \pi x = \frac{R^2 \pi x}{3H^2} (x^2 - 3Hx + 3H^2).$$

Ако ја поделиме равенката со x ($x \neq 0$) и ги замениме дадените вредности за r , H и H , добиваме

$$x^2 + 45x + 350 = 0.$$

Решенијата на последната равенка се 10 и 35, од кои второто не го земаме предвид бидејќи ја надминува висината на дадените цилиндар и конус.

Значи, цилиндарот и конусот треба да се пресечат на висина $x = 10$.

3А. Да се реши равенката

$$2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}}\right) = 1.$$

Решение. Воведуваме смена $t = 2^x$. Со замена во дадената равенка се добива равенката $t^3 - \frac{8}{t^3} - 6\left(t - \frac{2}{t}\right) = 1$, која што е еквивалентна со равенката $\left(t - \frac{2}{t}\right)^3 = 1$.

Од последната равенка се добива $t - \frac{2}{t} = 1$ од каде што $t = -1$ или $t = 2$. Со оглед на направената смена, t е позитивен број, па, значи $t = 2$, од каде што добиваме $x = 1$.

Лесно се проверува дека $x = 1$ е навистина решение на дадената равенка.

4А. Нека ABC е триаголник, при што $\gamma > \beta$ (со γ е означен аголот кај темето C , а со β аголот кај темето B). Нека O е центарот на впишаната кружница, а M, N и L се точките на страните BC, AB и AC , соодветно, во кои што впишаната кружница ги допира страните на триаголникот. Понатаму, нека K е пресечната точка на правите AO и MN . Докажи дека $\angle AKC$ е прав.

Решение. Аголот $\angle AKC$ е еднаков на аголот $\angle OKC$. Аголот $\angle OMC$ е прав бидејќи е агол меѓу тангентата и соодветен радиус на впишаната кружница. За да докажеме дека $\angle AKC = \angle OKC$ е прав доволно е да покажеме дека четириаголникот $OKMC$ е тетивен (постои кружница опишана околу $OKMC$), затоа што во тој случај агли $\angle OKC$ и $\angle OMC$ се еднакви како периферни агли над иста тетива OC .

Ќе покажеме дека $OKMC$ е тетивен на тој начин што ќе докажеме дека

$$\angle KOC + \angle KMC = 180^\circ.$$

Имаме

$$\angle KOC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} \quad (\angle KOC \text{ е надворешен за } OAC) \quad (1)$$

$$\triangle BOM \cong \triangle BON \quad (\text{признак } CAC) \quad (2)$$

$$BMON \text{ е делтоид} \quad (\text{директно од (2)}) \quad (3)$$

$$MN \perp BO \quad (\text{директно од (3)}) \quad (4)$$

$$\angle BOM = 90^\circ - \frac{\beta}{2} \quad (\angle BMO = 90^\circ) \quad (5)$$

$$\angle KMO = \frac{\beta}{2} \quad (\text{од (4) и (5)}) \quad (6)$$

$$\angle KMC = 90^\circ + \frac{\beta}{2} \quad (\angle OMC = 90^\circ \text{ и (6)}) \quad (7)$$

$\angle KOC + \angle KMC = 180^\circ$ (од (1), (7) и $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$). Со тоа доказот е завршен.

3Б. Да се определат реалните решенија на равенката

$$8^{\frac{x-3}{2x-7}} \sqrt[3]{0,5^{4x+3}} = 1.$$

Решение. Имајќи предвид дека $8 = 2^3$ и $0,5 = 2^{-1}$, а во согласност со правилата за степенување и коренување, дадената равенка ја сведуваме на равенката

$$2^{\frac{x-3}{2x-7}} \cdot 2^{\frac{-4x-3}{3x-3}} = 1,$$

од каде што добиваме

$$2^{\frac{x-3}{2x-7} + \frac{-4x-3}{3x-3}} = 1.$$

Но $2^y = 1$ ако и само ако $y = 0$, па од претходната равенка ја добиваме равенката

$$\frac{3x-9}{2x-7} + \frac{-4x-3}{3x-3} = 0,$$

која што се сведува на квадратната равенка

$$x^2 - 14x + 48 = 0,$$

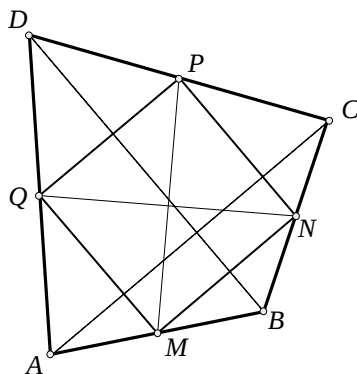
чии решенија се $x_1 = 6$ и $x_2 = 8$.

За овие вредности на x , изразите во почетната равенка се дефинирани, а освен тоа за нив равенката е задоволена. Значи, равенката има две реални решенија $x_1 = 6$ и $x_2 = 8$.

4Б. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник и нека M, N, P и Q се средините на страните AB, BC, CD и DA соодветно. Докажи дека дијагоналите на $ABCD$ се заемно нормални, ако и само ако дијагоналите на $MNPQ$ се еднакви.

Решение. Ќе покажеме прво дека четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм. Навистина, MN и PQ се средни линии на триаголниците ABC и ADC , соодветно, па, значи двете се паралелни на AC . Добиваме дека MN, PQ и AC се паралелни. Аналогно се добива дека и NP, QM и BD се паралелни. Оттука е јасно дека $MNPQ$ е паралелограм чии страни се паралелни на дијагоналите на $ABCD$.

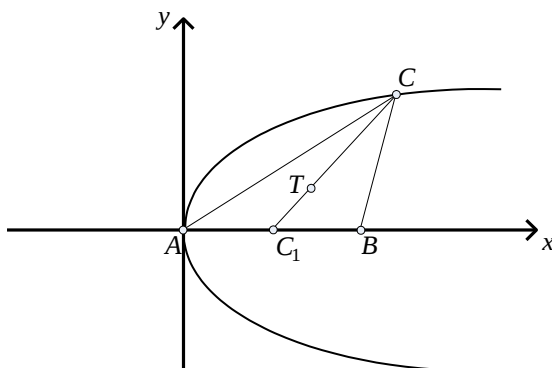
Ако дијагоналите на паралелограмот $MNPQ$ се еднакви, тогаш тој паралелограм е правоаголник, од каде што добиваме дека дијагоналите на $ABCD$ се заемно нормални.



IV година

1. Што претставува геометриското место на тежиштата на триаголниците со темиња: A е во темето на параболата $y^2 = 2px$, B во фокусот на параболата и C на дадената параболата?

Решение. Нека $C(x_1, y_1)$ е произволна точка од параболата $y^2 = 2px$, различна од $A(0,0)$. Точката C се бира да биде различна од A за да ABC биде триаголник. Нека $T = (x, y)$ е тежиштето на триаголникот ABC . За темето B коешто е во фокусот на параболата $B(\frac{p}{2}, 0)$, а за половината на страната AB имаме $C_1(\frac{p}{4}, 0)$. Бидејќи



T ја дели отсечката C_1C во однос $1:2$, добиваме

$$x = \frac{p+2x_1}{6} \text{ и } y = \frac{y_1}{3},$$

од каде што

$$x_1 = \frac{6x-p}{2} \text{ и } y_1 = 3y.$$

Бидејќи $C(x_1, y_1)$ лежи на параболата, добиваме

$$9y^2 = 2p \frac{6x-p}{2},$$

од каде што:

$$y^2 = 2p(x - \frac{p}{6}) \quad (1)$$

Значи, бараното геометриско место на точки е парабола дадена во (1), но без темето $(\frac{p}{6}, 0)$, затоа што $A \neq Cx$.

2. Докажи дека за секој природен број n , $\cos(nx)$ може да се изрази како полином по $\cos x$ од n -ти степен.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со помош на принципот на математичка индукција. Индукцијата ќе ја спроведуваме по n . Во доказот се користат формулите:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

и

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

За $n = 1$ тврдењето е очигледно.

Нека тврдењето важи за секој $n \leq k$ и нека за такви n имаме:

$$\cos(nx) = P_n(\cos x)$$

каде што $P_n(\cos x)$ е полином по $\cos x$ од n -та степен.

За $k+1$ добиваме:

$$\begin{aligned} \cos((k+1)x) &= \cos(kx + x) = \cos(kx) \cdot \cos x - \sin(kx) \cdot \sin x \\ &= \cos(kx) \cdot \cos x - \frac{1}{2}\cos((k-1)x) + \frac{1}{2}\cos((k+1)x) \end{aligned}$$

од каде што се добива

$$\cos((k+1)x) = 2\cos(kx) \cdot \cos x - \cos((k-1)x) = 2P_k(\cos x) \cdot \cos x - P_{k-1}(\cos x)$$

Дадениот израз за $\cos((k+1)x)$ е полином по $\cos x$ од степен $k+1$.

Според принципот на математичка индукција, тврдењето важи за секој природен број.

3А. Определи ги сите аритметички прогресии со разлика $d = 2$, така што односот $\frac{S_{3n}}{S_n}$ не зависи од n .

Решение. Нека првиот член на аритметичката прогресија која го задоволува дадениот услов е a_1 . Сумата на првите k -членови на оваа прогресија е

$$S_k = \frac{k}{2}[2a_1 + (k-1) \cdot 2] = k(a_1 + k-1).$$

Од условот следува дека за $n=1$ и $n=2$ важи $\frac{S_3}{S_1} = \frac{S_6}{S_2}$ од каде што ја добиваме равенката $\frac{3(a_1+2)}{a_1} = \frac{6(a_1+5)}{2(a_1+1)}$, чие единствено решение е $a_1 = 1$.

Значи, ако некоја прогресија со разлика 2 го задоволува дадениот услов, тогаш таа има прв член $a_1 = 1$.

Обратно, ако $a_1 = 1$, тогаш

$$\frac{S_{3n}}{S_n} = \frac{3n(1+3n-1)}{n(1+n-1)} = \frac{9n^2}{n^2} = 9,$$

па значи, дадениот однос не зависи од n .

Значи, постои само една таква прогресија и тоа 1,3,5,....

4А. Определи ги сите природни броеви n , за кои постојат три последователни коефициенти во развојот на $(a+b)^n$ кои што формираат аритметичка прогресија.

Решение. Нека $\binom{n}{k-1}$, $\binom{n}{k}$ и $\binom{n}{k+1}$ се три последователни коефициенти на развојот на $(a+b)^n$, при што $0 < k < n$. Потребен и доволен услов да овие три коефициенти формираат аритметичка прогресија е:

$$2\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1},$$

од каде што, по средувањето, добиваме:

$$4k^2 - 4nk + n^2 - n - 2 = 0. \quad (1)$$

Значи, бараните броеви се сите оние $n \in \mathbb{N}$ за кои равенката (1) има барем едно целобројно решение k така што $0 < k < n$.

Решенијата на равенката се $k_{1/2} = \frac{n \pm \sqrt{n+2}}{2}$.

Бидејќи треба да важи $0 < k_1 < n$ или $0 < k_2 < n$, добиваме $-n < \sqrt{n+2} < n$. Условот $-n < \sqrt{n+2}$ е секако исполнет за $n \in \mathbb{N}$, а условот $\sqrt{n+2} < n$ е исполнет за $n \geq 3$.

Обратно, ако $n \geq 3$, тогаш важи $0 < k_1 < k_2 < n$.

За да барем едно решение на равенката (1) биде цел број потребно е $n+2$ да е квадрат на природен број, т.е. $n+2 = s^2$ за некој $s \in \mathbb{N}$.

Обратно, ако $n+2 = s^2$ за некој $s \in \mathbb{N}$, решенијата на равенката (1) се: $k_{1/2} = \frac{s(s \pm 1)}{2} - 1$, а овие два броја се цели бидејќи $s(s-1)$ и $s(s+1)$ се производи на последователни броеви, па значи, деливи се со 2.

Конечно, заклучуваме дека бараните броеви се: $n = s^2 - 2$, за $s = 3, 4, 5, \dots$

3Б. Множеството природни броеви е разбиено на множества на следниот начин:

$$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10\}, \dots$$

Нека S_k е збирот на броевите во k -тото множество (множество со k елементи). Докажи дека

$$S_1 + S_3 + S_5 + \dots + S_{2n-1} = n^4.$$

Решение. Пред најмалиот природен број во k -тото множество има

$$1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) = \frac{(k-1)k}{2}$$

броеви, па, значи, најмалиот број во k -тото множество е $\frac{(k-1)k}{2} + 1$. Сумата S_k може да се добие како сума на k членови на аритметичка прогресија со разлика 1 и прв член $\frac{(k-1)k}{2} + 1$. Добиваме: $S_k = \frac{k}{2} \left(2 \left(\frac{(k-1)k}{2} \right) + (k-1) \right) = \frac{k^3 + k}{2}$.

Ќе го докажеме даденото тврдење со помош на принципот на математичка индукција.

За $n = 1$ тврдењето важи, бидејќи $S_1 = 1 = 1^4$.

Да претпоставиме дека тврдењето е точно за $n = m$, т.е.

$$S_1 + S_3 + S_5 + \dots + S_{2m-1} = m^4.$$

Тогаш, за $n = m+1$, добиваме:

$$\begin{aligned} S_1 + S_3 + S_5 + \dots + S_{2m-1} + S_{2(m+1)-1} &= S_1 + S_3 + S_5 + \dots + S_{2m-1} + S_{2m+1} \\ &= m^4 + \frac{(2m+1)^3 + (2m+1)}{2} \\ &= m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1 = (m+1)^4 \end{aligned}$$

Според принципот на математичка индукција, тврдењето важи за секој природен број n .

4Б. Нека $P(x) = (2 + 3x)^{1994}$. Пресметај го збирот на сите коефициенти на полиномот $P(x)$, кои стојат пред непарните степени на x .

Забелешка. Крајните резултати треба да бидат дадени во што пократок облик, т.е. не треба да фигурираат суми од голем број на собироци.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} P(x) &= (2 + 3x)^{1994} \\ &= 2^{1994} + \binom{1994}{1} 2^{1993} \cdot 3x + \dots + \binom{1994}{1993} 2 \cdot 3^{1993} x^{1993} + 3^{1994} x^{1994} \end{aligned}$$

Да го означиме збирот на сите коефициенти на полиномот $P(x)$ со s , а збирот на сите коефициенти на полиномот $P(x)$ кои стојат пред парните степени на x , со t .

Од развиената форма на $P(x)$ се гледа дека s е еднаков на вредноста на $P(x)$ за $x = 1$, т.е. $s = P(1) = 5^{1994}$.

Да го разгледаме $P(1) + P(-1)$. Во овој збир коефициентите пред парните степени на x се собрани два пати (еднаш кај $P(1)$ и еднаш кај $P(-1)$), додека коефициентите пред непарните степени на x не се воопшто вклучени (односно, при сумирањето се кратат бидејќи се еднакви по апсолутна вредност, но со различни знаци). Значи:

$$t = \frac{P(1) + P(-1)}{2} = \frac{5^{1994} + 1}{2}.$$